Exercicis i alguns apunts teòrics de Matemàtiques per les classes d'ESPA

Nivell ESPA 4

Xavier Bordoy

Xavier Bordoy
Professor de Matemàtiques
Centre actual: CEPA Sud (Campos, Illes Balears)
Correu electrònic: somenxavier@gmail.com

Mathematics Subject Classification (2010): 97-01, 97A10

Aquest document està pensat per fer classes d'Educació Secundària de Persones Adultes (ESPA) de les Illes Balears amb el currículum establert l'any 2009 (entrada 17698 del BOIB 117 de 11 d'agost de 2009) amb una metodologia magistral o que impliqui, eventualment, una reiteració d'exercicis rutinaris o l'aplicació de tècniques de resolució de problemes específiques.

El document ha estat mecanografiat. Encara que s'hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors — el més probable de tipus tipogràfic o gramatical. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-me per correu electrònic. D'altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per millorar-la, us agraïria que m'ho communiquéssiu i, si el canvi és del meu gust, l'incorporaré a l'obra original en els mateixos termes de la llicència.

Aquest document ha estat generat, dimarts 21 agost 2018 a les 18:18, usant el programari ConTeXt (versió 20180404 MKIV), luatex (versió 1.07) i TikZ sota un entorn Linux.

Índex de continguts

Materials aliens

Els continguts següents no són d'el · laboració pròpia i com a tals es es distribueixen amb les seves corresponents llicències i autories:

- A l'exercici 53, la imatge del tanc (figura 1.14) s'ha extreta de la plana web del Neil Theasby (http://www.geograph.org.uk/more.php?id=3633065). La imatge es titula "Old fuel tank on abandoned military camp" i es distribueix sota llicència Creative Commons Reconeixement. CompartirIgual 2.0
- Els exercicis 62 i 49 estan extrets de la pàgina de *Math is Fun*. © 2014 Math is Fun.
- L'activitat 48 s'ha adaptat de l'activitat original *Will it hit the hoop* (http://blog.mrmeyer.com/2010/wcydwt-will-it-hit-the-hoop/). © 2011 Dan Meyer. Distribuïda sota llicència Creative Commons Reconeixement 2.0.
- Per a l'elaboració de la taula B.2 s'han fet servir diversos exemples, els quals s'han modificat lleugerament:
  - "Example: Cuboid in a 2 vanishing points perspective" de Florian Lesaint. © 2012 Florian Lesaint. El material està disponible a la web http://www.texample.net/tikz/examples/cuboid/ i es distribueix sota llicència "Reconeixement 3.0 No adaptada" (CC BY 3.0).
  - L'exemple de la piràmide quadrangular de la secció "3D shapes" de document "Some TikZ Examples/Demos" de Niles Johnson. © 2015 Niles Johnson. El material està disponible a la web https://nilesjohnson.net/tikz-demo.html i es distribueix sota llicència "Reconeixement-NoComercial 3.0 No adaptada" (CC BY-NC 3.0).
  - Edició 1 de la Resposta d'en Tom Bombadil de la pregunta "3D bodies in TikZ". © 2012 Tom Bombadil. El material està disponible a la web https://tex.stackexchange.com/a/42865 i es distribueix sota llicència "Reconeixement-CompartirIgual 3.0 No adaptada" (CC BY-SA 3.0).
  - "Example: Stereographic and cylindrical map projections" de Tomas M. Trzeciak. © 2008 Tomas M. Trzeciak. El material està disponible a la web http://www.texample.net/tikz/examples/map-projections/ i es distribueix sota llicència "Reconeixement 2.5 Genèrica" (CC BY 2.5).
  - "Example: Truncated Cone" de Mathias Magdowski. © 2012 Mathias Magdowski. El material està disponible a la web http://www.texample.net/tikz/examples/truncated-cone/ i es distribueix sota llicència "Reconeixement 2.5 Genèrica" (CC BY 2.5).

- En l'apartat d (pàgina 58) s'han utilitzat la teoria d'intervals (bloc 1, pàgina 58 i següents) del *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior* de n'Alícia Espuig Bermell. © 2010 Alícia Espuig Bermell. El material està disponible a la web http://alexandria.xtec.cat/course/view.php?id=166 i es distribueix sota llicència "Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional" (CC BY-NC-SA 4.0).

- L'activitat 88 s'ha elaborat a partir de la idea "Seven (Sneaky) Activities To Get Your Students Talking Mathematically" de Geoff Krall (emergent math). © 2012 Geoff Krall. El material està disponible a la web http://emergentmath.com/2012/03/01/seven-sneaky-activities-to-get-your-students-talking-mathematically i es distribueix sota llicència "Reconeixement 4.0 Internacional" (CC BY 4.0)

- Als exercicis 90, 91, 92, 93, 104, 107 i 154, la idea i els continguts estan extrets de *Llibre de text de 3r d'ESO*. Tema "Funciones y gráficas". Ed. Anaya. Exercicis 1, 2, 4, 5, 12, 15, 14, respectivament. Pàgines 225-228. IES Arroyo. Dpt. Matemàtiques (Averroes).

- A l'exercici 95, la idea i la imatge estan extretes de Real-World Math That Isn't Real To Students d'en Dan Meyer. © 2013 Dan Meyer. El material està disponible a la web http://blog.mrmeyer.com/2013/real-world-math-that-isnt-real-to-students/ i es distribueix sota llicència "Reconeixement 4.0 Internacional" (CC BY 4.0).

- A l'exercici 96, la idea i la imatge estan extretes de A19 - Meal Out de MathShell. © 2015 MathShell. El material està disponible a la web http://www.map.mathshell.org/tasks.php?collection=9&unit=MA19 i es distribueix sota llicència "Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0 No adaptada" (CC BY-NC-ND 3.0).

- La imatge del cotxe de l'exercici 97 està extret de la pàgina oficial de Tesla Motors. © 2015 Tesla Motors.

- Exercici 225: exercici adaptat a partir de l'exercici "Favorables i possibles" (quadre 15, pàgina 206) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006.

- Exercici 207: exercici adaptat a partir de l'exercici "Favorables i possibles" (quadre 15, pàgina 206) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006

- Exercici 226: la imatge del tauler de dards prové de la Wikimedia Commons i es distribueix sota les llicències GNU Free Documentation License 1.2 o superior, i Creative Commons Reconeixement i Compartir Igual 3.0 No adaptada. S'ha modificat la imatge llevant-ne les fletxes i la llegenda dels noms de les diferents àrees i s'ha ajustat l'àrea de dibuix al contingut

- Exercici 200: exercici adaptat a partir de l'exercici "Practica els complementaris" (pàgina 208) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006.

- Els exercicis 194, 195, 197, 212, 213, 198, 214, 219, 220, 221, 222, 223 i 224 estan extrets del llibret *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior* de n'Alícia Espuig Bermell. © Alícia Espuig Bermell 2009, distribuït sota llicència Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada (CC-BY-NC-SA 3.0)

- Els exercicis 182, 184, 185, 186, 187, 188, 201, 202, 203, 204, 205, 206, ??, 227, 228, 229, 230, 231, 235, 236, 237, 210, 211, 232, 233, 234, 238 estan extrets del llibre electrònic "Matemàtiques 4t Opció B" de la col · lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil. Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya (CC-BY-NC-SA 3.0 ES)

- L'exercici 244 s'ha extret del llibre electrònic "Matemàtiques 4t Opció A" de la col · lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil. Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya (CC-BY-NC-SA 3.0 ES)

- Els exercicis 246, 247, 248, 251 i 253 s'han extret del web toomates.net distribuïts sota llicència Creative Commons de Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0. © 2007-2009 Gerard Romo, Joan Carles Sampera Bonet, Oriol Olivé i Ana Rodríguez.

- Les imatges dels exercicis 208 i 209 s'han pres de la tasca 595 de MathShell *Representing Data Using Grouped Frequency Graphs and Box Plots*. © 2014

MARS, Shell Center, University of Nottingham. Distribuïda sota llicència BY-NC-ND 3.0.

- Els exercicis 191, 192, 193 s'han traduït a partir dels exercicis de la Tasca 225 *Evaluating Statements About Probability* de MARS Shell Center. © 2012. Distribuït sota llicència CC-BY-ND 3.0

L'ús dels materials aliens que mantenen tots els drets de d'autor es realitza acollint-se al dret de cita i ressenya per a fins docents amparat per l'article 32.2 de la Llei de Propietat Intel · lectual (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. Entrada 8930 del BOE 97, de 22 d'abril de 1996).

Continguts oficials

Els següents punts són els continguts oficials que s'han d'impartir en els diversos temes que conformen el temari del nivell d'ESPA 3 (BOIB 117 de 11 d'agost de 2009). La classificació és meva.

Funció quadràtica

Funcions

Probabilitat

1 Funció quadràtica

1.1 Motivació

Exemple **1.** Tenim una parcela de terra bastant gran i volem marcar-hi un quadrat de 36 m^2, per fer-hi un hort (figura 1.1). Quines dimensions ha de tenir el quadrat de terra?

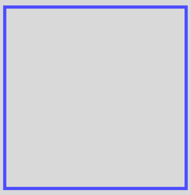


Figura 1.1 Quadrat de terra

Sabem que l'àrea d'un quadrat és costat per costat. Si denotam el costat amb la lletra x, aleshores tenim que:

- Per una banda, àrea $= x \cdot x = x^2$
- Per l'altra, àrea $= 36\ \mathrm{m}^2$

Per tant, $x^2 = 36$.

Així doncs, volem trobar un nombre x de manera que el seu quadrat sigui igual a 36. Per trobar aquest nombre hem de fer l'operació inversa d'elevar al quadrat, és a dir, l'arrel quadrada.

Per tant, $x = \sqrt{36} = 6$. És a dir, el costat del quadrat ha de fer 6 m.

Exercici **1.** Trobeu les dimensions dels quadrats següents:

a. Un quadrat que té àrea igual a 25 m^2

b. Un quadrat que té àrea igual a 20 cm^2

c. Un quadrat d'àrea 160.000 km^2

d. Un quadrat d'àrea $10,24$ cm^2

Exemple **2.** Imaginem-nos ara que en comptes de voler fer una parcela rectangular de la mateixa àrea. És a dir, volem construir un rectangle que tengui 36 m^2.

En primer lloc, hem de notar que no tenim un únic rectangle que compleixi això. El cas anterior del quadrat ens serveix, ja que un quadrat és un cas particular d'un rectangle. Però també podríem construir un rectangle de dimensions 1 m $\times$ 36 m o bé un altre de 2 m $\times$ 18 m (figura 1.2)

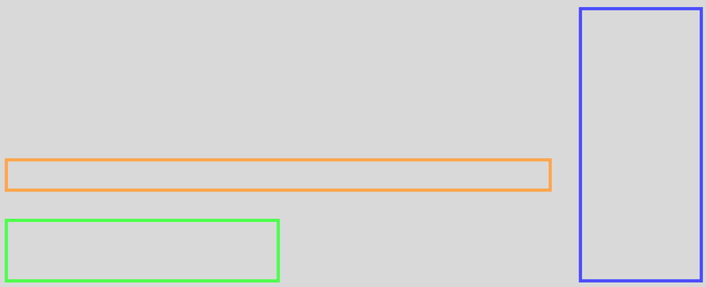


Figura 1.2 3 rectangles diferents d'àrea 36 m^2

De fet, hi ha infinites possibilitats (en podíeu trobar 5 més?). Per tant, hem d'imposar algunes condicions en el rectangle que volem construir. Suposem que imposem que l'altura sigui el doble que la base (figura 1.3). Quines serien les dimensions d'aquest rectangle?

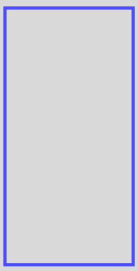


Figura 1.3 Rectangle que té l'altura el doble que la base

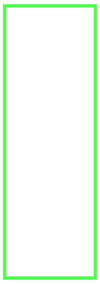
Si denotem la base per x, aleshores l'altura és $2 \cdot x$, o simplement $2x$. Per tant, tenim que l'àrea del rectangle és $2x \cdot x = 2x^2$. Si volem que l'àrea sigui de 36 m^2, aleshores hem de resoldre aquesta equació:

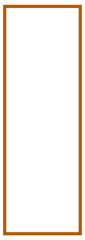
$$2x^2 = 36$$

Aïllant, la x^2, tenim que $x^2 = 36/2$, per tant, $x^2 = 18$. Per la qual cosa, $x = \sqrt{18} \simeq 4,24$. O sigui, la base fa, aproximadament, $4,24$ m i l'altura el doble, $8,48$ m.

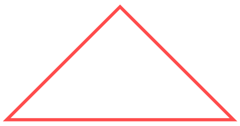
Exercici **2.** Trobeu les dimensions d'aquestes figures amb les condicions donades

a)  $\grave{A}rea = 50$ — L'altura és la meitat que la base

b)  $\grave{A}rea = 27$ — La base és un terç de l'altura

c)  $\grave{A}rea = 300$ — L'altura és el triple que la base

d)  $\grave{A}rea = 10.000$ — L'altura és un quart que la base

e)  $\grave{A}rea = 86.400$ — L'altura és el doble d'un nombre desconegut i la base és el triple d'aquest mateix nombre *f*)  *Àrea* = 225 L'altura fa la meitat que la base

Fins ara hem imposat condicions a la parcela de forma rectangular que volem definir de manera que un costat és igual a un nombre per l'altre costat. Però què passaria si tenguéssim condicions que involucrassin la suma de quantitat?

Exemple **3.** Volem construir una parcela rectangular de manera que (a.) l'àrea sigui de 36 m^2 i (b.) la base faci 8 metres més que l'altura (figura 1.4) .

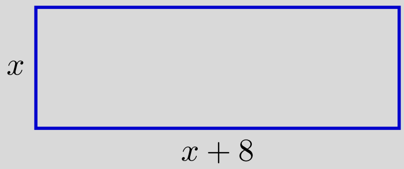


Figura 1.4 Rectangle en el que la base mesura 8 m més que l'altura

Tenim que la base és igual a $x + 8$ i que l'altura fa x. Per tant, volem resoldre l'equació

$$x \cdot (x + 8) = 36$$

Per resoldre-la, hem de llevar primer de tot el parèntesis, aplicant la propietat distributiva, és a dir, en el nostre cas, multiplicant ambdós membres de la suma per x:

$$x^2 + 8x = 36 \tag{1.1}$$

Això (la fórmula 1.1) és una fórmula de 2n grau, ja que involucra incògnites elevades al quadrat (x^2) i a cap exponent major (no hi ha x^3, x^4, etc. a l'equació). Resoldre aquestes equacions no és senzill. En general, s'utilitzen dues tècniques: *completar quadrats* o bé l'aplicació d'una fórmula, la qual es coneix com *la fórmula de segon grau*. Però abans d'aplicar cap d'aquestes tècniques, l'equació s'ha de *reduïr*, és a dir:

a. S'han d'eliminar els parèntesis

b. S'han d'eliminar els denominadors

c. S'han de passar tots els membres a un costat (habitualment a l'esquerra)

d. L'equació final ha de tenir una pinta com $ax^2 + bx + c = 0$, on a, b i c són nombres.

Per eliminar parèntesis i denominadors s'aplica el mateix procediment que a les equacions de 1r grau.
En el nostre cas, hem de reduïr l'equació 1.1, passant tots els termes a l'esquerra (no tenim ni parèntesis ni denominadors a llevar):

$$x^2 + 8x - 36 = 0$$

Per tant, en el nostre cas, $a = 1$ (x^2 és igual a $1x^2$), $b = 8$ i $c = -36$. Recordeu que a, b i c tenen signe.

Una vegada reduïda, s'aplica una de les dues tècniques:

- **Completar quadrats**

  Aquesta tècnica consisteix en transformar l'equació per a què quedi de la forma

$$A(x - B)^2 + C = 0$$

  En determinats casos, aquesta transformació es pot fer de cap, sobretot quan $a = 1$ i b és parell. En el nostre cas és evident que

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 36 &= x^2 + 2 \cdot 4x - 36 \\ &= (x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 16) - 16 - 36 \\ &= (x + 4)^2 - 52 \end{aligned}$$

  Per tant, l'equació 1.1 es transforma en

$$(x + 4)^2 - 52 = 0,$$

  és a dir

$$(x + 4)^2 = 52$$

  (en aquest cas, $A = 1$, $B = -4$ i $C = 52$)

  Aquesta equació és fàcil de resoldre, ja que simplement hem de fer arrels quadrades i aïllar la x, és a dir,

$$x + 4 = \pm\sqrt{52}$$

  i, per tant,

$$x = \pm\sqrt{52} - 4$$

Aquí el $\pm$ vol dir que tenim dues possibilitats: amb signe positiu i amb signe menys. Per tant, tenim dues solucions possibles: $x_1 \simeq 3,21$ i $x_2 \simeq -11,21$.

D'aquesta manera,

(1.) base $= 11,21$ m i altura $= 3,21$ m i (2.) base $= -3,21$ m i altura $= -11,21$ m . Per motius físics, eliminem les mesures negatives (no passarà el mateix a altres casos).

En general, la transformació no es pot fer de cap. Per passar una equació de la forma $ax^2+bx+c=0$ a una equació de la forma $A(x-B)^2+C=0$ usarem la fórmula:

$$A = a \qquad B = \frac{-b}{2a} \qquad C = c - AB^2$$

Per exemple, l'equació $2x^2-4x+10=0$ es transformaria en $2(x-1)^2+8=0$.

- **Fórmula de segon grau.**

  S'aplica la fórmula de segon grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \tag{1.3}$$

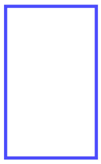
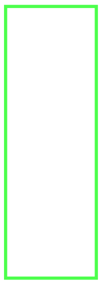
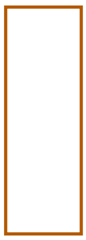
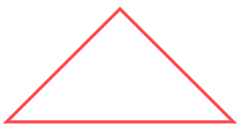
  Apliquem aquesta fórmula en el nostre cas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+144}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{208}}{2} \simeq \frac{-8 \pm 14,42}{2} \end{aligned}$$

  Per tant, tenim dues solucions $x_1 \simeq (-8+14,42)/2 = 3,21$ i $x_2 \simeq (-8-14,42)/2 = -11,21$. Pel que hi ha dues possibilitats:

  (1.) base $= 11,21$ m i altura $= 3,21$ m i (2.) base $= -3,21$ m i altura $= -11,21$ m . Per motius físics, eliminem les mesures negatives (no passarà el mateix a altres casos).

Exercici 3. Trobeu les dimensions d'aquestes figures.

a)		$\text{Àrea} = 15$	L'altura medeix 2 metres més que la base
b)		$\text{Àrea} = 50$	La base fa sis metres menys que l'altura
c)		$\text{Àrea} = 231$	L'altura mesura deu centímetres més que la base
d)		$\text{Àrea} = 7.301$	L'altura mesura x i la base $3x + 2$
e)		$\text{Àrea} = 300$	L'altura és $3/4$ de la base
f)		$\text{Àrea} = 71,5$	L'altura fa 2 centímetres més que la base

Solucions de “Motivació”

1 (a.) 5 m, (b.) aprox. 4.47 cm, (c.) 400 km, (d.) $3,2$ cm

2 (a.) base = 10, altura = 5 (b.) base = 3, altura = 9, (c.) base = 10, altura = 30, (d.) base = 200, altura = 50, (e.) base = 360, altura = 240, (f.) base $\simeq 22,36$, altura $\simeq 11,18$

3 (a.) L'altura fa 3 i la base 5. (b.) La base fa 10 i l'altura 4 (c.) La base fa 11 i l'altura 21 (d.) L'altura fa 49 i la base 149 (e.) La base és 20 i l'altura es 15 (f.) La base és igual a 11 i l'altura a 13

1.2 Resolució d'equacions de 2n grau

Exercici **4.** Resoleu les equacions de 2n grau següents:

a. $3x^2 + 2x = 5x - 2$

b. $10x - 8x = x^2 - 5$

c. $9x - 8 = 7 - x^2$

d. $8x^2 - 2 = 10x^2 - 5x$

e. $(x - 2)^2 - 5 = 10$

f. $3(x + 4)^2 = 10$

g. $(x - 2)^2 - 8 = 20x$

h. $5(x - 1)^2 = 2$

i. $(x - 1)^2 = -4$

j. $(x - 5)^2 = 5x^2$

Exercici **5.** Resoleu les equacions de segon grau següents:

a. $3x - 5x^2 = 2x - 490$

b. $7 - (x - 3) = x^2 - 4x$

c. $x - \frac{x^2}{2} = x^2 - 3$

d. $4x - (2x^2 - 5x) = \frac{x}{2}$

e. $-3x^2 + 432 = 0$

f. $\frac{x}{2} + 3(x^2 + 2) = 311$

Exercici **6.** Resoleu les equacions següents:

a. $9x^2 - 225 = 0$

b. $5x^2 = 10$

c. $10 = -6x^2$

d. $6x^2 + 27 = 9x^2$

Exercici **7.** Resoleu les equacions següents:

a. $3x^2 + 2x = -2x$

b. $3x^2 - x = -5x^2 + x$

c. $-9x^2 + 81x - 4 = -4$

d. $-20x = 8x^2 - 2 + 2x^2 + 2$

Exercici **8.** Resoleu les equacions següents:

a. $4x^2 + 2x - 4 = -2x + 4$

b. $9x^2 - 63x + 90 = 0$

c. $-x^2 - 3x + 10 = x^2 + 3x - 10$

d. $-2x^2 + 4x - 3 = -2x + x^2$

e. $2x^2 + 4x + 1 = -1$

f. $2x + 1 = -2 - x^2$

Exercici **9.** Digueu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

a. $x = -2$ és solució de l'equació $x^2 - 2x - 1 = 0$

b. $x = \frac{1}{2}$ és solució de l'equació $4x^2 - 1 = 0$

c. $x = 2$ i $x = 0$ són solucions de l'equació $x^2 = 4x$

d. $x = -1$ és la única solució de l'equació $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Nota: podeu comprovar si el nombre assenyalat és o no solució de l'equació en comptes de trobar totes les solucions de l'equació.

Exercici **10.** Resoleu:

a.

$$\frac{3x-1}{2} + \frac{x^2}{3} + 5 = x^2 + 3$$

b.

$$\frac{x}{3} - 5(1 + x^2) = 311$$

Exercici **11.** Reduïu i resoleu les equacions següents:

a.

$$3(x+2) + 4x^2 - 4 = 8 - x(1-x) + 7x$$

b.

$$5x^2 + 2(x^2 + x) - 4 = \frac{5x^2}{2} + 11x^2$$

c.

$$2x(x+1) - 2(x+2) = 0$$

d.

$$\frac{x^2+1}{3} - \frac{x-2}{2} = 0$$

e.

$$7x + 3 + 5x^2 = -3x^2 + 4x + 35 + 3x$$

f.

$$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{5} = 2(x+1)$$

Exercici **12.** Resoleu:

a. $2x^2 + 2x - 4 = 0$

b. $3x^2 - 27 = 0$

c. $2x^2 + 6x = 0$

d. $x^2 - 6x + 8 = 0$

e. $-x^2 + 2x + 8 = 0$

f. $-x^2 - 4x - 6 = 0$

g. $15x^2 + 2x - 8 = 0$

h. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

i. $2x^2 - 5x - 7 = 0$

j. $3x^2 - 5x + 4 = 0$

k. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

l. $3x^2 - 6x + 2 = 0$

m. $x^2 - 6 = 30$

n. $3x^2 - 115 = 185$

o. $x(x + 5) = 0$

p. $4x = 3x^2$

q. $x^2 = 121$

r. $5x^2 - 7x = 0$

s. $x^2 + x = 3x - x^2$

Exercici **13.** Reduïu i resoleu les equacions següents:

a. $2x + 4x - x^2 + 7 = x^2 + 2x - 9$

b. $-x + 4 - x^2 - 1 + x = -2x^2 + 19$

c. $2x^2 + x - 3 + 3x - 8 + 2x = 4x + x^2 - 11$

d. $x^2 - 3x = -x^2 + 2x - x^2 - 1 - 4x^2 + 2 + 5x^2 - 3$

e. $-x^2 - 3x = x^2 + 2x + 3x + 6$

f. $2x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 1 + 2x - x^2 + x + 1$

g. $-x^2 - 3x - x^2 + 2 = 2x^2 - 14 - 3x$

h. $24x^2 - 3x - x^2 + 2 = -6x^2 - 41x^2 - 29x^2 + 22 - 13x - x^2$

Exercici **14.** Resoleu:

a.

$$-2x^2 + x + 23 = -4x^2 - 11x + 7$$

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{13x}{4} = -\frac{1}{2}$$

b.

c.

$$(x + 2)^2 + 3x - 5 = 0$$

d.

$$(x+2)(x-3)+3x=(2x-4)(x+2)$$

Exercici **15.** Resoleu les equacions següents:

a. $(3x-1)^2=0$

b. $(x-3)(x-8)=0$

c. $(2x-1)^2=25$

d. $(x-5)^2=0$

e. $(x-2)(x+2)=7$

f. $\frac{(x-1)(x+1)}{3}=\frac{(x-1)^2}{2}$

Solucions de "Resolució d'equacions de 2n grau"

4

5 (a.) $x = 10$ i $x = -49/5$, (b.) $x = -2$ i $x = 5$, (c.) $x \simeq -1,12$ i $x \simeq 1,79$, (d.) $x = 0$ i $x = 17/4$, (e.) $x = \pm 12$, (f.) 10, $x = -61/6$

6 (a.) $x = \pm 5$ (b.) $x = \pm\sqrt{2}$ (c.) no té solució (d.) $x = \pm 3$

7 (a.) $x = 0, -\frac{4}{3}$ (b.) $x = 0, \frac{1}{4}$ (c.) $x = 0, 9$ (d.) $x = 0, -2$

8 (a.) $x = -2$, $x = 1$ (b.) $x = 2$, $x = -5$ (c.) $x = 2$, $x = -5$ (d.) $x = 1$, $x = 1$ (e.) $x = -1$, $x = -1$ (f.) no té solució

9 (a.) Fals (b.) Vertader (c.) Fals (d.) Vertader

10 (a.) $x = -\frac{3}{4}$ i $x = 3$ (b.) no té solució

11 (a.) $x = -1$, $x = 2$ (b.) $x = 0$ (c.) $x = \pm\sqrt{2}$ (d.) no té solució (e.) $x = \pm 2$

12 (a.) $1, -2$, (b.) $-3, +3$, (c.) $0, -3$, (d.) $2, 4$, (e.) $-2, 4$, (f.) no en té, (g.) $x = -\frac{4}{5}$, $x = \frac{2}{3}$, (h.) $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, (i.) $x = -1$, $x = \frac{7}{2}$, (j.) no té solució, (k.) $x = -\frac{1}{3}$, (l.) $x \simeq 0,4$, $x \simeq 1,5$, (m.) $x = \pm 6$, (n.) $x = \pm 10$, (o.) $x = 0$, $x = -5$, (p.) $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$, (q.) $x = \pm 11$, (r.) $x = 0$, $x = \frac{7}{5}$, (s.) $x = 0$, $x = 1$

13 (a.) -2, 4 (b.) -4, 4, (c.) -2, 0, (d.) 2, $\frac{1}{2}$, (e.) -1, -3, (f.) 0, $\frac{3}{2}$, (g.) ± 2, (h.) $\frac{-1}{2}$, $\frac{2}{5}$

14 (a.) $x = -2$, $x = -\frac{1}{6}$), (b.) $x = -2$, $x = -4$, (c.) $x \simeq -7.1$, $x \simeq 0.1$, (d.) $x \simeq 2.7$, $x \simeq -0.7$

15 (a.) $x = \frac{1}{3}$, (b.) $x = 3$, $x = 8$, (c.) $x = \frac{1}{2}$, (d.) $x = 5$, (e.) $x = \pm 2$, (f.) $x = 1$, $x = 5$

1.2.1 Problemes geomètrics

Exercici **16.** L'àrea d'un quadrat és 1024. Què val el seu costat?

Exercici **17.** Calculeu la longitud dels catets d'un triangle rectangle isòsceles d'àrea 50 m^2.

Exercici **18.** En un rectangle, la base fa tres centímetres més que l'altura. Si l'àrea és de 1.720 cm^2. Què val cada costat?

Exercici **19.** En un rectangle, l'altura és quatre centímetres més curta que la base. Si l'àrea és de 70 cm^2, quines són les dimensions del rectangle?

Exercici **20.** Calculeu el valor de x sabent que l'àrea total de la figura 1.5 és igual a 79 m^2:

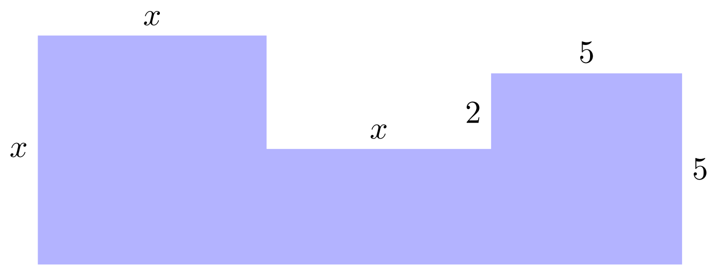


Figura 1.5 Composició de diversos rectangles

Exercici **21.** En un rectangle, la base és 3 cm més curta que l'altura. Calculeu les dimensions del rectangle si sabem que la seva àrea és de 70 cm^2.

Exercici **22.** Trobeu x per a que l'àrea de la figura 1.6 sigui igual a 54 m^2:

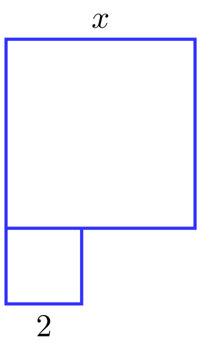


Figura 1.6 Composició de dos quadrats

Exercici **23.** L'àrea d'un quadrat és 324. Què val el seu costat?

Exercici **24.** En un rectangle, la base fa dos centímetres més que l'altura. Si l'àrea és de 2808 cm^2. Què val cada costat?

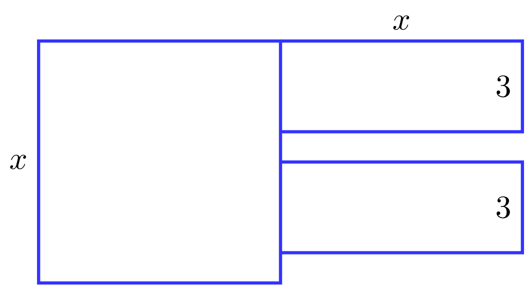
Exercici **25.** En un rectangle, l'altura és deu centímetres més curta que la base. Si l'àrea és de 1200 cm^2, quines són les dimensions del rectangle?

Exercici **26.** En un rectangle de 4 cm de perímetre, sabem que la base és igual al quadrat de l'altura. Calcula les seves dimensions.

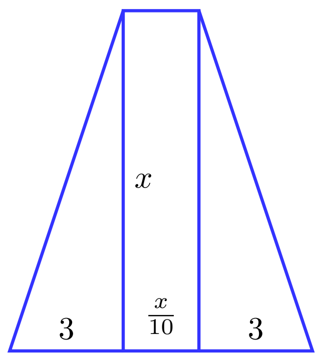
Exercici **27.** En un rectangle de 600 m de perímetre, sabem que l'altura és igual a dues vegades el quadrat de la base. Calculeu les seves dimensions.

Exercici **28.** Calculeu el valor de x sabent que l'àrea total de la figura és igual al valor que s'indica.

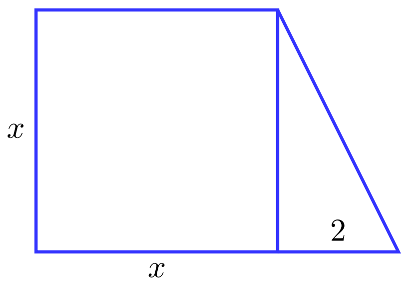
a. 112 m^2:



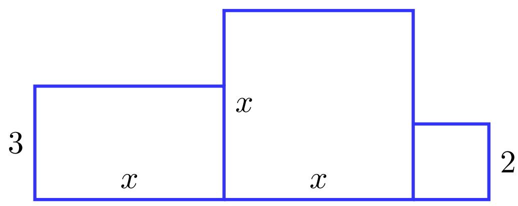
c. 1540 m^2:



b. 20 m^2:



d. 44 m^2:



Exercici **29.** L'àrea d'un quadrat és 324. Què val el seu costat?

Exercici **30.** En un rectangle, la base és igual a tres vegades l'altura. Si la seva àrea és 300, trobeu les dimensions del rectangle.

Exercici **31.** Quan passarà que l'àrea d'aquest terreny (figura 1.7) serà igual a 4.485 m^2? Quina àrea tendria si x fos igual a 3 m?

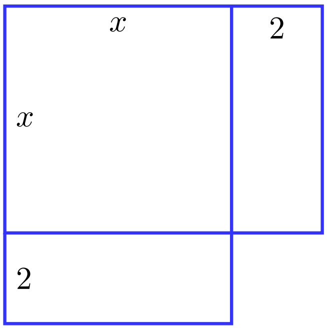


Figura 1.7 Terreny format per composició de rectangles

Solucions de "Problemes geomètrics"

16 32
17 10 metres
18 40 i 43 cm
19 7 i 10
20 6 m
21 10 cm
22 5 m
23 18
24 52 cm i 54 cm
25 30 i 40
26 l'altura fa 1 cm
27 la base fa 12 m
28 (a.) 8 m, (b.) 4 m, (c.) 110 m, (d.) 5 m
29 18
30 10 i 30

1.3 Funció quadràtica

1.3.1 Pla cartesià

Exercici **32.** (a.) Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 4)$, $B = (4, 1)$, $C = (-5, 2)$, $D = (-3, -1)$, $E = (6, -3)$, $F = (0, 2)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades, i (b.) digueu a quin quadrant pertanyen.

Exercici **33.** Escriviu les coordendades dels punts següents (figura 1.8):

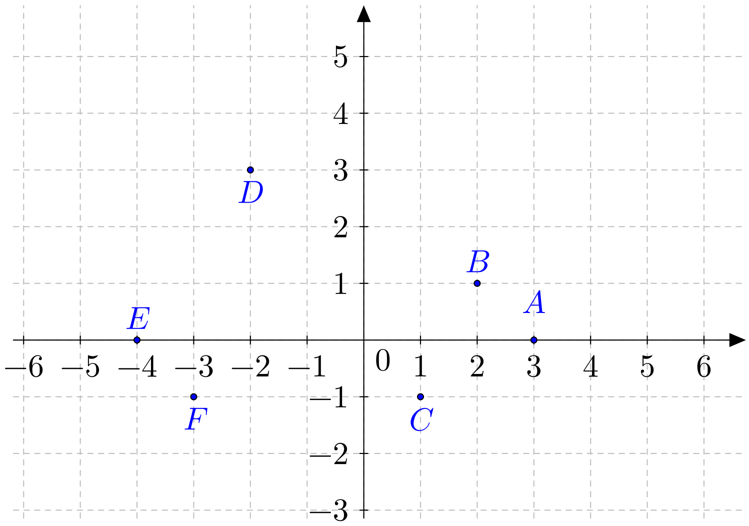


Figura 1.8 Punts al pla cartesià

Exercici **34.** Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, 1)$, $D = (2, 2)$, $E = (-1, 2)$, $F = (1, -2)$, $G = (0, 2)$, $H = (1, 0)$, $I = (0, 0)$, $F = (-2, -3)$. Digueu a quin quadrant pertanyen

Exercici **35.** Quines coordenades tenen els punts següents (figura 1.9):

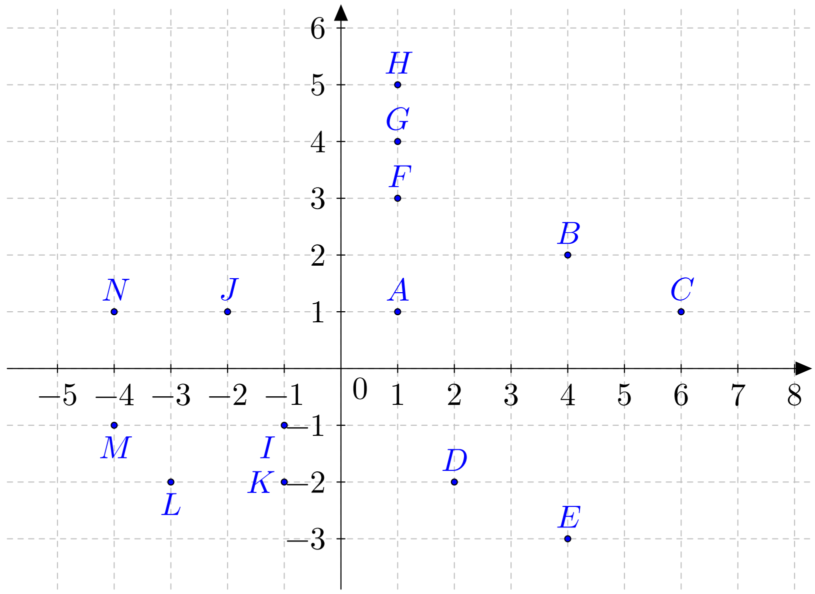


Figura 1.9 Punts al pla cartesià

Exercici **36.** Representeu al pla cartesià els punts següents i digueu a quin quadrant pertanyen: $A = (5, 6)$, $B = (-3, 4)$, $C = (7, -3)$, $D = (-1, -5)$, $E = (0, -2)$, i $F =$ origen de coordenades.

Exercici **37.**

a. Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (-3, 2)$, $D = (-4, -1)$, $E = (2, -3)$, $F = (0, 3)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades

b. Digueu a quin quadrant pertanyen

1.3.2 Representació de funcions quadràtiques

Recordem de cursos anteriors que una funció de l'estil $y = ax + b$ donava lloc a una recta i que totes[1] les rectes al pla cartesià venien donades per funcions d'aquest estil. Aquestes funcions s'anomenaven funcions afins. Per tant, totes les altres funcions donen llocs a corbes.

Ocupem-nos tot seguit de les funcions que tenen un factor de segon grau en la seva fórmula, és a dir, que tenen x^2 però no tenen cap potència d'exponent major.

[1] Excepte les rectes verticals.

- $y = x^2$

  Aquesta funció dóna lloc a la gràfica següent (figura 1.10):

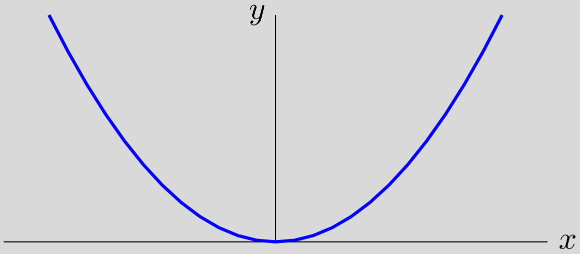


Figura 1.10 Paràbola $y = x^2$

Aquest tipus de corba es coneix com a *paràbola* i es caracteritza perquè tots els punts de la corba esta a la mateixa distància d'un punt fix, anomenat *focus*, i una recta, anomenada *directriu* (vegeu 1.4). Té la propietat que qualsevol *raig* vertical que incideix a la paràbola va a parar al focus. Això és utilitzat a les antenes parabòliques per amplificar les senyals.

Existeix un punt singular: el vèrtex de la paràbola, on la paràbola passa de decrèixer a crèixer.

A continuació anirem complicant aquesta fórmula, mica en mica, i veurem que lexs corbes resultants també donen lloc a paràboles. A més, les transformacions de la fórmula correspondran a moviments geomètrics d'aquesta paràbola base.

- $y = (x - B)^2$

  Aquesta transformació correspon a una translació vertical de la paràbola. La paràbola es mou B unitats a la dreta. O sigui, el seu vèrtex es mou a la posició $(B, 0)$. Vegeu figura

- $y = (x - B)^2 + C$

  Aquesta transformació fa que el vèrtex de la paràbola pugi verticalment C unitats. Per tant, el vèrtex d'aquesta paràbola queda situat a (B, C). Vegeu figura

- $y = A(x - B)^2 + C$

  La introducció del paràmetre A fa que cada valor de $(x - B)^2$ es multipliqui per A. Per tant, si $|A|$ és major que 1, això farà que s'obtingui un valor major que si no es tingués A. Per tant, y tendrà un valor major i, llavors, la paràbola serà més tancada. En el cas, en que $|A| < 1$, la paràbola serà més oberta, més *gruixada*. En definitiva, el paràmetre A determina l'*obertura* de la paràbola. Vegeu figura

- Si $A > 0$, la paràbola és *còncava.*
- Si $A < 0$, la paràbola és *convexa.*

En general per a representar una paràbola es determinen: (a.) Orientació (b.) Vèrtex (c.) Punts de tall amb els eixos . Vegem com determinar aquests components per una paràbola genèrica.

- **Per $\boldsymbol{y = A(x - B)^2 + C}$**
  - Orientació:
    - ⋆ Si $A > 0$, la paràbola és còncava.
    - ⋆ Si $A < 0$, la paràbola és convexa.
  - Vèrtex: el vèrtex té coordenades (B, C)
  - Punts de tall amb els eixos:
    - ⋆ El punt de tall amb l'eix Y es troba substituïnt $x = 0$ a la fórmula $y = A(x - B)^2 + C$.
    - ⋆ El punt de tall amb l'eix X, anàlogament, es troba fent $y = 0$ a l'equació $y = A(x - B)^2 + C$.
- **Per $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$**
  - Orientació:
    - ⋆ Si $a > 0$, la paràbola és còncava.
    - ⋆ Si $a < 0$, la paràbola és convexa.
  - Vèrtex: El vèrtex és el punt (x_v, y_v) i s'obté amb la fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = y(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

  - Punts de tall amb els eixos:
    - ⋆ El punt de tall amb l'eix Y es troba substituïnt $x = 0$ a la fórmula $y = ax^2 + bx + c$.

- ⋆ El punt de tall amb l'eix X, anàlogament, es troba substituïnt $y = 0$ a l'equació $y = ax^2 + bx + c$.

Notem que sempre podem passar d'una forma a altra d'una paràbola usant les transformacions que vàrem veure a l'apartat de les equacions de 2n grau (equació 1.2, pàgina 14).

Exercici **38.** Representeu gràficament les funcions següents:

a. $y = (x-2)^2 + 3$
b. $y = -2(x-3)^2 + 5$
c. $y = -(x+2)^2 - 4$
d. $y = -4x^2 - 8x + 12$
e. $y = -10x^2 - 20x$
f. $y = 2x^2 - 4x - 1$

Exercici **39.** Representeu les funcions següents:

a. $y = x^2 + 2$
b. $y = (x-2)^2$
c. $y = 2x^2 - x + 2$
d. $y = 3(x-1)^2$
e. $y = -x^2 + x - 10$
f. $y = (x+3)^2 + 1$
g. $y = 2x^2 - 8x$
h. $y = (x-1)(x+2)+3$
i. $y = -2(x-3)^2 - 10$

En cada cas, trobeu el vèrtex de la paràbola.

Exercici **40.** Representeu:

a. $y = 2x^2 + 12x + 16$
b. $y = x^2 - 2x + 1$
c. $y = -x^2 - 2x - 4$
d. $y = x^2 - 2x$
e. $y = -x^2 + 2x - 2$
f. $y = -3x^2$
g. $y = 2x^2 - 8$
h. $y = -(x+10)^2 - 10$

Exercici **41.** Representeu gràficament només aquelles funcions que donin lloc a paràboles:

a. $y = -3x + 8$
b. $y = 2x^2 + 2x - 12$
c. $y = 6x - 2$
d. $y = x$
e. $y = -x^2 - 3x - 2$
f. $y = 10x + 1$
g. $y = 3x^2 + 9x$
h. $y = -x + 2$
i. $y = -3x^2 + 9$
j. $y = 3x + 9$
k. $y = 3x^2 + 9$
l. $y = -x^2 - 2x - 4$
m. $y = -x^2 - 3x - 2$
n. $y = -x^2$
o. $y = -x^2 + 2$
p. $y = -2x^2 + 7$
q. $y = -x^2 + 25$
r. $y = -x^2 - 25$
s. $y = x^2 - 2x + 3$
t. $y = (x-2)^2 + 3(x-3)$
u. $y = 3(x-3)^2 - 3x^2$
v. $y = -(x+2)^2 - (x-2)^2$

Exercici **42.** Trobeu el vèrtex de la paràbola que té com a fórmula $y = -x^2 + 4$

1.3.2.1 Determinació de funcions quadràtiques

Exercici **43.** Tenim la paràbola $y = ax^2 + bx + 2$ i sabem que el vèrtex passa per $x = 2$ i que el punt $(1, 3)$ pertany a la paràbola. Calculeu a i b.

Exercici **44.** Trobeu la paràbola:

a. té vèrtex $(3, -2)$ i passa per $(1, 2)$
b. té vèrtex $(-1, 2)$ i passa per $(0, 4)$
c. té vèrtex $(4, 0)$ i passa per $(-1, 25)$
d. té vèrtex $(0, 3)$ i passa per $(5, 53)$

Exercici **45.** ($\star$) Trobeu, si es pot, la paràbola que passa pels punts:

a. $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ i $C = (2, 4)$
b. $A = (0, -1)$, $B = (-1, 0)$ i $C = (1, 0)$
c. $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$ i $C = (1, 0)$
d. $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ i $C = (2, -1)$

Exercici **46.** Trobeu la b si sabem que la paràbola que determina la funció $y = 3x^2 + bx + 3$ passa per $(2, -5)$

Exercici **47.** Sabem que la paràbola $y = ax^2 - 2x + 4$ té el vèrtex a $x = \frac{1}{2}$. Trobeu a. Quina altura màxima assoleix aquesta paràbola?

Activitat **48.** (Will it hit the hoop) Encertarà la canasta de bàsquet?

1.4 Paràbola

1.4.1 Definició

La paràbola es defineix com el conjunt de punts en el pla que estan a la mateixa distància d'un punt F, anomenat *focus*, i una recta r, anomenada *directriu*, els quals estan prèviament fixats (figura 1.11).

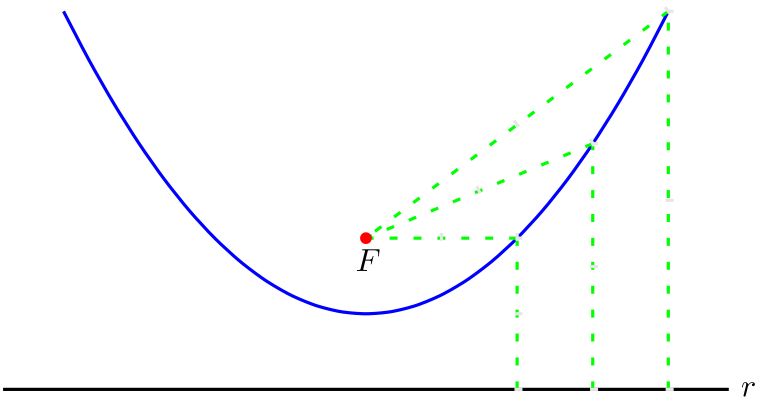


Figura 1.11 Paràbola amb directriu r i focus F

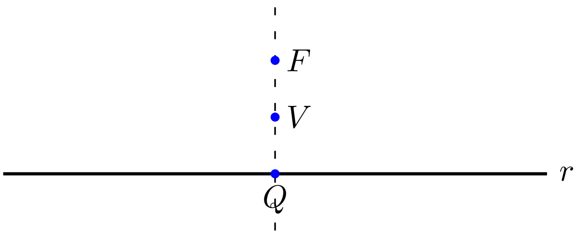
Matemàticament, la paràbola és el conjunt de punts x tals que $d(x, F) = d(x, r)$.

1.4.2 Construcció geomètrica

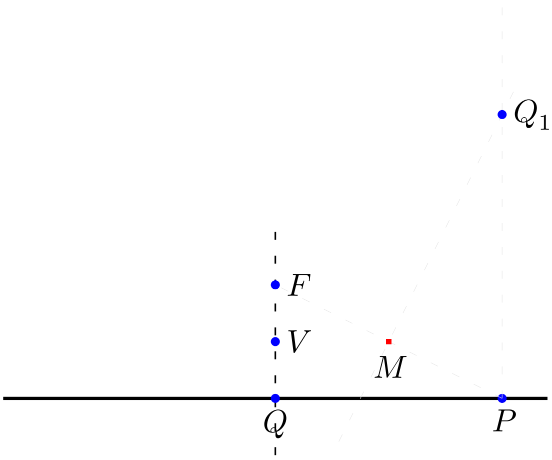
Donats el focus F i la directriu r, volem construir la paràbola. Hem de trobar tots els punts del pla que estan a la mateixa distància de F que de r. Per fer-ho necessitem regle i compàs.

a. Trobar el vèrtex. El vèrtex V i el focus F es troben a l'eix de simetria de la paràbola. Per trobar l'eix de simetria, simplement tracem la perpendicular a r que passa per F. Aquesta perpendicular talla a r a un punt. Diem-li Q. Llavors el vèrtex és el punt mitjà de F i Q. Notem que no hi ha punts sobre la paràbola (els quals equidisten a F i a r) que es trobin a una distància menor que $d(V, F)$.

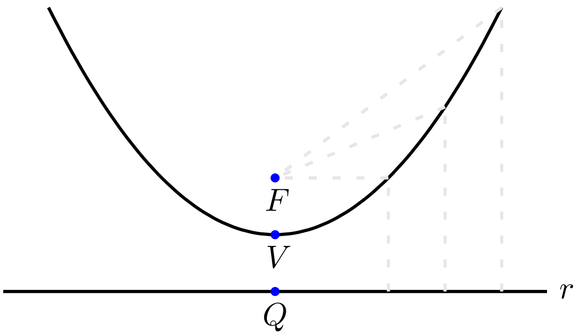
b. Marcar punts. Hem de trobar punts que equidistin a r i a F. Per fer-ho, sigui P un punt qualsevol de r. Facem les passes següents:



a. Trobar el vèrtex: V és el punt mitjà de Q i F



b. Marcar punts



c. Traçar la corba

Figura 1.12 An example of combination

– Tracem el segment $\overline{FP}$ i dibuixem la seva mediatriu[2]. Tots els punts de

[2] La mediatriu del segment $\overline{FP}$ es defineix com la recta dels punts que estan a la mateixa distància de F que de P. Aquesta recta és perpendicular al segment $\overline{FP}$ i es pot traçar trobant la intersecció

la mediatriu estan a la mateixa distància de P que de F. Volem trobar aquells que, a més, estiguin a la mateixa distància de r.

– Per trobar aquests punts, simplement hem de cercar els punts de la mediatriu que la seva distància a r sigui la mateixa que la seva distància a P. Això només s'aconsegueix traçant una perpendicular a r des de P i trobant la intersecció amb la mediatriu. D'aquesta manera trobarem un punt de la paràbola Q_1.

– Repetim aquest procediment indefinidament, amb el que obtendrem una successió de punts Q_1, Q_2, ...els quals pertanyen a la paràbola.

c. Tracem la corba. De forma aproximada, tracem la corba que passa pels punts trobats a la passa anterior.

1.4.3 Determinació del focus i directriu donada una paràbola

Sigui $y = ax^2 + bx + c$ una funció quadràtica qualsevol.

a. El vèrtex és el punt (x_v, y_v) i s'obté amb la fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2a} \tag{1.4}$$

$$y_v = y(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c \tag{1.5}$$

Aquesta fórmula s'obté cercant el màxim absolut de la paràbola que representa la funció quadràtica[3].

b. Per obtenir el focus, procedim de la manera següent:

– El focus i el vèrtex es troben a l'eix de la paràbola. Per tant, comparteixen la coordenada de les abscisses. Aleshores, si el focus F té coordenades (x_f, y_f), sabem que

$$x_f = \frac{-b}{2a}. \tag{1.6}$$

entre circumferències de radi major que $|\overline{FP}|/2$ i centres F i P.

[3] En cursos posteriors, es pot veure que aquesta fórmula s'obté cercant el màxim local amb l'ajuda de la derivada.

– Per a trobar y_f, farem servir la propietat de reflexió de la paràbola: si la paràbola fos un mirall, la llum que entràs paral · lela a l'eix de simetria es reflexaria sempre al focus.

  Considerem el punt P de la paràbola tal que la pendent de la seva tangent és 1. Aleshores aquesta tangent estarà inclinada 45º, pel que la llum que entri paral · lel a l'eix de simetria es reflexerà cap al focus de forma horitzontal. De fet, P compartirà la coordenada de les ordenades amb F.

  Per trobar, P, simplement derivam i imposam que la derivada sigui 1. Això ens dóna que $x = \frac{1-b}{2a}$. Substituint, veim que $y = \frac{1-D}{4a}$, on $D = b^2 - 4ac$ és el discriminant de l'equació de segon grau associada. Per tant,

$$y_f = \frac{1-D}{4a}. \tag{1.7}$$

Recursos externs

1. Construcció d'una paràbola amb Geogebra: http://www.geogebratube.org/student/m1137
2. Deducció de la fórmula general d'una paràbola:
   – Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/trigonometry/conics_precalc/parabolas_precalc/v/parabola-focus-and-directrix-1

1.5 Problemes

1.5.1 Càlcul de valors

1.5.1.1 Volums i àrees

Recordatori d'àrees i volums: seccions B.1, B.2 i B.3 (pàgines 110, 112 i 114).

Exercici **49.** (El marc) Una empresa fabricarà marcs com a part del llançament d'un nou producte.

- Els marcs seran tallats com a peces d'acer i aconseguir que no pesin molt, l'àrea final del marc haurà de ser de 28 cm^2
- Dins el marc, les mesures són 11 cm × 6 cm (figura 1.13)

Quin ha de ser l'ample del marc?

Figura 1.13 El prototip del marc

Exercici **50.** (Dipòsit d'aigua) Es vol construir un dipòsit en forma de prisme de base quadrada. Per motius legals, no es pot fer el dipòsit amb una altura major que 10 m. (a.) Quina hauria de ser el costat de la base si es vol que el seu volum sigui de 1000 m^3? (b.) Si al final es construeix un dipòsit de 4 m d'amplària, quin serà el seu volum?

Exercici **51.** Un cub i una esfera tenen l'aresta i el radi iguals. Si sabem que l'àrea de l'esfera és de 400 m^2, què val l'àrea del cub?

Exercici **52.** (El safareig) Es vol construir un safareig. Per falta d'espai, no el podem fer més llarg que 5 metres. D'altra banda, per qüestions estètiques, volem que l'alçada faci un metre més que d'amplada. Amb aquestes restriccions, quin volum tendria el safareig si fes 1 metre d'amplada? Quina capacitat tendria?

Si volem que el safareig tengui una capacitat de 43.750 l, quines han de ser les seves dimensions?

Exercici **53.** (El tanc de combustible) Es vol pintar un tanc de combustible amb una pintura anticorrosiva (figura 1.14).

Figura 1.14 Tanc de combustible

a. Quina quantitat de pintura necessitarem?
b. Quin diàmetre hauria de tenir el dipòsit si volguéssim gastar 10.000 litres de pintura?

Dades necessàries: (a.) El diàmetre del dipòsit és de 5 m (b.) La seva alçada és de 10 m.

Exercici **54.** (Les piràmides egípcies) La piràmide de Keops, de base quadrada, té una altura de 146 metres i el costat de la seva base és de 230 m.

a. Si la omplíssim d'aigua, quina quantitat d'aigua hi cabria?
b. Quina quantitat de pintura necessitaríem per pintar-la?
c. En quants de metres hauríem d'acursar la piràmide per a què tengués un volum de 1000 m^3?

1.5.1.2 Caiguda lliure

La caiguda lliure consisteix en deixar anar un objecte des d'una altura determinada fins que toqui el terra. Aquest objecte només està sotmès a la força de la gravetat. Es suposa que la resistència a l'aire és nul · la.

Es suposa que l'origen de coordenades està enterra. Si deixem anar un objecte des d'una altura inicial h, la fórmula que relaciona l'altura que té l'objecte en funció del temps és:

$$s = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

on $g = 9,8 \mathrm{m/s}^2$.

Exercici **55.** Quants de segons tardarà a tocar el terra un cos que es llança des d'una altura de 20 metres? A quina alçada es trobarà el cos al cap de 2 segons?

Exercici **56.** Calculeu quan tocarà el terra una bomba que es llanci des d'una distància de 1000 metres?

Exercici **57.** Un paracaigudista es llança des de 5000 metres d'alçada. Si ha d'ejectar el paracaigudes als 1500 metres, a quina alçada es trobarà en aquest moment? Quant de temps tardarà a arribar a aquesta alçada?

1.5.1.3 Distància de frenada

La distància de frenada és la distància que recorre un vehicle fins que s'atura si inicialment anava a una certa velocitat v. Aquesta distància es pot calcular amb la fórmula:

$$d = \frac{v^2}{100},$$

on la distància resultant d serà en metres i la velocitat v estarà expressada en km/h.

En aquesta fórmula es suposa que la via on circula el vehicle no té inclinació, és a dir, que el vehicle circula per un terreny totalment horitzontal. També es suposa que el temps de reacció és instantani i que l'adherència és òptima.

La fórmula anterior es pot reescriure com

$$d = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Això suposa una regla pràctica: dividir la velocitat a la que anam entre deu i fer el seu quadrat.

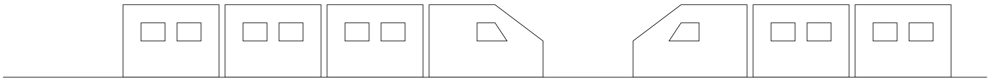
D'aquesta manera, tendríem que si anàssim a 42 km/h, aleshores hauríem de deixar, aproximadament, $4 \cdot 4 = 16$ m de distància de seguretat. Si anàssim a 100 km/h, aleshores n'hauríem de deixar $10 \cdot 10 = 100$ m.

Exercici **58.** Calculeu la distància de frenada d'un cotxe que viatja a 80 km/h

Exercici **59.** Si un cotxe va a 120 km/h quina distància necessita per frenar en sec? Tendrà temps d'evitar un accident que es troba a 100 metres?

Exercici **60.** Un motorista va a 50 km/h. A 20 metres de distància, el semàfor es posa en groc. Si frena en sec, s'aturarà abans o després del semàfor?

Exercici **61.** Xocaran aquests dos trens?



Sabem que el primer va a 20 km/h i el segon a 10 km/h i que la distància que els separa en el moment que tots dos frenen és de 200 metres.

1.5.2 Optimització

El gràfic d'una funció quadràtica $y = ax^2 + bx + c$ és una paràbola. Si $a > 0$, aleshores la paràbola està orientada cap amunt i el vèrtex és el mínim de la funció. Si $a < 0$, llavors la paràbola està orientada cap a baix i el vèrtex és el màxim.

En tots dos casos, per trobar les coordenades del vèrtex podem emprar la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$ per trobar la coordenada de les abscises. Substituint aquest valor de x a l'equació de la paràbola, obtenim el valor de la coordenada de les ordenades del vèrtex.

Trobar el vèrtex o el mínim d'una funció quadràtica es diu *optimitzar* la funció quadràtica.

Exemple **4.** Amb 100 metres de tanca, quines són les dimensions del corral d'àrea màxima que pot construir un granjer si el seu graner proporciona un costat del corral, tal com mostra el dibuix (figura 1.15)

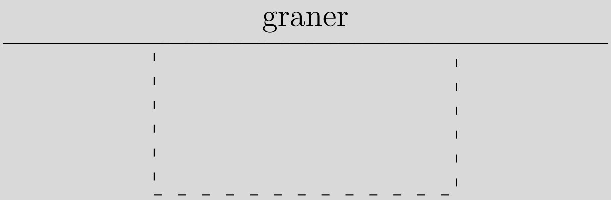


Figura 1.15 Esquema del corral

Solució

Diem x a l'amplada del corral (figura 1.16). Aleshores la seva amplada és $100 - 2x$. Per tant, la funció que representa l'àrea és $A = (100 - 2x) \cdot x = -2x^2 + 100x$.

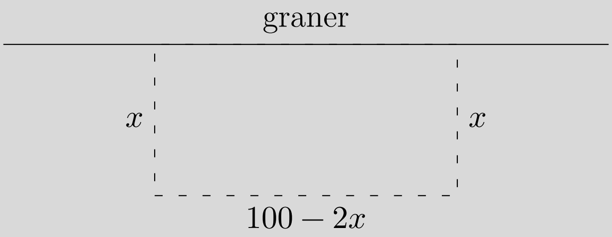


Figura 1.16 Esquema del corral amb les mesures

Volem trobar el màxim d'aquesta funció. Per tant, volem trobar el seu vèrtex. El vèrtex de la funció es troba a $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot 2} = 25$ i $A = -2 \cdot 25^2 + 100 \cdot 25 = 1250$. Per tant, el corral d'àrea màxima té una amplada de $x = 25$ metres, 50 metres de llarg i una àrea de 1250 m^2.

Exercici **62.** (el preu de les bicicletes) Es vol dissenyar un nou model de bicicletes. Basant-nos en altres models de bicicleta i en la pròpia experiència es sap que la funció de demanda és

$$\text{Unitats venudes} = 70.000 - 200 \cdot P,$$

on P és el preu de la bicicleta.

a. Quin serà el benefici màxim que podem obtenir? (noteu que el benefici serà la multiplicació del preu de venda de cada unitat pel nombre d'unitats venudes).

b. Fins quan tendrem beneficis (no perdre en el negoci)?

Exercici **63.** (el preu de l'entrada) A un municipi es vol programar un concert d'estiu. Es decideix contractar a un grup famòs i que aquest toqui a l'estadi de futbol de la localitat, en previsió de la considerable afluència, que té una capacitat de 10.000 persones. Es convoca un ple extraordinari a l'ajuntament per debatre un únic punt: "Quin ha de ser el preu de l'entrada del concert".
Després de molt de discutir es decideix fixar el preu que faci màxim els doblers recaptats. Però l'únic que es sap és que: quan més car sigui el preu de l'entrada més poca gent la comprarà. Podeu ajudar a trobar aquest preu?

Podeu suposar que per cada dos euros de pujada, baixarà un 10% el nombre de vendes. I que si l'entrada és gratuïta, aleshores l'estadi s'omplirà.

Exercici **64.** (el vallat $\star$) Aprofitant una paret mitgera, es vol tancar amb filferro els dos terrenys rectangulars que hi ha a banda i banda de la paret (figura 1.17) de manera que la seva superfície sigui la mateixa. Si es disposa de 100 m de filferro i es vol que l'àrea dels dos terrenys sigui màxima, com han de ser les seves dimensions?

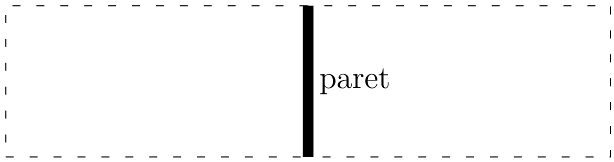


Figura 1.17 Terrenys rectangulars a banda i banda de la paret

Exercici **65.** (la capsa de cartró) Els costos de producció d'una capsa de cartró depenen de la seva àrea: cada centímetre quadrat de capsa costa 0,01 €. Es vol fabricar una capsa ortoèdrica com s'indica a la figura següent (figura 1.18), tenint en compte que els estàndards imposen que la mitjana aritmètica de l'amplada i l'alçada sigui igual a 50 cm. Quin serà el cost màxim? Quines mesures tendria la capsa en aquest cas?

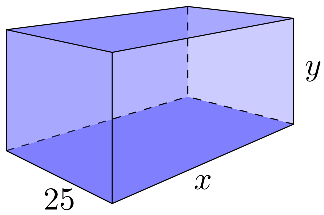


Figura 1.18 Esboç de la capsa de cartró

Exercici **66.** Es vol un recipient en forma d'ortoedre de tal manera que el seu volum sigui màxim. L'única restricció que és un costat ha de mesurar 10 cm i els altres dos costats sumats són iguals a 25 cm. Quines són les mesures d'aquest ortoedre?

Exercici **67.** (l'edifici de menor cost) Es vol construir un magatzem amb el menor cost possible. Es sap que:

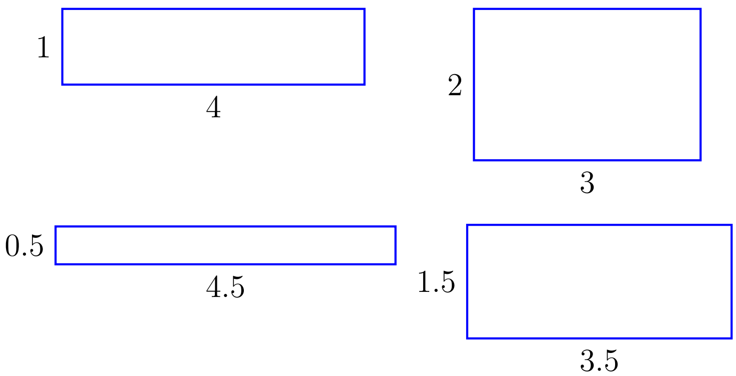
a. El magatzem ha de tenir 20 metres de façana

b. Cada metre que es construeix en alçada costa 25 € i cada metre que es construeix en amplada costa 5 €

Com han de ser la fondari i l'alçada del magatzem si el constructor vol que li costi exactament 5000 € i vol maximitzar el seu volum?
Quin volum màxim s'aconseguiria? Quants de litres hi cabrien?

Exercici **68.** Existeixen rectangles diferents amb el mateix perímetre? Raoneu la resposta o poseu-ne exemples.

Solucions
Sí. Vet aquí alguns exemples de rectangles de perímetre 10:



Exercici **69.** Trobeu el rectangle d'àrea màxima que té com a perímetre 2500 cm.

Exercici **70.** (el moment de vendre) Una cooperativa agrícola ha de vendre els tomàquets el més aviat possible, quan els preus són alts i el deteriorament és baix. Ara mateix, la cooperativa té 25 tones a la seva disposició i pot afegir-ne dues tones a la setmana d'espera. El benefici actual és de 250 € per tona, però es redueix a raó de 15 € per tona per cada setmana que es retarda. Quan s'han de vendre els tomàquets per tenir el benefici màxim?

Exercici **71.** (la tarifa de transports) Una companyia de transports cobra 1,25 € per trajecte. Actualment té una mitjana de 10.000 usuaris per dia. L'empresa necessita per augmentar els ingressos, però estima que, per cada 0,10 € d'augment en la tarifa, l'empresa perdrà 500 usuaris. Què ha de cobrar l'empresa per maximitzar els ingressos?

Exercici **72.** (els filferros) Un tros de filferro de 20 centímetres de llarg es talla en dues peces i cada peça es doblega per formar un quadrat. Determineu la longitud de les dues peces de manera que la suma de les àrees dels dos quadrats sigui mínima.

(Solucions: 10 cm cada tros)

Exercici **73.** Al cercle següent (figura 1.19), volem fer-li un forat rectangular de manera que surti un *donut oblic* d'àrea mínima (per tenir el mínim de despeses). Per raons estètiques, volem impossar les dimensions del rectangle no siguin molt grans. En concret, $x + y = 10$ cm. Trobeu les dimensions del rectangle, si sabem que el cercle té un radi de 20 cm.

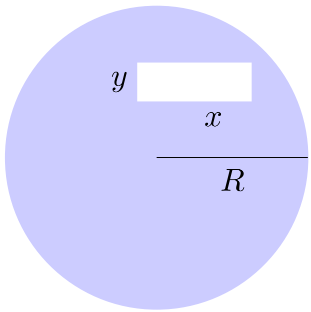


Figura 1.19 Foradar una circumferència

Exercici **74.** A una planxa circular de radi 15 cm volem fer-li un forat rectangular de manera que el forat sigui màxim (figura 1.20). Com han de ser les dimensions del forat si sabem que $2x + y = 1$?[4]

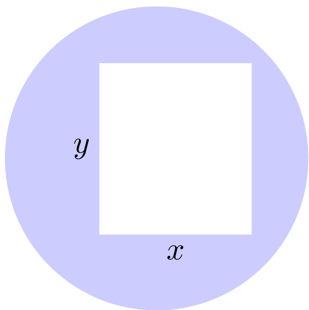


Figura 1.20 Foradar una planxa

Exercici **75.** Volem fer màxima l'àrea d'un triangle rectangle del qual sabem que la hipotenusa mesura 10 cm i que el seu perímetre fa 100 cm. Què valen els seus catets?

[4] Si no imposéssim cap condició, obtindríem el quadrat inscrit.

49 L'àrea de l'acer abans de tallar serà:

$$\begin{aligned} A &= (11 + 2x) \times (6 + 2x) \text{ cm}^2 \\ &= 66 + 22x + 12x + 4x^2 \\ &= 4x^2 + 34x + 66 \end{aligned}$$

L'àrea de l'acer després de retallar d'enmig el tros d'11×6:

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 + 34x + 66 - 66 \\ &= 4x^2 + 34x. \end{aligned}$$

Resolem-ho gràficament (figura 1.21).

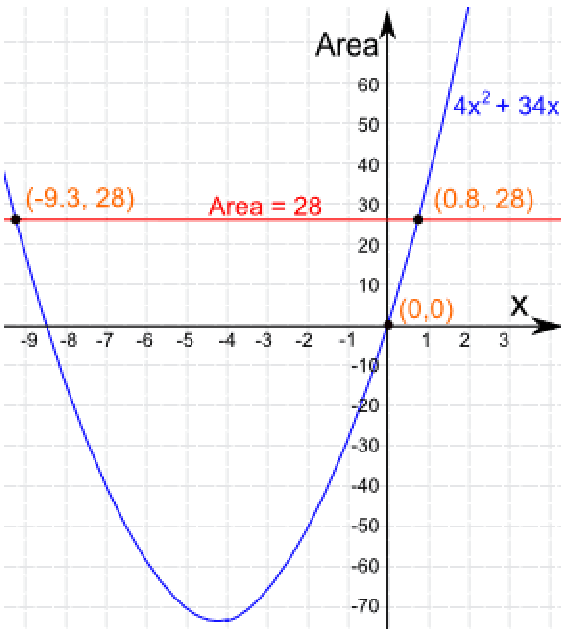


Figura 1.21 Representació gràfica de $y = 4x^2 + 34x$

L'àrea necessària de 28 cm^2 es mostra en forma de línia horitzontal. L'àrea és igual a 28 cm^2 aproximadament quan $x = -9,3$ o $x = 0.8$. El valor negatiu no té sentit. Així que $x = 0.8$ cm.

58 Aplicant la fórmula, tenim que la distància de frenada serà de $d = 80^2/254 \simeq 25,19$m.

62 (a.) El benefici vendrà donat per Unitats venudes$\cdot$Preu $= 70.000P - 200P^2$. Per tant, el que volem és maximitzar el benefici. Com que això és una

funció quadràtica, tenim que hem de cercar el vèrtex de la paràbola: $P = -70.000/(-400) = 175$. Per tant, hem de fixar el preu en 175 €. Per aquest preu tenim que el benefici serà $70.000 \cdot 175 - 200 \cdot 175^2 = 6.125.000$€.
(b.) Si volem tenir beneficis, volem que la funció benefici sigui major o igual que zero. Per això basta trobar els punts de tall de la paràbola amb l'eix de les abcisses: $70.000x - 200x^2 = 0$ si, i només si, $x = 0$ o $x = 350$. Ara hem d'estudiar el signe de la funció benefici, donant valors als intervals corresponents: $\star$ Si $x < 0$, aleshores $y < 0$ $\star$ Si $0 \leq x \leq 350$, aleshores $y \geq 0$ $\star$ Si $x > 350$, aleshores $y < 0$ Per tant, tendrem beneficis fins a que venguem per sobre de 350.
Podem veure la representació gràfica de la funció benefici en la figura 1.22.

63 Hem de maximitxar la funció $f(p) = p \cdot (10000 - \frac{10}{100}p)$, on p és el preu de l'entrada. 50.000 € és la solució.

64 Si x, y són la llargària i l'amplada del terreny de l'esquerre, aleshores les mesures vendrien donades per la figura 1.23. Com que només es disposa de 100 m de filferro, tenim la restricció de què $4x + 2y = 100$, és a dir, $2x + y = 50$. L'àrea total de la figura és $A = 2xy$.

Per tant, $A = 2x(50 - 2x) = 100x - 4x^2$. Volem trobar el màxim d'aquesta funció, és a dir, el seu vèrtex, que es troba a $x = 12,5$. En aquest cas, $A = 625$ m^2. Substituint $y = 50 - 2 \cdot 12,5 = 25$. Per tant, cada terreny és un rectangle de $12,5$ m $\times$ 25 m.

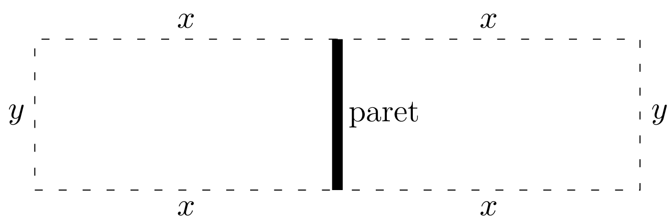


Figura 1.23 Mesures dels terrenys rectangulars

65 $A = 50x + 4xy$; Cost màxim: aproximadament $0,01 \cdot 12656,3 = 126,56$; Mesures: $56,25$ cm $\times$ $43,75$ cm.

66 El recipient farà 25 cm $\times$ 25 cm. Per tant, serà un cub.

67 Si anomenem x a la fondari de l'edifici i y a la seva altura (figura 1.24), tenim que el volum $V = 20xy$. D'altra banda, la imposició del cost, ens indica que $5x + 25y = 5000$. Per tant, $y = \frac{1000-x}{5}$. Pel que hem de maximitzar $V = 20x\frac{1000-x}{5} = 4x(1000 - x) = 4000x - 4x^2$. El màxim s'assoleix a $x = 500$ m. Per tant, l'edifici fa 500 m $\times$ 100 m $\times$ 20 m.

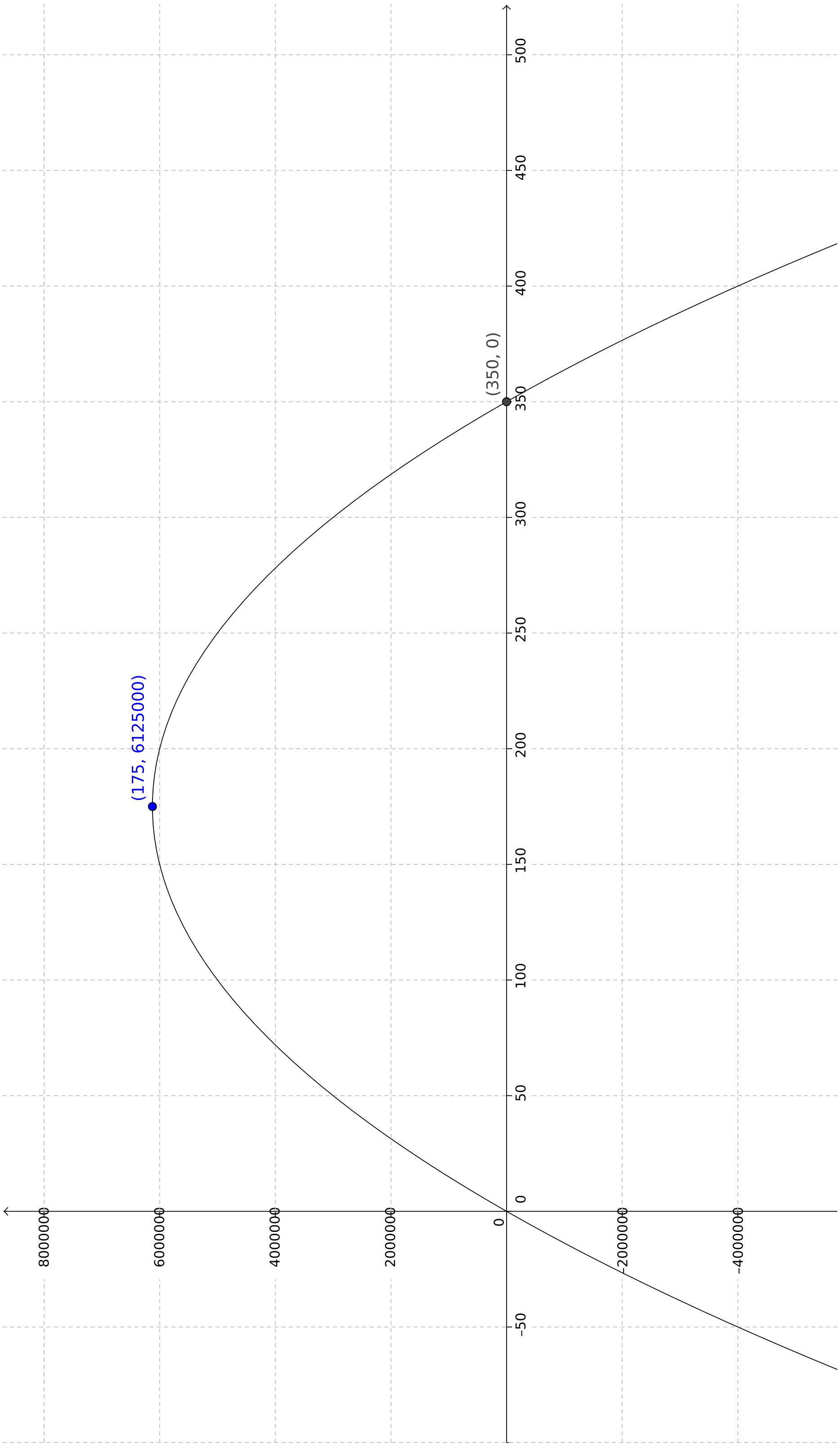


Figura 1.22 Representació gràfica de la funció benefici $B = 70.000P - 200P^2$

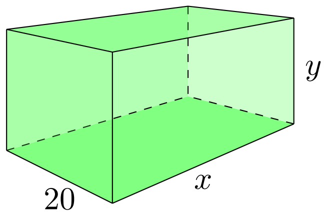
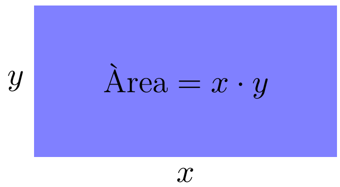


Figura 1.24
Dimensions de l'edifici

El volum és igual a $V = 1.500.000$ m^3, que són 1.500.000.000 l.

69 Un rectangle qualsevol té dimensions x i y (figura 1.1). Si el seu perímetre és de 2500 cm^2, tenim que $2x+2y = 2500$. Per tant, $y = 1250-x$. Substituint a l'expressió de l'àrea tenim que $A = x \cdot (1250 - x) = 1250x - x^2$.

Com que volem maximitzar l'àrea d'aquesta funció quadràtica, volem trobar el seu vèrtex. Aquest es troba a $x = 625$ cm i $A = 390.625$ cm^2. Per últim, $y = 1250-625 = 625$ cm. Per tant, es tracta d'un quadrat de costat 625 cm.



Taula 1.1 Rectangle qualsevol

70 Sobre les 2 setmanes

71 Ha d'incrementar en 0,75 € el bitllet, passant a cobrar 2,00 €

73 L'àrea a minimitzar és igual a $A = \pi R^2 - xy = \pi R^2 - x(10-x) = 400\pi - 10x+x^2$. El mínim s'assoleix a $x = 5$. Per tant, les dimensions del rectangle són 5 cm $\times$ 5 cm.

74 Solució: que el forat sigui màxim vol dir que l'àrea restant ha de ser mínima. Per tant, hem de minimitzar $A = \pi 15^2 - xy = \pi 15^2 - x(1-2x) = 15^2\pi - x + 2x^2$. Les dimensions serien $0,25$ cm $\times$ $0,5$ cm.

75 Hem de maximitzar l'àrea $A = xy = x(100 - 10 - x)$. Per un triangle isòsceles de costats 45 cm obtenim el màxim.

2 Funcions i gràfiques

2.1 Introducció

En el tema anterior hem vist que dues magnituds podien estar relacionades. Per exemple, en el volum d'un ortoedre d'altura 8 m i base quadrangular, hem pogut relacionar *el seu volum* amb *el costat de la base*, de manera que hem obtingut una fórmula:

$$V = 8c^2$$

Si substituïm el costat per un nombre concret, calcularem el seu volum. Per exemple, si el costat fes 10 m, aleshores el volum valdria $V = 8 \cdot 10^2 = 8 \cdot 100 = 800 \text{ m}^3$. Això passa en general: per a un valor de la c, tenim un valor de la V.

Ara bé, existeixen relacions entre magnituds que no compleixen aquesta condició: no hi ha una correspondència tan inequívoca. Per exemple, el pes i l'alçada d'una persona estan relacionades. Una persona que medeix $1,80$ m, no pot pesar el que es vulgui: com a mínim existeixen limitacions de pes. La coraça dels óssos limita el pes per avall. I el pes que resisteixen els óssos i la pressió que suporta el cor poden ser condicionants que fan que no es pugui tenir un pes arbitràriament gran. Ara bé, no existeix cap raó per la qual una persona de $1,80$ m hagi de tenir un pes determinat: hi ha persones d'aquesta alçada que fan 80 kg, d'altres que en fan 75, etc. En definitiva, el pes i l'alçada estan relacionats, però aquesta relació no és "a un pes li correspon una única alçada".

Una *funció* serà una relació entre dues magnituds de manera que per a un valor d'una variable li correspon un *únic* valor de l'altra.

Vegem dos exemples:

a. Suposem que tenim dos conjunts: el conjunt de persones de tot el món i el conjunt de DNI (o equivalents: passaports, documents d'estrangeria, etc.):

   Suposem que tenim l'assignació "a cada DNI li fem correspondre la persona que té el DNI x" (figura 2.1). És això una funció?

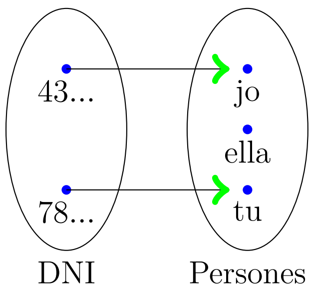


Figura 2.1
y = persona que té el DNI x

Clarament és que sí, ja que qualsevol sistema d'identificació que es presti vol que, per un únic DNI, li correspongui una sola persona (que el tengui).

Fixau-vos que hi ha persones que no tenen DNI (per exemple els indis de l'Amazones), però això no contradiu la nostra asserció: per a cada x, només tenim una y. Hi pot haver y que no tenen x. Una cosa no exclou l'altra.

b. Suposarem ara que tenim el conjunt de les persones de tot el món i el conjunt de tots els noms possibles (amb cognoms inclosos) (figura 2.2).

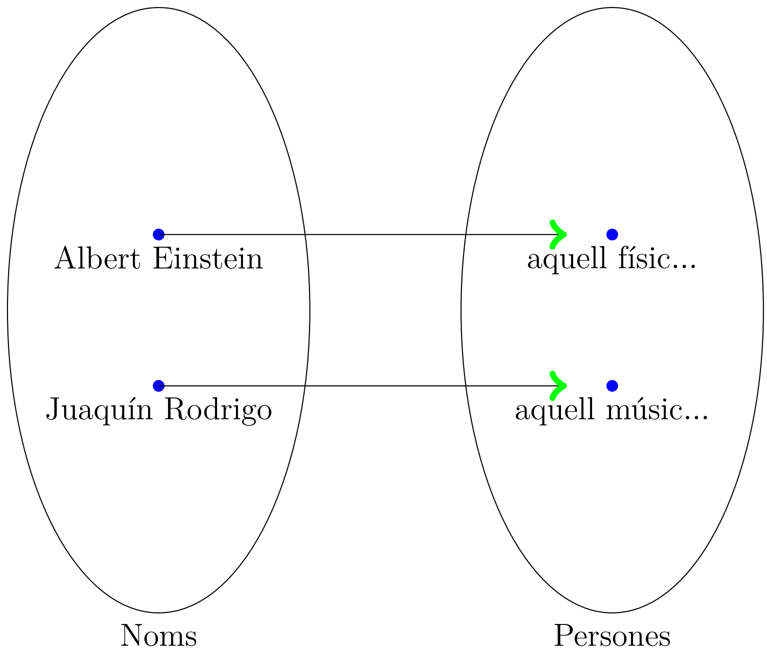


Figura 2.2 y = persona que té el nom x

Per a cada nom, triem “la persona que té el nom x”. És això una funció? Clarament no, ja que un nom no dóna lloc a una única persona. Existeixen moltes persones amb el mateix nom: per exemple Juan García García.

Penseu que l’ordre aquí és molt important: està clar que una persona té un sol nom i només un (figura 2.3). Però l’anterior és que un nom no té una sola persona. Per tant, la correspondència *inversa* que associa “a cada persona, el seu nom”, sí que és una funció.

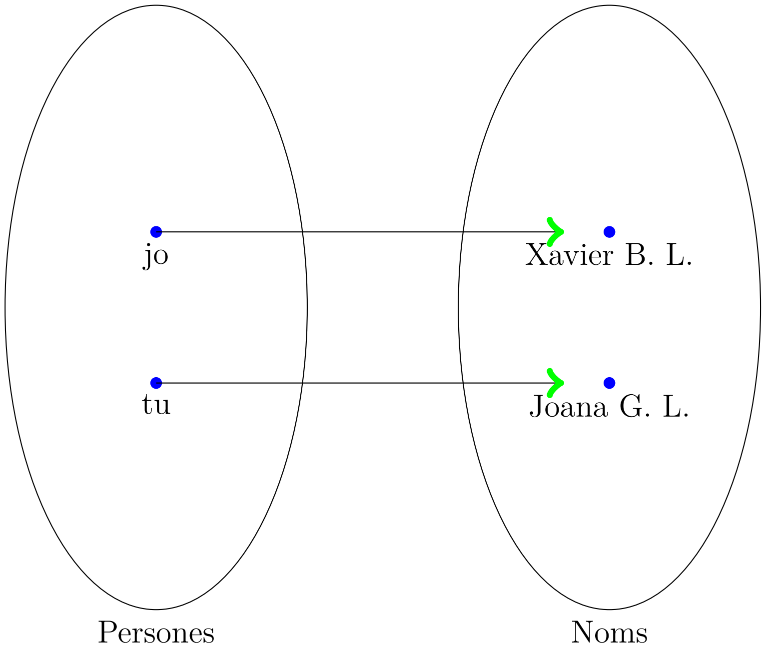


Figura 2.3 $y =$ el nom de la persona x

2.2 Concepte de funció

Una ***funció*** és una relació entre dues magnituds o variables numèriques, x i y, de manera que a cada valor de x li correspon, com a màxim, un *únic* valor de y.

x → és la ***variable independent***

y → es diu la ***variable dependent*** (depèn dels valors que pren x)

Exercici **76.** Digueu, raonant la resposta, si la relació entre els parells de magnituds següents és una funció o no ho és.

a) El pes d'una persona i la seva estatura.
b) El pes d'un barril d'oli i la quantitat d'oli que conté.
c) Un nombre i el seu doble.
d) La longitud del costat d'un quadrat i el seu perímetre.
e) La nota treta a un examen i el nombre d'hores que s'ha estudiat per aquest.
f) Un nombre i la seva arrel quadrada.
g) El nombre d'obrers i el temps que tarden a pintar una paret.

Exercici **77.** Digueu perquè la relació entre les variables següents és una funció o no:

a) El nombre de quilògrams comprats de taronges i els euros que ens costen.
b) L'edat d'una persona i la seva altura.
c) La velocitat d'un cotxe i el temps que tarda per anar de Binissalem a Palma.
d) Un nombre positiu i la seva arrel cúbica
e) Un nombre i el seu oposat.
f) La base d'un rectangle i el seu perímetre.

Identifiqueu, en cada apartat anterior, les variables dependents i independents.

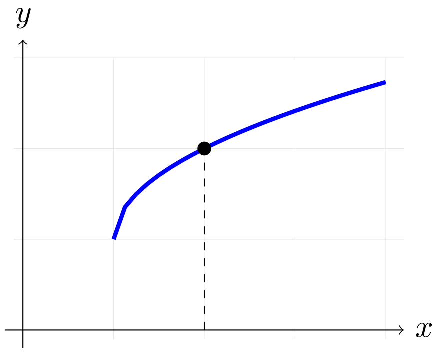
Exercici **78.** Digueu si les relacions següents són o no funcions:

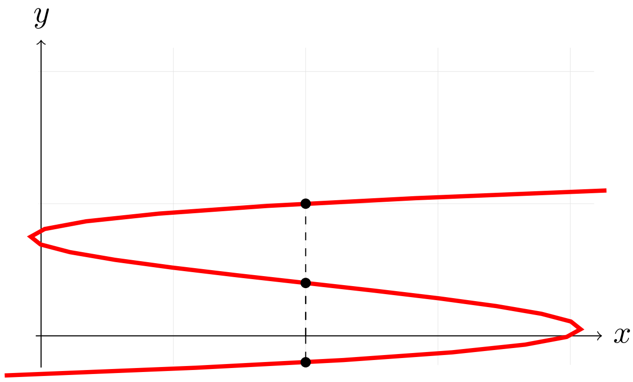
a) El nombre de litres d'aigua i els quilògrams de farina per fer la massa del pa.
b) L'àrea d'una regió de platja i el nombre de granets d'arena que conté.
c) Les hores de feina i el sou guanyat, per un treballador que treballa per hores.
d) L'àrea d'un rectangle i la longitud de la seva base.
e) El nombre de gallines d'una granja i els quilògrams de pinso que mengen.

f) La posició que ocupem a una coa del cinema i el temps que tardem per poder comprar l'entrada.

g) L'hora del dia i el nombre d'anuncis a la televisió

Com s'identifica una funció mitjançant la seva representació gràfica?

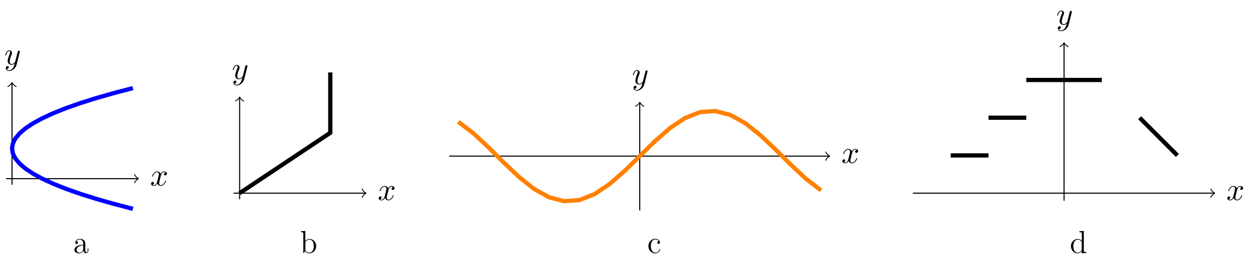




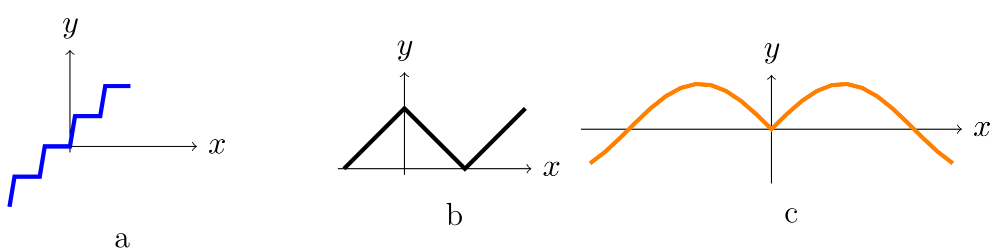
Si algun valor de x li correspon *més d'un valor de* y, aleshores la gràfica ***no*** correspon a una funció (es diu *relació*).

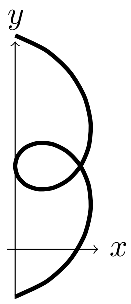
Si a x li correspon *només* un valor de y, aleshores la gràfica és d'una funció.

Exercici **79.** Indiqueu quines de les gràfiques següents corresponen a funcions i quines no.

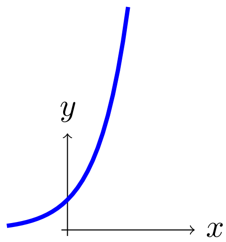


Exercici **80.** Digueu quines d'aquestes gràfiques corresponen a funcions. En cas de no ser-ho, expliqueu el perquè.

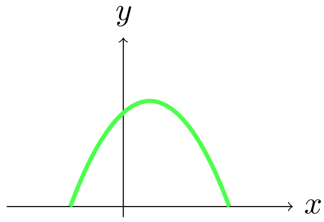




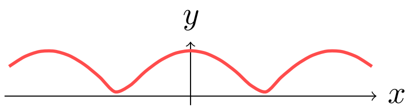
d



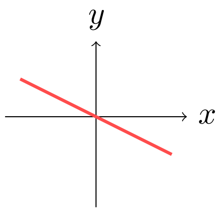
e



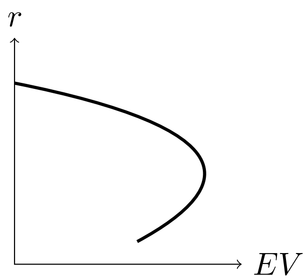
f



g

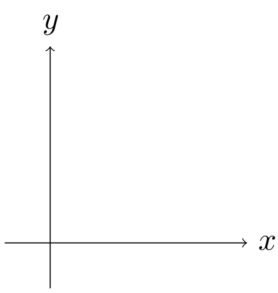


h

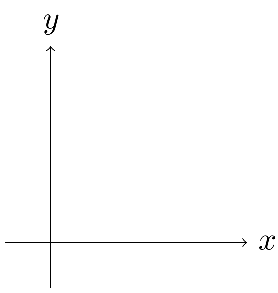


i

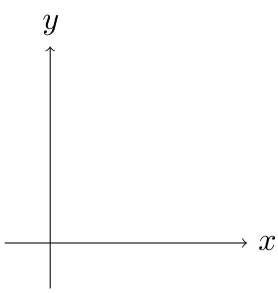
Exercici **81.** Dibuixeu dues gràfiques corresponents a una funció i dues gràfiques que no ho siguin.



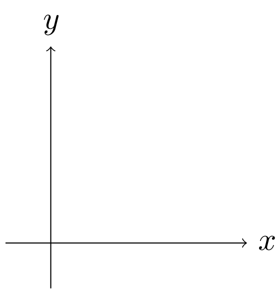
a



b

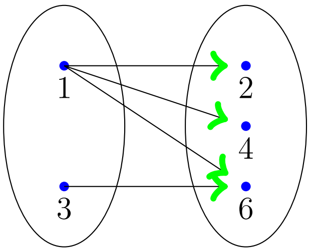


c

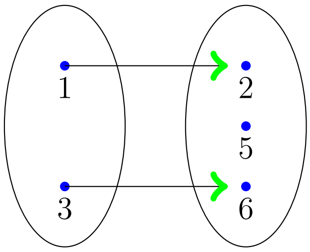


d

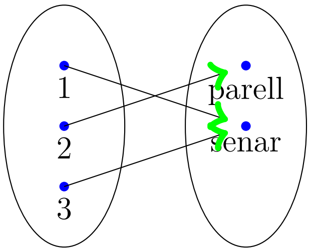
Exercici 82. Digueu quines de les correspondències entre conjunts són funcions i quines no



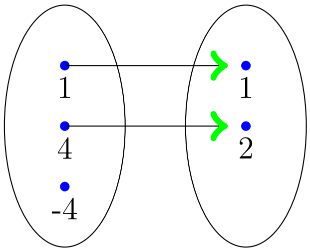
x menor que y



El doble de x

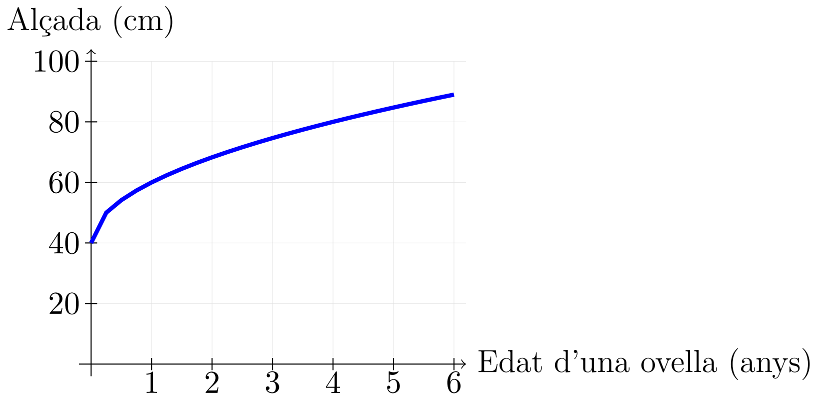


Ser parell



Arrel quadrada positiva

Exercici 83. A partir del gràfic següent:



responeu:

a. Quines són les variables del gràfic?

b. Quina és la variable dependent i la variable independent?

c. Quina escala s'utilitza per a cada variable?

d. Quants centímetres faria una ovella de 4 anys?

2.3 Domini de definició

2.3.1 Introducció

Exercici **84.** Representeu gràficament les funcions següents.

Per fer-ho, feis una taula de valors.

- Recordeu que per fer la taula de valors, donam valors a x, normalment de forma simètrica ($x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., -1, -2, -3, -4, -5, -6, ...$) i calculem els valors corresponents de y.
- Podeu fer servir la plantilla per agilitzar el temps (figura 2.4).

a. $y = x + 2$

b. $y = 20/x$

c. $y = -10/x$

d. $y = \sqrt{x}$

e. $y = \frac{10}{x+2}$

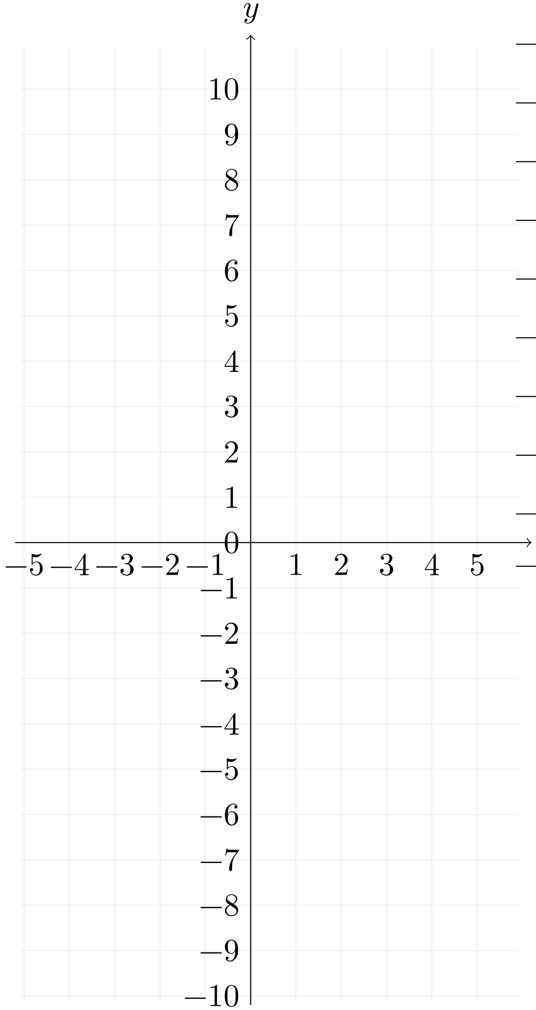
f. $y = x^3 - 1$

g. $y = \sqrt{x+1}$

h. $y = \sqrt{2x-1}$

Fórmula:

x	y
0	
1	
-1	
2	
-2	
3	
-3	
4	
-4	



Fórmula:

x	y
0	
1	
-1	
2	
-2	
3	
-3	
4	
-4	

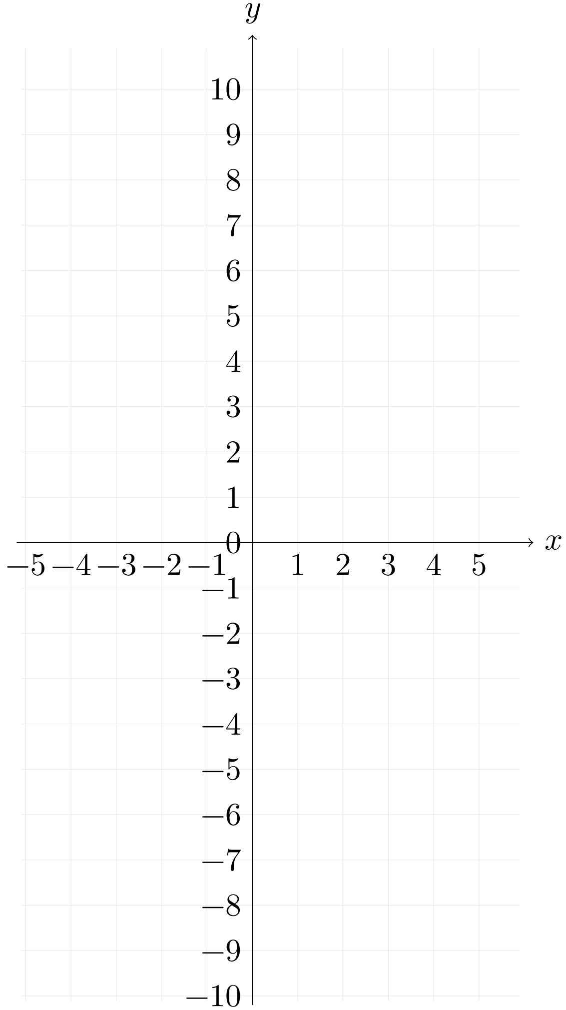


Figura 2.4 Plantilla de representació gràfica

Reflexió

a. Quan representem, totes les x tenen un valor de y associat?

b. El conjunt de nombres que tenen un valor de y, s'anomena *Domini de definició* de la funció

c. Quins són els dominis de definició de les funcions anteriors? Expressa-ho amb les teves paraules

d. Matemàticament els dominis s'expressen amb *intervals* (pàgines següents). Expresseu els dominis anteriors en forma d'intervals

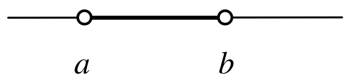
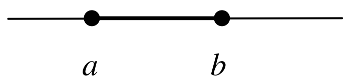
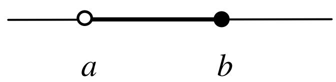
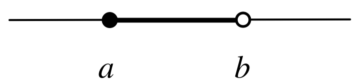
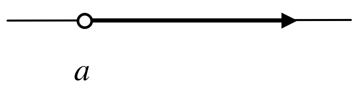
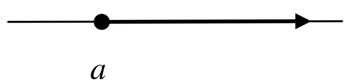
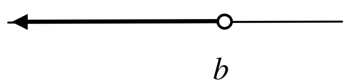
e. Podeu fer els exercicis d'intervals?

Intervals

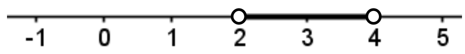
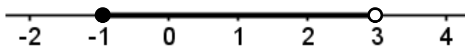
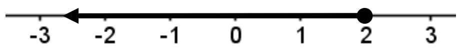
Un **interval** és un conjunt de nombres reals que es corresponen amb els punts d’un segment o una semirecta de la recta real. Els intervals que es corresponen amb una semirecta s’anomenen **intervals infinits o semirectes**.

Els intervals poden ser **oberts**, si els punts extrems no s'inclouen en l'interval, **semioberts**, si només un dels punts extrems s'inclou en l'interval, **o tancats**, si tots dos punts extrems s'inclouen en l'interval.

En el quadre següent es mostren els diferents tipus d’intervals:

Interval obert (a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,a<x<b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre a i b, excloent-ne a i b .
Interval tancat $[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,a\le x\le b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre a i b, incloent-hi a i b.
Interval semiobert $(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,a<x\le b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre a i b, excloent-ne a i incloent-hi b.
Interval semiobert $[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,a\le x<b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre a i b, incloent-hi a i excloent-ne b.
Semirecta oberta $(a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>a\}$		Conjunt format per tots els nombres reals més grans que a.
Semirecta tancada $[a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\ge a\}$		Conjunt format per tots els nombres reals més grans o iguals que a.
Semirecta oberta $(-\infty,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals més petits que b.
Semirecta tancada $(-\infty,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\le b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals més petits o

			iguals que b.

Exemples: Completa les dues últimes files.			
Interval obert $(2,4)$	$\{x\in\mathbb{R}/2<x<4\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre 2 i 4, excloent-ne 2 i 4.
Interval semiobert $[-1,3)$	$\{x\in\mathbb{R}/-1\leq x<3\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre -1 i 3, incloent-hi -1 i excloent-ne 3.
Semirecta tancada $(-\infty,2]$	$\{x\in\mathbb{R}/x\leq 2\}$		Conjunt format per tots els nombres més petits o iguals que 2.
Interval semiobert $(-3,0]$			
Semirecta oberta $(5,+\infty)$			

Quan un nombre és dintre d'un interval donat, diem que pertany a l'interval i ho escrivim:

$x\in(a,b)$ → Exemple: $2\in(1,5]$

Si el nombre no és dintre de l'interval, diem que no pertany a l'interval i ho escrivim:

$x\notin(a,b)$ → Exemple: $2\notin(3,+\infty)$

La recta real també la podem representar en forma d'interval infinit $(-\infty,+\infty)$.

1. Classifica els nombres següents:

a) $-3{,}5231111...$

b) $-\sqrt{16}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $5{,}15151515...$

e) $1{,}38$

f) $\sqrt{8}+\sqrt{4}$

g) $-\sqrt{15}$

h) $1{,}312534...$

i) $-\frac{17}{12}$

j) $\frac{7}{2}$

k) $\pi-1$

l) $e+1$

m) -8

n) $-51{,}324$

o) $\frac{11}{3}$

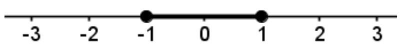
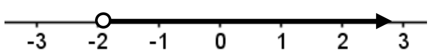
p) $5{,}211$

2. Representa en la recta real $\sqrt{10}$ i $-\sqrt{13}$

3. Ordena de menor a major:

2,45; 2,99; $2{,}\widehat{9}$; $-\sqrt{2}$; -1,42; 0; $\frac{5}{2}$

4. Completa el quadre:

Interval tancat $[-1,1]$	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\leq x\leq 1\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre -1 i 1, incloent -1 i 1.
			
Semirecta oberta $(-\infty,0)$			
Interval semiobert $(-5,0]$			
			Conjunt format per tots els nombres reals més grans que -5 i més petits que -3.
	$\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -4\}$		

Solucions

1. **a)** Racional, decimal periòdic mixt.

b) Racional, enter negatiu.

c) Racional, decimal periòdic mixt.

d) Racional, decimal, periòdic pur.

e) Racional, decimal exacte.

f) Irracional.

g) Irracional.

h) Irracional.

i) Racional, decimal periòdic mixt.

j) Racional, decimal exacte.

k) Irracional.

l) Irracional.

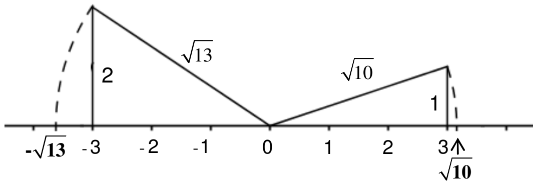
m) Racional,enter negatiu.

n) Racional, decimal exacte.

o) Racional, decimal, periòdic pur.

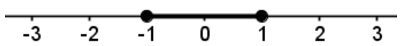
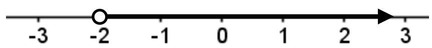
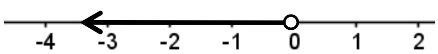
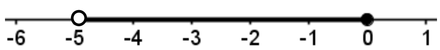
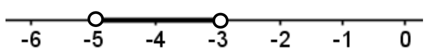
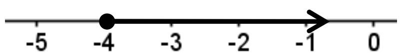
p) Racional, decimal exacte.

2.



3. $-1{,}42 < -\sqrt{2} < 0 < 2{,}45 < \dfrac{5}{2} < 2{,}99 < 2{,}\widehat{9}$

4.

Interval tancat $[-1,1]$	$\{x\in\mathbb{R}/-1\le x\le 1\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre -1 i 1, incloent-hi -1 i 1.</u>
Semirecta oberta $(-2,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}/x>-2\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans que -2.</u>
Semirecta oberta $(-\infty,0)$	$\{x\in\mathbb{R}/x<0\}$		Conjunt format per tots els nombres <u>més petits que 0.</u>
Interval semiobert $(-5,0]$	$\{x\in\mathbb{R}/-5<x\le 0\}$		Conjunt format per tots els nombres reals compresos entre -5 i 0, incloent-hi 0 i excloent-ne -5.
Interval obert $(-5,-3)$	$\{x\in\mathbb{R}/-5<x<-3\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans que -5 i més petits que -3.</u>
Semirecta tancada $[-4,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}/x\ge -4\}$		Conjunt format per tots els nombres <u>més grans o iguals que -4.</u>

Solucions dels exercicis de la teoria

Classificació de nombres reals

a) Irracional.

b) Racional, decimal periòdic mixt.

c) Racional, decimal exacte.

d) Racional, decimal exacte.

e) Racional, decimal periòdic pur.

f) Irracional.

g) Racional, enter, natural.

h) Racional, decimal periòdic pur.

i) Racional, decimal periòdic pur.

j) Racional, decimal periòdic mixt.

k) Irracional.

l) Irracional.

m) Racional, enter negatiu.

n) Racional, enter, natural.

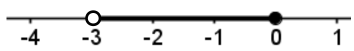
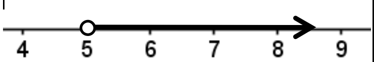
o) Racional, decimal exacte.

p) Irracional.

Ordre

$e < 3{,}14 < \pi < 5{,}3 < 5{,}36 < 5{,}365 < 5{,}3\widehat{6} < \sqrt{29} < \dfrac{17}{3}$

Intervals

Interval semiobert $(-3,0]$	$\{x \in \mathbb{R} / -3 < x \le 0\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre -3 i 0, excloent-ne el -3 i incloent-hi el 0.</u>
Semirecta oberta $(5,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > 5\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans que 5.</u>

Aproximacions

Valor exacte	Aproximació per defecte	Aproximació per excés
5,856712...	*5,8*	*5,9*

Valor exacte	Nombre de xifres decimals de l'aproximació	Aproximació per truncament	Aproximació per arrodoniment
1,349612	Tres (fins a les mil·lèsimes)	*1,349*	*1,350*
9,2548	Dues (fins a les centèsimes)	*9,25*	*9,25*

Exercici **85.** Calculeu el domini de definició de les funcions següents:

a. $f(x) = \sqrt{-x}$

b. $f(x) = \sqrt{4x-4}$

c. $f(x) = \frac{-7}{-5x+10}$

d. $f(x) = \frac{6}{2x+8}$

e. $f(x) = \frac{1}{-2x+4}$

f. $f(x) = \frac{-x-1}{x^2-4}$

g. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

h. $f(x) = x^2$

i. $f(x) = 3x^3 + 2$

j. $f(x) = \frac{x^2}{2}$

k. $f(x) = \frac{3x}{2}$

l. $f(x) = \frac{2}{x}$

m. $f(x) = \frac{x}{2x-2}$

n. $f(x) = \sqrt{2x+6}$

o. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

p. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

Exercici **86.** Digueu si $x = 0$, $x = 1$ i $x = -2$ pertanyen al domini d'aquestes funcions:

a. $y = \frac{1}{2x}$

b. $y = \frac{2}{2x-2}$

c. $y = \sqrt{x+2}$

d. $y = \sqrt{-2x-1}$

e. $y = 5x + 2$

f. $y = 5x^3 - x$

g. $y = 2x + \frac{1}{x}$

h. $y = 4 - \sqrt{x}$

i. $y = 7 - x + x^2$

j. $y = \frac{3x}{x}$

k. $y = \sqrt{-2x}$

l. $y = \sqrt{5x-10}$

m. $y = \sqrt{x^2-1}$

n. $y = \frac{1}{x^2}$

o. $y = \frac{5}{1-x^2}$

p. $y = \frac{6}{x^3-1}$

Exercici **87.** Inventeu-vos una funció que compleixi:

a. $x = 3$ no es troba al domini

b. Tots els nombres pertanyen al domini

c. Només pertanyen al domini els nombres positius

d. $x = 5$ no pertany al domini

2.3.2 Relacions entre els elements d'una funció

Activitat **88.** (*Emparellament de domini, gràfica, expressió i taula de valors*) . Activitat en grup.

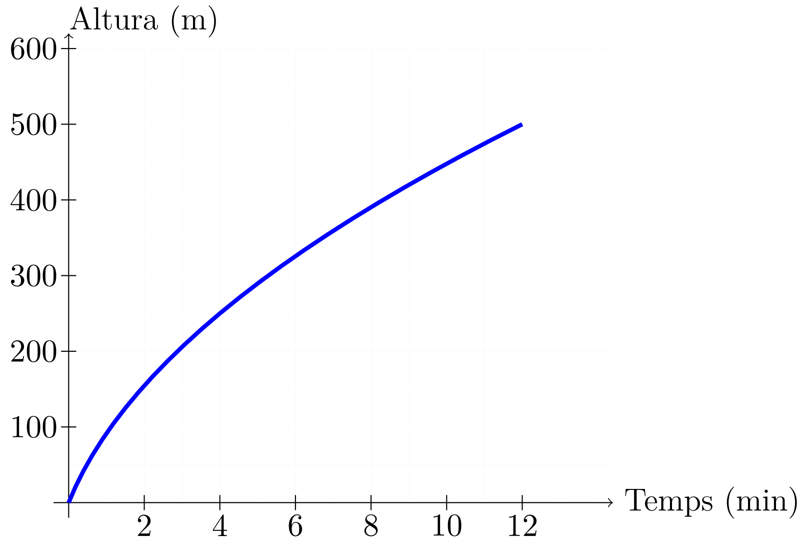
- Feis grups de 3 persones
- El professor vos passarà unes fitxes retallables (vegi's Emparellament dominis, gràfiques, expressions i taules de valors). Hi pot haver 4 tipus de fitxes:
  - Gràfica
  - Domini
  - Taula de valors
  - Expressió algebraica o definició *literària* de la funció
- Heu de relacionar cadascuna de les fitxes

2.4 Gràfica d'una funció

2.4.1 Gràfic → interpretació

Activitat **89.** (*Interpretant gràfiques de distància-temps*) . Activitat en grup. (vegi's el fitxer específic de l'activitat).

Exercici **90.** Es molla un globus que s'eleva i, a l'assolir certa altura, rebenta. La gràfica següent representa l'altura, amb el pas del temps, en la que es troba el globus fins que rebenta.



a. A quina altura rebenta el globus?

b. Quan tarda en rebentar des de que l'amollam?

c. Quines variables intervenen?

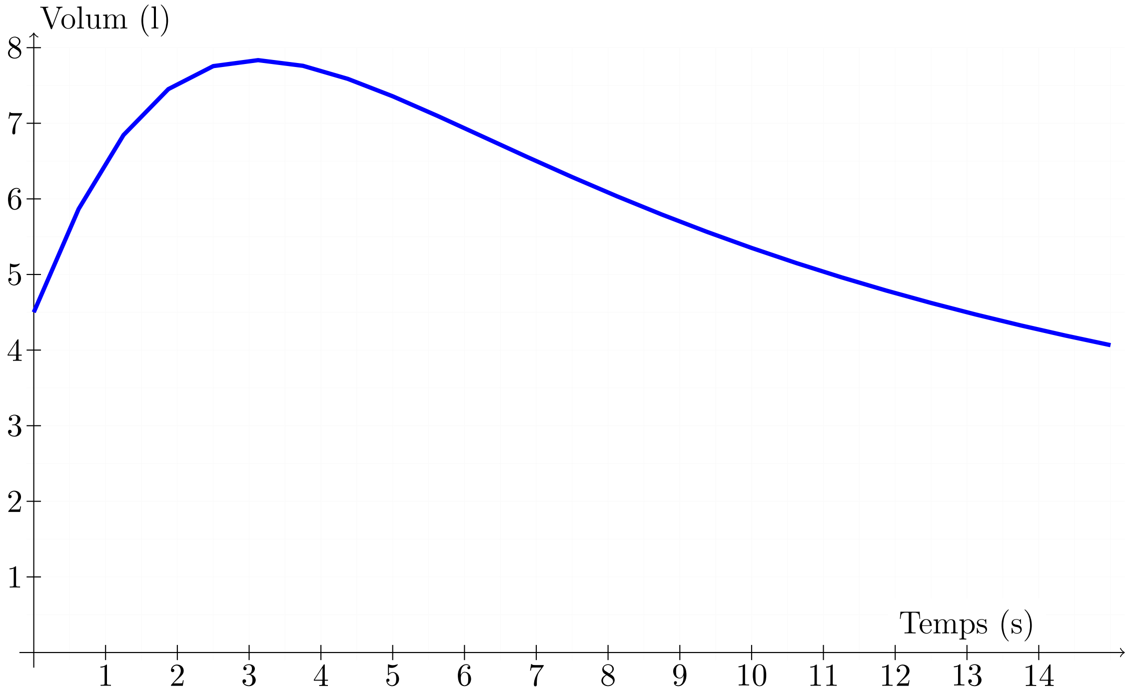
d. Quina escala s'utilitza per a cada variable?

e. Quin és el domini de definició d'aquesta funció?

f. Quin és el seu recorregut

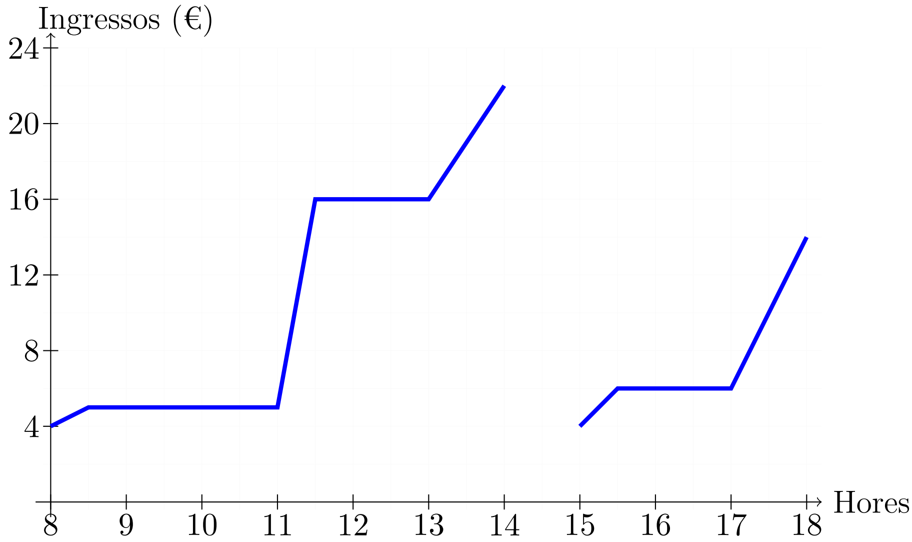
g. Quina altura guanya el globus entre el minut 0 i el 4? I entre el 4 i el 8? En quin d'aquests intervals creix més ràpidament la funció?

Exercici **91.** Per mesurar la capacitat espiratòria dels pulmons es fa una prova que consisteix en inspirar al màxim i després espirar tan ràpid com sigui possible en un aparell que s'anomena "espiròmetre". Aquesta corba indica el volum d'aire que entra i surt dels pulmons.



a. Quin és el volum en el moviment inicial?
b. Quin temps va durar l'observació?
c. Quin és la capacitat màxima dels pulmons d'aquesta persona?
d. Quin és el volum als 10 segons després d'iniciar-se la prova?

Exercici **92.** En la porta d'un col · legi hi ha una parada de llaminadures. En aquesta gràfica es veu la quantitat de doblers que hi ha a la caixa al llarg d'un dia:



a. A quina hora comencen les classes pel matí?

b. A quina hora és el pati? Quant dura?

c. La parada es tanca al migdia i l'amo s'enduu els doblers a casa. Quins varen ser els ingressos aquest matí?

d. Quin és l'horari d'horabaixa del col · legi?

e. Aquesta funció és contínua o discontínua?

Exercici **93.** Na Marta, en Marc, n'Elena i en Lluís comenten com ha anat la seva anada al l'institut aquest matí.

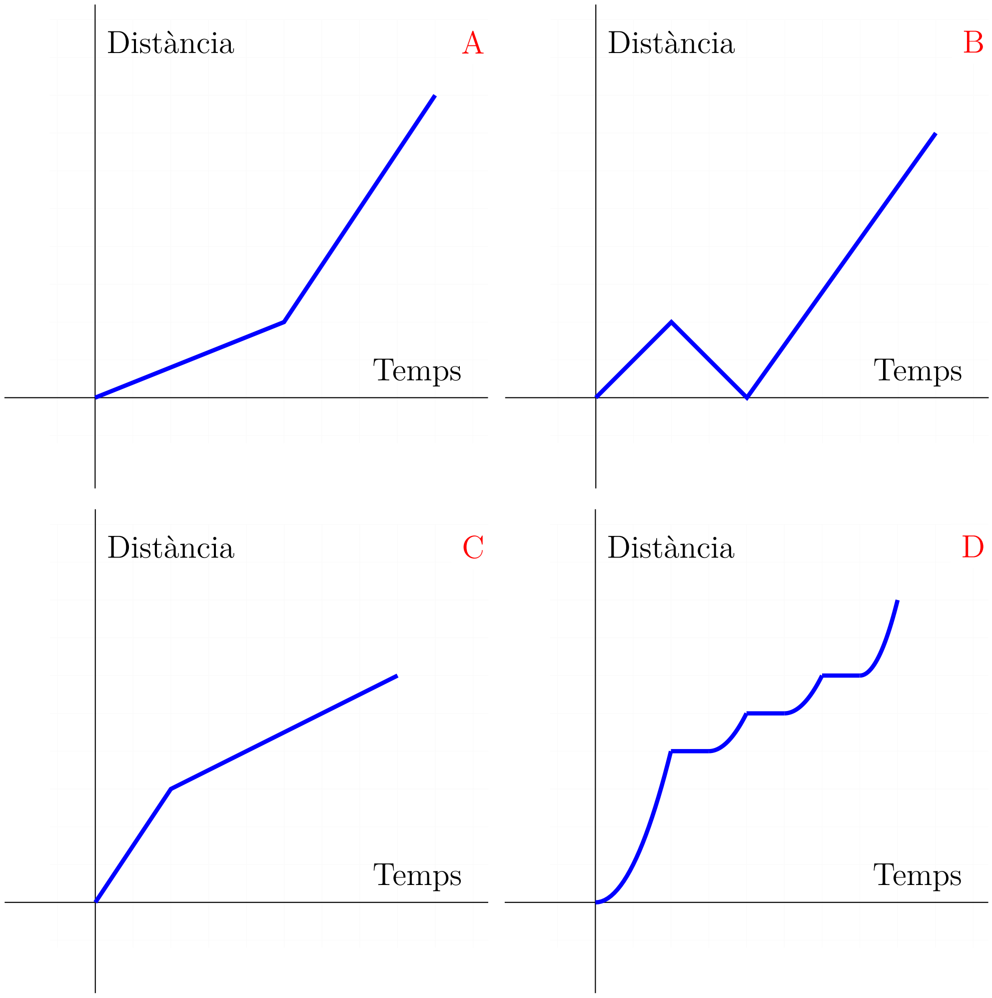
MARTA: Vaig anar amb motocicleta; però se m'oblidà un treball que havia d'entregar i vaig haver de tornar a ca meva. Després vaig córrer tot el que pogué fins a arribar a l'escola.

MARC: Ma mare me va dur en cotxe; però ens trobàrem un embús en el semàfor que hi ha a la meitat de camí i ens va retardar molt.

ELENA: Me vaig trobar en el portal de ca nostra un amic que anava a un altre col · legi. Vàrem fer junts una part del camí i, quan ens vàrem separar, vaig haver de fer més via perquè, amb la xerrada, se me va fer tard.

LLUÍS: Vaig sortir de casa molt aviat perquè havia quedat amb na Maria i era tard. Després vàrem fer el camí junts amb més calma.

Els quatre van al mateix col · legi i cadascuna d'aquestes gràfiques mostra, *en distint ordre*, la trajectòria que han duit a terme des de la sortida de les seves cases fins a l'entrada al col · legi. En totes les gràfiques s'ha utilitzat la mateixa escala.



a. Quina és la gràfica que es relaciona amb la descripció que ha fet cadascú?
b. Qui viu més aprop del col · legi?
c. Qui va tardà menys en arribar-hi?

2.4.2 Enunciat → representació gràfica

Exercici **94.** Stephanie està ajudant a la banda de música dels seus amics a recaptar diners per a fer una gira. El grup decideix vendre tabletes de xocolata. Cada tableta es ven per 1,50 € i cada caixa conté 20 tabletes. Tot seguit hi ha la taula parcial dels diners que han recaptat per les diferents caixes que han venut:

Caixes venudes (c)	Diners recaptats (d)
1	30.00 €
2	
3	
4	
5	150,00 €
6	
7	
8	

a. Completeu la taula anterior per als valors de c

b. Escriviu una equació per als diners seran recaptats si es venen c capses de xocolata. Quina és la variable dependent i la variable independent?

c. Feis el gràfic de l'equació usant els parells ordenats de la taula anterior

d. Calculeu quants de diners s'hauran recaptat si es venen 100 capses de xocolata

e. Al final la banda ha recaptat 1530 €. Quantes capses han venut?

Exercici **95.** (Els vins d'Oporto) En aquesta carta de vins d'Oporto (figura 2.5), tenim el darrer preu tapat:

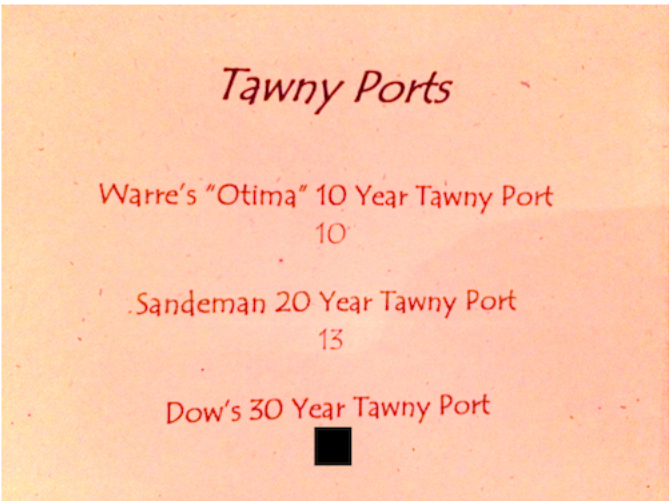


Figura 2.5 Carta de vins (en anglès)

a) Quin és el darrer preu? Es pot establir de qualque manera?
b) Què valdria un vi que tingués 42 anys? I un vi de 137?
c) Es pot establir una fórmula que relacioni els anys i el preu del vi?

Exercici **96.** (El preu del dinar) Un grup d'amics surten a dinar a fora. Alguns dels amics proven el menú de 3 plats i la resta, el de 2 plats.

Figura 2.6 Carta de menús (en anglès)

a. Si la factura és de 141 €, podeu trobar quants amics han triat el menú de 2 plats i quants ho han fet amb el de 3?

b. Hi ha alguna relació entre el nombre d'amics que han demanat el menú de 2 plats i el nombre d'amics que han demanat el menú de 3 plats?

c. Quina és la variable dependent i la variable independent?

d. La relació anterior és una funció o no ho és?

Exercici **97.** (Consum d'un cotxe elèctric) El consum de la bateria d'un cotxe elèctric varia en funció de la seva velocitat: a més velocitat, més consum de bateria. Per tant, la seva autonomia baixa si augmenta la velocitat.
Aquí podeu veure l'autonomia segons la velocitat dels models $70D$, 85, $85D$ i $P85D$ de Tesla Motors™ (figura 2.7).

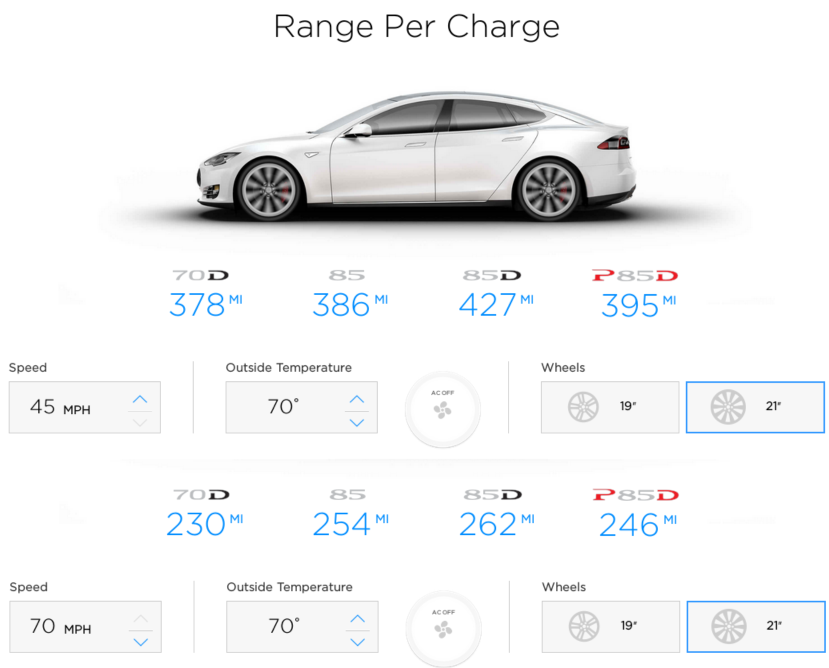


Figura 2.7 Autonomia segons la velocitat. Font Tesla Motors.

a. Quina autonomia tendríem si anàssim a 50 mph?

b. Si volguéssim tenir una autonomia de 500 milles, a quina velocitat hauríem d'anar?

c. Podeu trobar una fórmula que relacioni l'autonomia i la velocitat?

Exercici **98.** (El corredor) Les calories consumides practicant el *running* depenen, entre d'altres factors, del pes del corredor i de la velocitat a la que va. Aquesta és la taula que utilitzen alguns dels professionals per al càlcul de les calories que es cremen durant una correguda a ritme constant [[error 1]] (taula 2.1):
Per exemple, si correm a 8 km/h i correm durant 20 min, aleshores, si pesam 72 kg, aleshores consumirem $9,4 \cdot 20 = 188$ kcal.
Si observam la taula, podem adonar-nos que, a més velocitat, més calories es consumeixen. Ara bé, quan més ràpid anem, més aviat arribarem al nostre destí i, per tant, consumirem calories en més poc temps.

a. Podeu estimar les calories consumides si recoréssim 5000 metres?

b. És independent aquesta quantitat del pes que tenguem?

	Pes del corredor (kg)				
Velocitat	55	63	72	81	90
8,0 km/h	7,1	8,3	9,4	10,7	11,8
8,8 km/h	7,8	9,0	10,4	11,7	13,0
9,6 km/h	9,4	11,0	12,5	14,0	15,7
10,4 km/h	10,1	11,9	13,6	15,2	16,3
11,2 km/h	10,9	12,9	14,4	16,0	17,0
12,0 km/h	11,6	13,4	15,2	16,8	18,6
12,8 km/h	12,1	13,8	15,5	17,7	19,2
13,6 km/h	12,8	14,6	16,3	18,0	19,9
14,4 km/h	13,6	15,5	17,3	19,0	21,0
15,2 km/h	14,4	16,4	18,3	20,0	22,2

Taula 2.1 Calories consumides segons la velocitat i pes per minut

c. Si suposem un pes de 71 kg, quantes calories consumiríem fent 5000 km a 10 km/h? I a 6 km/h?

d. Quantes calories hauríem consumit si anàssim a $10,4$ km/h pesant 70 kg?

e. Si volguéssim consumir 5000 kcal, a una velocita constant de $10,4$ km/h, quina distància hauríem de recórrer?

Exercici **99.** Representeu gràficament les funcions següents:

a) A cada nombre li feim correspondre la seva arrel quadrada

b) A cada nombre li feim correspondre el nombre de divisors

c) A cada nombre li feim correspondre la seva meitat

d) A cada nombre li feim correspondre el menor primer que el divideix

Exercici **100.** L'àrea d'una circumferència i el seu radi estan relacionats mitjançant una fórmula. Representeu gràficament l'àrea d'un cercle en funció del seu radi. Pista: Feis una taula que doni quina àrea té una circumferència de 1 cm, 2 cm, 3 cm, ...

Exercici **101.** Escriviu la fórmula que converteix hectòmetres en decàmetres. Representeu gràficament aquesta relació

Exercici **102.** Un ciclista surt d'excursió a un lloc que dista 20 km de ca seva. Als 15 minuts de la sortida, quan es troba a 6 km, fa una parada de 10 minuts. Reanuda la marxa i arribar al seu destí una hora després d'haver sortit. *Representeu* la gràfica temps-distància a ca seva.

Exercici **103.** Quantes vegades batega el cor d'una persona al llarg de la seva vida?

Exercici **104.** En l'autoescola Ramírez les tarifes són les següents:

Preu de cada classe	15 €
Preu de la matrícula	150 €

a) Si hem utilitzat els serveis de Ramírez i amb 5 classes hem obtingut el carnet. Què hem pagat?

b) Quan haguéssim pagat si haguéssim fet 6 classes? I amb 7 classes?

c) Feis una gràfica que relacioni el que costa obtenir el carnet segons el nombre de classes rebudes

Exercici **105.** Els euros i els dòlars són monedes. A dia d'avui, 1 euro equival a 1,36 dòlars.

a. Feis una gràfica que relacioni els euros i els dòlars. Com a mínim representeu 8 punts.

b. Es poden unir els punts de la gràfica? Raoneu la resposta.

Activitat **106.** (*Dipòsits d'aigua*) . Activitat individual per representar gràficament una funció contextualitzada. Veure el fitxer específic de l'activitat.

Exercici **107.** L'aparcament d'un centre comercial té la tarifa de preus següent:

Preu de les 9h fins a les 22h	
Les dues primeres hores............................	Gratuït
3 hores o fracció, i successives	1 €
Màxim del dia	6 €

(a.) Representeu la gràfica de la funció temps d'aparcament-cost. (b.) Quina és la variable dependent i la variable independent?

Exercici **108.** En la factura del gas d'una ciutat es paga una quantitat fixa de 15 €, i 0,75 € per a cada metre cúbic consumit. (a.) Quan es paga per 3 m^3? I per 5 m^3? (b.) Representeu la funció metres cúbics consumits-cost (c.) Quina és la variable dependent i independent?

Exercici **109.** Un anunci per paraules en un diari costa 2,80 € per paraula, i s'estableix un mínim de tres paraules per a poder ser admés.

a) Elaboreu una taula i una gràfica de la funció que relaciona el nombre de paraules amb el preu de l'anunci.

b) Quines són les variables del gràfic?

c) Quin és el seu domini? I el seu recorregut?

d) Hi ha algun màxim i mínim?

Exercici **110.** Per fer un pastís, necessitam 250 g de farina per a cada 100 g de sucre.

a) Quina relació hi ha entre els grams de sucre i els grams de farina. Expresseu aquesta relació amb una expressió algebraica

b) Representeu gràficament aquesta relació

c) Quina és la variable dependent i la variable independent?

d) Què es necessitaria per fer una coca amb 400 g, 300 g i 1000 g de sucre?

Exercici **111.** Per fer la massa del pa, per a cada dos quilògrams de farina hem de posar 500 ml d'aigua.

a) Quina relació existeix entre els litres d'aigua i els quilògrams de farina de la massa de pa?

b) Quina és la variable dependent i la variable independent?

c) Trobeu la representació gràfica

Exercici **112.** En Joan i n'Albert firmen un contracte per repartir publicitat. En Joan cobra 20 € al dia fixes i 0,2 € per a cada fulla repartida. N'Albert cobra 10 euros per dia fixes i 0,3 € per a cada fulla.

a) Expresseu què guanyaran en Joan i n'Albert amb una fórmula

b) Qui guanyarà més? (per respondre a aquesta pregunta, intenteu representar les seves funcions)

Exercici **113.** Un tren que circula a 100 km/h tarda 5 hores a arribar a la ciutat.

a) Trobeu l'expressió que relaciona la velocitat del tren i el temps que tardaria a arribar a la ciutat

b) Representeu-ho gràficament (com a mínim representeu 5 punts)

Exercici **114.** Quatre persones tarden 50 minuts en fer un clot. Representeu gràficament aquesta relació.

Exercici **115.** El meu cotxe consumeix 22 litres cada cent quilòmetres. Quina relació hi ha entre els quilòmetres recorreguts i els litres consumits?

Exercici **116.** Representeu gràficament la relació que existeix entre el nombre de cavalls a una granja i el nombre de pinso que mengen si sabem que 12 cavalls mengen 100 quilògrams de pinso.

Exercici **117.** Sabem que per fer una coca necessitam 10 ous per cada 250 grams de farina. Representeu gràficament aquesta relació.

Exercici **118.** Trobeu la relació que existeix entre la longitud del costat d'un quadrat i el seu perímetre. Representeu-la gràficament

Exercici **119.** Trobeu la relació que existeix entre la longitud del costat d'un quadrat i la seva àrea. Expresseu-la de forma algebraica i representeu-la gràficament.

Exercici **120.** 2,5 metres de tela costen 48 €. Trobeu una fórmula que relacioni el nombre de metres de tela que es compren i els euros que costen. Representeu-la gràficament

Exercici **121.** Per pagar el manteniment del jardí d'una comunitat de veïns, hem de pagar 100 € al mes fixes i 10 euros per hora treballada. Què ens costarà al mes en funció de les hores que hi fan feina?

Exercici **122.** El banc ens cobra 0,60 € cada any de manteniment de la llibreta més un 0,01€ per cada carta que ens envien. Com canvia el que ens cobren en funció del nombre de cartes? Si un altre banc ens cobra 0,20 € cada any per manteniment i 0,05€/carta enviada, a quin banc ficaríem els doblers?

Exercici **123.** Quina relació hi ha entre els doblers que demanen al banc i els interessos que hem de tonar si sabem que aquests són del 10%?

Exercici **124.** La lliure és una mesura de pes que equival a 0,45 kg. Feis una gràfica que relacioni les lliures i els quilos. Pista: feis una taula d'equivalència (trobeu els quilos que són 0,5, 1, 1,5, 2, 3, 4, ...lliures).

Exercici **125.** Quina relació hi ha entre els interessos que hem de tornar al banc i el temps que demanam els doblers si sabem que pagam un 10% *anual* d'interessos?

Exercici **126.** La companyia de telèfons mòbils Wififone cobra 0,10 € per establiment de cridada i 0,02 € per segon, mentres que la companyia Telephone en cobra 0,20 per establiment de crida i 0,01 € per segon.

a) Trobeu la fórmula que permet saber què pagam per segon parlat en cada companyia

b) Quina és la variable dependent i la independent?

c) Com varia el cost al llarg del temps?

Exercici **127.** Un nàufrag decideix intentar partir de la illa on està. Si va a una velocitat de 2 m/s amb una balsa, quina funció relaciona el temps que passa i la distància a la que es troba de la illa? Representeu-la gràficament

Exercici **128.** Un periquito beu 2,2 litres d'aigua al mes. Quina funció relaciona el temps que passa i els litres que consumeix el periquito? Què consumeix al cap de 2, 4, 5 mesos i 2, 3 i 4 anys? Feis la representació gràfica.

Exercici **129.** Per anar a una discoteca ens cobren 10 € a l'entrada i 3 € per consumició. Per quan *ens sortirà* la nit en funció del nombre de beures?. Representeu-ho gràficament

Exercici **130.** En un forn cinc barres de pa costen 10 euros. Expresseu la relació que hi ha entre el nombre de barres que compram en aquest forn i els euros que hem de pagar

Exercici **131.** Per fer una cridada de telèfon tenim els següents costs:

- Simplement per l'establiment de cridada, 1,50 euros
- Per cada minut, 0,320 euros

Trobeu la funció que relaciona el cost d'una cridada de telèfon i el número de minuts que conversam

Exercici **132.** Un jugador de futbol cobra:

- 10.000 euros per any
- 1.000 euros per a cada partit guanyat

Trobeu una funció que ens digui què cobra aquest jugador per any

Exercici **133.** Anem a un restaurant. A l'entrar ens diuen que:

- Només per servir-nos, ens cobraran 10 euros
- Per a cada plat que demanem, ens cobraran 5 euros
- No ens cobraran per res més

Trobeu una funció on estigui reflectit què haurem de pagar al restaurant.

Exercici **134.** Si 50 litres d'aigua ens costen 10 euros i EMAYA ens cobra 20 euros fixes cada mes, quina és la funció que relaciona els litres d'aigua que consumim i els euros que pagam mensualment?

Exercici **135.** Trobeu la funció que relaciona l'àrea d'un rectangle de base igual a 5 cm i la seva àrea.

Exercici **136.** Trobeu la funció que relaciona l'àrea d'un quadrat en funció del seu costat.

Exercici **137.** Na Marta té el doble de l'edat d'en Jordi, més 5. Quina funció relaciona els anys que té en Jordi i els que té na Marta?

Exercici **138.** En Marc té tres vegades la suma de l'edat de na Marta i tres. Quina relació hi ha entre les seves edats?

Exercici **139.** Tenim dos nombres: el primer és igual al quadrat del segon més tres vegades el segon menys 2. Quina funció relaciona el primer i el segon nombre?

Exercici **140.** En una granja, tenim que:

- Les despeses fixes (llum, telèfon, etc) representen 240 euros
- Dotze vaques mengen 450 kg de pinso al mes

Tenint en compte que un kg de pinso val 1,32 €, calculeu la funció que relaciona les despeses en el mes i el número de vaques de la granja.

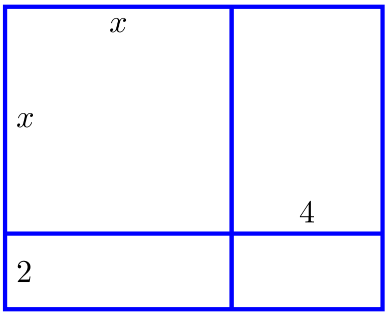
Exercici **141.** L'edat de na Maria és igual al quadrat de l'edat d'en Jordi més tres vegades la suma de l'edat d'en Jordi i 3. Quina relació hi ha entre l'edat d'en Jordi i de na Marta?

Exercici **142.** Els ingressos de la pàgina `www.matematiques.org` són deguts als següents conceptes:

- 10 euros al mes fixes, degut a l'aportació dels fundadors
- 0,32 euros per cada clic sobre la publicitat de la pàgina

Quina funció relaciona el nombre de clics sobre la publicitat de la pàgina i els ingressos?

Exercici **143.** Trobeu la funció que relaciona el costat desconegut x i l'àrea de la següent figura:



Quin costat tendrà la figura si l'àrea total és de 15.375 m^2?

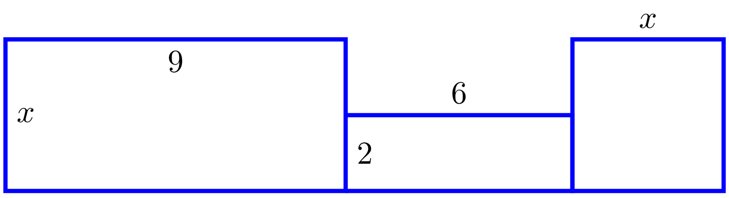
Exercici **144.** Tenim dos nombres: el primer és igual al doble de la suma del quadrat del segon més 2. Quina funció relaciona el primer i el segon nombre. Representeu-la

Exercici **145.** Na Marta té el doble de l'edat de n'Albert menys 10. Representeu la funció que relaciona l'edat de na Marta i n'Albert

Exercici **146.** Si quatre panets de mermelada costen 2,80 euros. Representeu la funció entre el nombre de panets que es compren i els euros que ens costa la compra

Exercici **147.** Representeu la funció que relaciona l'àrea d'un quadrat i el seu costat

Exercici **148.** Representeu la funció que relaciona l'àrea de la figura següent i el costat desconegut x:



Trobeu quina àrea tendria si tengués un costat de 10 m^2, 22 m^2 i 37 m^2.

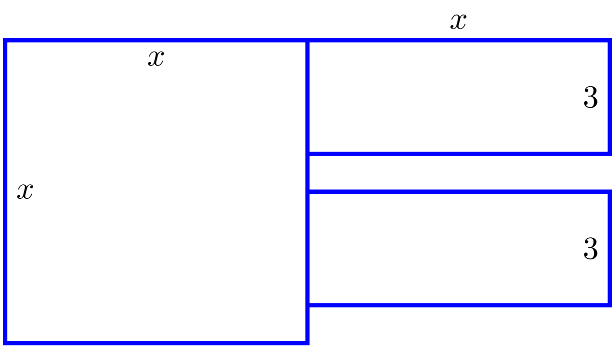
Exercici **149.** Per llançar un coet tripulat a la Lluna, tenim que:

- Les despeses de combustible suposen 12000 euros
- 4 astronautes consumeixen 10 kg al mes de menjar
- Transportar un quilo de menjar ens costa 120 euros de combustible extra

Trobeu la funció que relaciona el nombre de astronautes que viatgen a la Lluna i el cost del viatge al mes.

Exercici **150.** Tenim dos nombres: el primer és igual al triple de la diferència entre el segon nombre i 3. Representeu la funció que relaciona aquests dos nombres

Exercici **151.** Representeu la funció que relaciona l'àrea de la figura i el costat desconegut x:



Esbrineu què valdria el costat si la figura tingués una àrea de 10.600 m^2.

Exercici **152.** Per a fer una coca, necessitem 250 g de farina per a cada 100 g de sucre.

a. Quina relació hi ha entre els grams de sucre i els grams de farina. Expresseu aquesta relació amb una expressió algebraica

b. Representeu gràficament aquesta relació

c. Quina és la variable dependent i la variable independent

d. Què necessitaríem per fer una coca amb 400 g i 300 g de sucre?

e. Quants grams de sucre necessitaríem per fer una coca amb 1 kg de farina?

Exercici **153.** La companyia de telèfons mòbils Rodafone cobra 0,10 euros per establiment de cridada i 0,02 € per segon, mentres que la companya Elgo cobra 0,70 euros per establiment de cridada i 0,01 euros per segon.

a. Trobeu la fórmula que permet saber què s'ha de pagar per segson parlat en cada companyia

b. Quina és la variable dependent i quina la variable independent?

c. Trobeu en quins trams la primera companyia és més cara que la segona.

d. Quina companyia és més cara si parlem 3 minuts?

Exercici **154.** La taula següent representa la distància que neteja una màquina lleva-neus durant 1 hora en funció de l'espessor de la neu:

Espessor (cm)	50	40	30	25	20	15	10	5
Distància (km)	6	7,5	10	12	15	20	30	60

a) Representeu gràficament les dades següents

b) Podeu extrapolar les dades i trobar la distància que recorre la màquina lleva-neus si l'espessor és d'un metre?

Exercici **155.** En una tenda, 3 metres de tela costen 24 €.

a) Trobeu una fórmula que relacioni el nombre de metres de tela que compram i els euros que ens costen

b) Indiqueu quina és la variable independent i la variable dependent

c) Representeu gràficament aquesta fórmula

Exercici **156.** La companyia de telèfons mòbils Wififone cobra 0,05 € per establiment de cridada i 0,05 € per segon, mentres que la companyia Telephonic en cobra 0,30 per establiment de crida i 0,001 € per segon.

a) Trobeu la fórmula que permet saber què pagam per segon parlat en cada companyia

b) Quina és la variable dependent i la independent?

c) Representeu gràficament cada funció

Exercici **157.** La longitud L d'una barra de metall és una funció lineal en funció de la temperatura T, on L es mesura en centímetres i T en graus Celsius. S'han realitzat les mesures següents: $L = 124,91$ quan $T = 0$, i $L = 125,11$ quan $T = 100$.

a. Trobeu una fórmula que doni L en funció de T.

b. Quina serà la longitud de la barra quan la temperatura sigui de 20°?

c. A quina temperatura s'hauria d'encalentir la barra per a què fes $125,17$ cm de llarg?

Exercici **158.** (*Preus de la botiga*) . El propietari d'una botiga de menjar se n'adona que, en promig, ven 872 litres per setmana de llet si el preu del litre és de 1,98 €. Quan el preu del litre és de 1,75 €, aleshores les vendes són de 1.125 litres a la setmana. Assumiu que el nombre de litres venuts L per setmana és una funció lineal del preu P per litre de llet.

a. Trobeu una fórmula que doni N en funció de P.

b. Si el preu per litre fos de 1,64 €, quants litres esperaria vendre el botiguer a la setmana?

c. Per vendre 1400 litres a la setmana, a quin preu hauria de fixar el preu per litre de llet?

Solucions de "Enunciat → representació gràfica"

95 Representeu gràficament la recta que passa per $(10, 10)$ i $(20, 13)$ i trobeu $f(30)$. Aquest seria el preu *lògic* de venda. La fórmula seria $f(x) = (x - 10) \cdot 3 + 10$.

96 Representeu la recta $12x + 15y = 141$ i trobeu totes les solucions enteres: $x = 0$ fins a $x = 141/12$. Hi ha dues solucions possibles: $x = 3, y = 7$ i $x = 8, y = 3$.

154$y = 300/x$

3 Probabilitat

3.1 Combinatòria

Exercici **159.** Quantes paraules de tres lletres es poden formar amb un alfabet de 5 lletres? I quantes paraules de 4 lletres?

Exercici **160.** Entre els 48 treballadors d'una empresa s'han d'elegir tres càrrecs: representant sindical, secretari i cap adjunt de producció. Si un mateix treballador pot ocupar més d'un càrrec i si hi ha 35 treballadors que no volen ocupar cap càrrec, ¿quantes eleccions són possibles?. Expresseu-ho en forma de potència.

Exercici **161.** Dos equips de futbol juguen un partit cada setmana durant dos mesos. Quants de resultats possibles hi pot haver en el transcurs d'aquests dos mesos?

Exercici **162.** En un examen tipus test de 5 preguntes, cada pregunta admet 3 opcions. Quants d'alumnes poden fer distint l'examen? (dos exàmens es consideren diferents si hi ha una pregunta amb distinta contestació)

Exercici **163.** En un equip d'atletisme de 5 persones, l'entrenador reparteix camisetes de color vermell, groc i verd aleatòriament als atletes. De quantes maneres pot repartir les camisetes?

Exercici **164.** En un restaurant, cada client només pot elegir entre cinc plats diferent. Si en aquest moment hi ha sis clients en el restaurant, quantes eleccions de plats diferents es poden fer?

Exercici **165.** En una enquesta es demana sobre què prefereix fer la gent en el seu temps lliure: llegir, veure la televisió o navegar per Internet. Si s'enquesten a 6 persones, quants de possibles resultats hi pot haver?

Exercici **166.** En una festa, es reparteixen regals entre els assistents de la següent manera:

a. Cada persona ha de rebre un regal

b. Una persona no pot rebre més de dos regals

c. Cada persona només pot rebre o bé una colònia, o bé un rellotge o bé un anell

D'aquesta manera, quants de repartiments es poden fer si a la festa hi ha 6 persones?

Exercici **167.** Si sabem fer 6 plats per dinar, quants de menus setmanals podem fer? Expresseu-ho en forma potencial.

Exercici **168.** Un pagès té 4 terrenys per cultivar als quals pot plantar vid, tarongers, llimoners i ametllers. Quantes eleccions de cultiu pot fer?

Exercici **169.** Quants números de tres xifres es poden formar si els dígits van de 1 a 5?

Exercici **170.** Quantes travesses distintes es poden realitzar si el pronòstic 1, X, 2 es realitza sobre 4 partits? I si es realitza sobre 14?

Exercici **171.** Quantes combinacions de roba podem fer si en el nostre vestuari tenim 4 calcons, 4 camisetes, 4 camises i 4 tipus sabates? (es suposa que per vestir-nos elegirem un calçons, una camiseta, una camisa i unes sabates)

Exercici **172.** Quantes matrícules de l'estil $IB-????$ hi ha si els dígits poden ser totes les lletres de l'abecedari?

Exercici **173.** Si tenim dos daus de colors distints, quants de resultats podem obtenir després de llançar-los? I si tenim quatre daus?

Exercici **174.** Quantes paraules de sis lletres es poden formar amb les lletres dins el conjunt $\{A, F, H, Z\}$?

Exercici **175.** Quantes paraules de 10 lletres podem formar amb els símbols $-$ i $\cdot$?

Exercici **176.** Per a una campanya en defensa dels cetacis, un grup ecològic desenvolupa una estratègia de difusió en cadena:

a. 3 representants enviaran 3 cartes a 3 socis
b. Aquests 3 socis enviaran 3 cartes més als seus amics
c. I així successivament

Quantes cartes s'hauran enviat en 7 etapes? Si es vol que les aquesta campanya arribi a 15 000 persones, quantes etapes del procés s'hauran de fer?

Exercici **177.** Hem de preparar el berenar per a 5 persones. Al panet que prepararem per berenar, hi podem posar *foi-grass*, mermelada, tonyina o bé pa amb oli i pernil salat. Quantes de berenars diferents podem preparar?

Exercici **178.** A ca nostra tenim 4 parets per pintar i 5 colors diferents. De quantes maneres podem pintar ca nostra?

Exercici **179.** Quantes travesses distintes es poden realitzar sobre 5 resultats?

Exercici **180.** Quants de números hi ha de 10 dígits si cada dígit pot ser igual a 2, 3 i 9?

Exercici **181.** En una casa hi ha 4 habitacions, dins cada habitació hi ha 4 aplics, cada aplic té quatre garlandes i cada garlanda té 4 bombilles. Si hem de canviar totes les bombilles de la cada, quantes n'hem de comprar?

3.2 Àlgebra d'esdeveniments

Exercici **182.** Hi ha al mercat diversos tipus de daus, tot i que el més normal és el cúbic de sis cares. N'hi ha de 4, 6, 10, 12, i 20 cares. En general, van numerats de l'1 fins al nombre de cares que tenen. Escriu l'esdeveniment "parell" per a cadascun d'ells.

Exercici **183.** Es llancen dos daus i es multiplica el nombre de punts obtinguts en cadascun.

a. Quants de resultats es poden obtenir?
b. Descriu l'espai mostral.
c. Escriu dos esdeveniments que siguin elementals i dos que siguin compostos

Exercici **184.** Tenim un dau de 4 cares numerades de l'1 al 4. El tirem una vegada. Escriviu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles esdeveniments classificats pel seu nombre d'elements.

Exercici **185.** Tenim un dau de 6 cares blanc, en el qual s'han escrit a les cares els nombres següents: 1, 1, 1, 2, 2, 3. Escriviu tots els esdeveniments possibles.

Exercici **186.** Determineu el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 48

a. Amb numeració inferior a 4
b. De bastos i més gran que 4
c. Figures d'oros o bastos

Si aquests conjunts de cartes són, respectivament, A, B i C, calculeu (a.) $A \cup B$, (b.) $A \cap B$, (c.) $A \setminus B$, (d.) $B \setminus A$, (e.) A^c, (f.) B^c i (g.) C^c .

Exercici **187.** En una baralla espanyola, enumereu i compteu les cartes dels esdeveniments:

a. Oros i sets
b. Oros o sets
c. Set d'oros
d. Figures
e. Oros o figures
f. Oros i figures

Feis la intersecció, la unió i la diferència del primer amb els altres esdeveniments. I trobeu el contrari de cadascun d'ells.

Exercici **188.** Per a un dau de sis cares, escriviu els esdeveniments:

a. Treure parell
b. Treure senar

c. Treure parell i major que 3
d. Treure parell o major que 3
e. Treure parell però que no sigui major que 3
f. Treure el contrari de (parell i major que 3)
g. Treure el contrari de parell, i major que 3

Calculeu els seus successos complementaris i feis la unió, la intersecció i la diferència d'aquests esdeveniments de manera que, com a màxim, calculeu set operacions diferents.

Exercici **189.** Es llança una ruleta de 12 costats, numerats de l'1 al 12, i s'observa el resultat obtingut.

a. Trobeu l'espai mostral.
b. Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:

   - A = "obtenir un nombre parell"
   - B = "obtenir un nombre senar"
   - C = "obtenir un múltiple de 3"
   - D = "obtenir un múltiple de 5"
   - E = "obtenir un nombre major que 4"
   - F = "obtenir un nombre menor que 6"
   - G = "obtenir un múltiple de 3 i 4"

c. Calculeu els seus esdeveniments contraris.
d. Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d'A amb cadascun dels altres esdeveniments.
e. Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

Exercici **190.** Digueu quins d'aquests successos són successos impossibles i quins són successos segurs (n'hi ha que no són ni segurs ni impossibles):

a. la suma del resultat de dos daus és 1
b. llancem tres monedes i surten una cara i dues creus
c. agafem una fitxa de dòmino a l'atzar i la suma de punts és més gran de 1
d. llancem dues monedes i el nombre de cares menys el nombre de creus és més petit o igual a dos
e. llancem dos daus i la resta de punts és 6
f. llancem un dau de 8 cares i el resultat es més petit que 10
g. llancem 10 monedes i obtenim 10 cares més que creus
h. llancem dos daus i la multiplicació dels punts és múltiple de 7
i. en el sorteig de la primitiva surt premiat el número 65478
j. llancem dos daus i la multiplicació dels dos números es menor de 40

3.3 Càlcul de probabilitats

3.3.1 Intuïció de probabilitat

Exercici **191.** (Són correctes?) Digueu si les afirmacions següents són correctes o incorrectes i justifiqueu la resposta

1. N'Emma diu *Demà o plourà o no plourà. Per tant, la probabilitat de què plogui és del 0,5.*

2. Na Susana diu *Si una família ja ha tengut quatre nins, aleshores el pròxim infant és més probable que sigui una nina que un nin*

3. Na Tania diu *Si es tira un dau (no trucat) quatre vegades consecutives, és més probable treure 2, 3, 1, 6 que no 6, 6, 6, 6.*

Exercici **192.** (Vertader, fals, incert) Digueu si les afirmacions següents són (a.) vertaderes, (b.) falses o (c.) incertes :

a. Si llancem un dau cúbic i treiem un sis més que cap altre nombre, aleshores el dau està embiaxat.

b. Quan seleccionem aleatòriament quatre lletres de l'alfabet, és més probable treure D, T, M, J que W, X, Y, Z.

c. Si llancem una moneda, que no està trucada, cinc vegades i obtenim cinc cares consecutives, aleshores la pròxima vegada que llancem la moneda és més probable obtenir una cara.

d. Hi ha tres possibles resultats en un partit de futbol: guanyar, perdre o empatar. La probabilitat de guanyar aleshores és de 1/3.

e. Quan dues monedes es llancen hi ha dos resultats: dues cares, una cara, o cap cara. La probabilitat de treure dues cares és, per tant, 1/3.

f. Aconseguir un total de tres punts amb dos daus és el doble de probable que aconseguir un total de dos punts.

g. En un test de vertader/fals de 10 preguntes, si responeu aleatòriament és segur que obtindreu un cinc.

h. La probabilitat d'aconseguir exactament dues cares en un llançament de quatre monedes és de $1/2$.

i. Les apostes d'una competició d'A vs Z és de 5 a 10. Això vol dir que la probabilitat de què guanyi A és de $1/2$.

Exercici **193.** (Dues bosses de confits) Tenim dues bosses. Les dues contenen confits de colors vermells i grocs. A la bossa A hi ha dos confits vermells més que a la bossa B.
Si escollim un confit de cada bossa, podem assegurar que és més probable escollir un confit vermell de la bossa A que de la bossa B?

3.3.2 Experiments simples

Exercici **194.** En l'experiment consistent a llançar un dau cúbic i observar-ne la puntuació, considerem els esdeveniments següents:

A. "Obtenir un múltiple de 3"

B. "Obtenir un divisor de 4"

C. "Obtenir un nombre senar"

D. "Obtenir un nombre menor que 5"

Calculeu:

a. $p(A)$
b. $p(B)$
c. $p(C)$
d. $p(D)$
e. $p(A \cup C)$
f. $p(A \cap C)$
g. $p(A \cap B)$
h. $p(A^c)$

Exercici **195.** En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

a. Sota
b. Copa o oros
c. Copa i oros
d. Figura i espasa
e. Figura o espasa
f. Cavall o espasa

Exercici **196.** En una bossa hi ha 5 bolles vermelles, 10 bolles negres i 5 bolles blaves. En treiem una i miram de quin color és. Calculeu la probabilitat de:

a. Treure una bolla vermella
b. Treure una bolla negra o blava
c. Treure una bolla que no sigui blava.

Exercici **197.** En una rifa de mil nombres (del 000 al 999) es sorteja un viatge. Calculeu:

a. La probabilitat de guanyar el premi si comprem cinc nombres

b. La probabilitat que el nombre premiat acabi en 5

Exercici 198. En una bossa hi ha deu boles numerades de l'1 al 10. Si extraiem una bola de la bossa, calculeu la probabilitat de:

a. Treure un 7
b. Treure un nombre menor que 7
c. Treure un nombre no inferior 7
d. Treure un múltiple de 5
e. Treure un divisor de 6
f. Treure un nombre primer

Exercici 199. En una capsa hi ha vuit bolles numerades consecutivament com segueix: 2, 4, 6, ..., 16. Si diem $A =$ "treure un nombre menor o igual que 10" i $B =$ "treure un múltiple de 3":

a. Escriu els elements de A i de B
b. Calcula la probabilitat de:

   – A
   – B
   – A^c
   – B^c
   – $A \cup B$
   – $A \cap B$

Exercici 200. (Pràctica dels complementaris) Completeu la taula següent:

Experiència	Esdeveniment	Probabilitat	Complementari	Probabilitat
Tirar un dau	Surt parell			
Tirar un dau	Surt un 6			
Tirar un dau	Surt un 3 o un 6			
Prendre una carta de póquer			Surt comodí	
Tirar una moneda			Surt cara	
		$1/6$		$5/6$
Triar dia de gener				$30/31$
Triar dia d'abril		$1/2$		
Triar una vocal		$2/5$		$3/5$
Prendre una carta de la baralla espanyola	Surt múltiple de tres			
Prendre una carta de la baralla espanyola		$9/48$		
		$1/2$		$1/2$
	Surt la Z			$27/28$
			Surt la X	

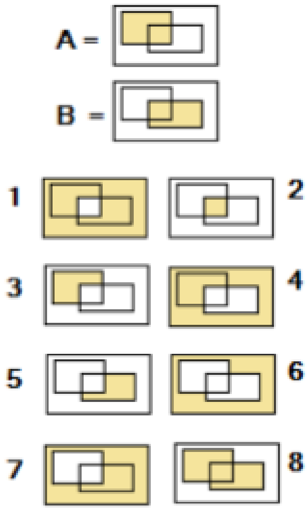
Exercici **201.** Tenim un dau amb els nombres 1, 1, 1, 2. Si el tirem 100 vegades, quina quantitat de vegades sortirà cadascun dels resultats possibles?.

Exercici **202.** Tenim un dau de deu cares numerades com 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Quina és la probabilitat de cadascun dels esdeveniments elementals?

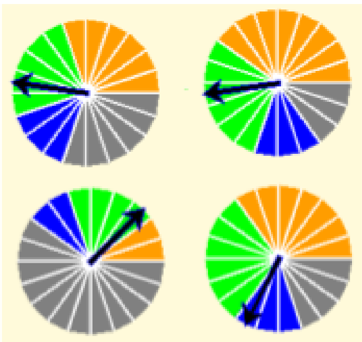
Exercici **203.** Tenim una ruleta de 10 posicions, 3 de vermelles, 4 de verdes, 2 de negres i 1 de blava. Quina és la probabilitat que en girar-la s'obtingui cada un dels colors?

Exercici **204.** Si tirem dues monedes, aleshores podem obtenir un d'aquests 4 resultats: OO, XO, OX, XX. Podeu escriure d'aquesta manera els resultats possibles per a tres monedes? I per a 4? Quina és la probabilitat d'obtenir dues cares en cada un dels experiments?

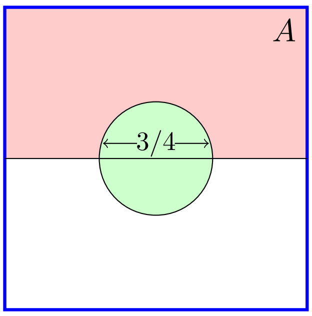
Exercici **205.** Si sabem que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,7$ i $p(H_2) = 0,3$, calculeu $p(\text{“1”})$, $p(\text{“3”})$, $p(\text{“4”})$, $p(\text{“5”})$, $p(\text{“6”})$, $p(\text{“7”})$ i $p(\text{“8”})$:



Exercici **206.** Quina és la probabilitat d'obtenir taronja, verda, blava o grisa a cada una de les ruletes següents?

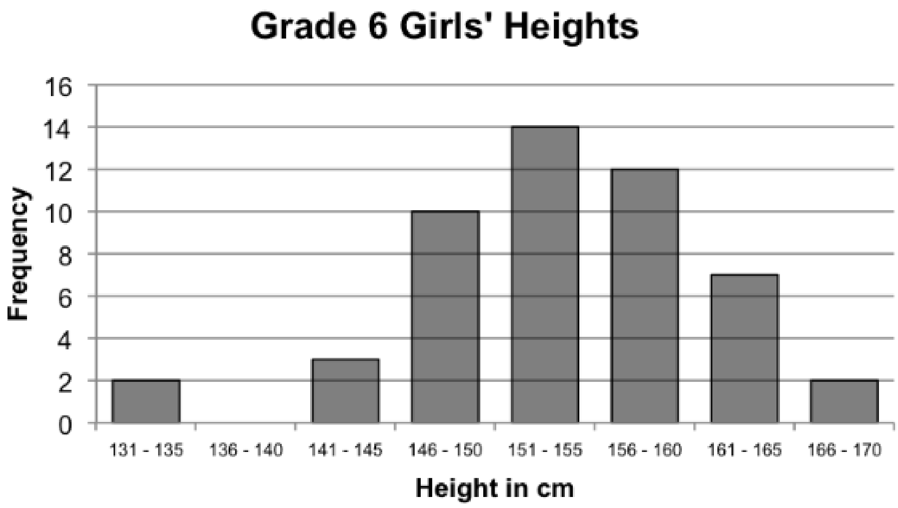


Exercici **207.** (Els paracaigudistes) Els paracaigudistes realitzen pràctiques d'aterratge en precisió: intenten aterrar al centre d'aquest camp de 1 km^2. Quina probabilitat tenen d'encertar?



a) Quina probabilitat hi ha de què no aterrin al centre?
b) Quina probabilitat hi ha de què aterrin a l'àrea A (la regió nord del rectangle que no està inclosa dins el cercle)?

Exercici **208.** (Les alçades de les noies de 6è) Aquesta gràfica mostra les freqüències de l'alçada d'un grup d'al · lotes de 6è de primària (figura 3.1). Totes les alçades han estat arrodonides al centímetre més pròxim (totes les qüestions estan referides a les alçades arrodonides, no a les exactes).



Taula 3.1 Alçades de les nines de 6è de primària

Quina probabilitat tenim que una al · lota d'aquesta classe faci més que $1,50$ m?

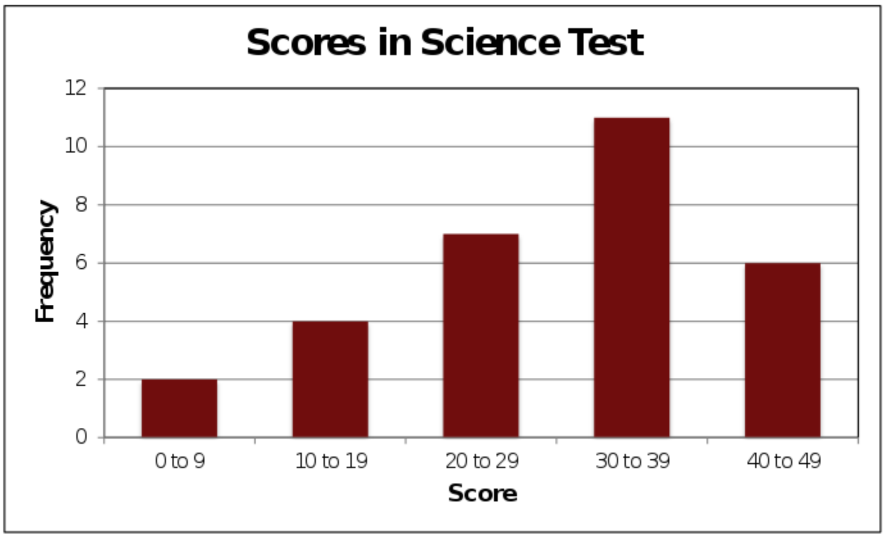
Exercici **209.** (Els resultats del test) Aquesta gràfica mostra el nombre de preguntes correctes d'un test de 50 preguntes (figura 3.2).
Quina probabilitat tenim que una persona hagi tret un resultat major que 25?

Exercici **210.** En una bossa tenim 6 boles vermelles, 9 boles blaves i 5 boles verdes. N'extraiem una. Quina és la probabilitat d'obtenir una bola vermella?

Exercici **211.** Disposem d'una baralla de 100 cartes, de cinc colors (blanc, negre, verd i blau) i numerades de l'1 al 20. Quina és la probabilitat d'obtenir un 19? I la d'obtenir un 8 verd? I la d'obtenir un nombre parell que no sigui negre?

3.3.3 Experiments compostos

Exercici **212.** En l'experiment consistent a llançar dos daus cúbics i observar-ne la puntuació, calculeu la probabilitat d'obtenir:



Taula 3.2 Nombre d'encerts d'un test de 50 preguntes

a. Dos 4
b. Una suma igual a 8
c. Una suma parell
d. Un producte igual a 6.

Exercici **213.** En l'experiment compost consistent a llançar una moneda i un dau cúbic, calculeu la probabilitat d'obtenir una cara i un 5.

Exercici **214.** En una bossa hi ha dues boles blanques i tres de negres. Se n'extreuen dues sense devolució i se n'observa el color. Calculeu la probabilitat de què:

a. Les dues boles siguin blanques
b. Siguin de colors diferents
c. Totes dues siguin del mateix color
d. Almenys una sigui negra

Exercici **215.** En una urna hi ha 3 bolles blanques, 2 de negres i 10 de grogues. Efectuem una experiència aleatòria composta que consisteix en extreure, en primer lloc, una bolla de l'urna, i en segon lloc, tirar una moneda.

a. Quin és l'espai mostral d'aquesta experiència aleatòria?
b. Què val la probabilitat de cada succés

Exercici **216.** Es llancen enlaire tres monedes i se n'observa la cara superior. Calculeu la probabilitat de:

a. Obtenir 3 cares
b. Obtenir exactament 2 creus
c. Obtenir almenys una cara

Activitat **217.** (DNI duplicats) Pot passar que dues persones tenguin el mateix DNI? Quina probabilitat tenim que passi?

Exercici **218.** Tenim una urna amb tres bolles blaves i dues bolles verdes. Extreiem una bolla, *no* la tornem a l'urna i en tornem a extreure una altra.

a. Quina és la probabilitat que les dues boles siguin blaves?
b. I que siguin verdes?
c. I que n'hi hagi una de cada color?

Exercici **219.** En un concurs, a un participant que ha quedat eliminat se li dóna una última oportunitat. Amb els ulls embenats, ha de triar una de les urnes següents a les quals hi ha boles blanques i boles negres, i treure una bola d'aquesta urna:

a. L'urna 1 conté 3 boles blanques i 4 boles negres

b. L'urna 2 conté 2 boles blanques i 1 bola negra

Treure una bola blanca li permet continuar en el concurs. Quina és la probabilitat de què pugui continuar?

Exercici **220.** Una de les proves d'unes oposicions consisteix a desenvolupar un tema dels setanta que componen el temari. El dia de la prova s'extreuen dues boles d'una bossa que conté setanta boles numerades de l'1 al 70. Els participants han de triar un dels dos temes corresponents a les boles que han sortit i desenvolupar-lo.
Si un participant ha estudiat 25 temes, quina és la probabilitat que almenys una de les dues boles que s'extreuen correspongui a un dels temes estudiats?

Exercici **221.** S'extreuen dues cartes d'una baralla espanyola de 48 cartes sense devolució. Quina és la probabilitat que s'obtinguin dos reis?

Exercici **222.** En una capsa hi ha tres monedes. La primera és normal, la segona conté dues creus i la tercera està trucada de manera que la probabilitat que surti cara és 1/4. Si s'agafa una moneda de la capsa a l'atzar i es llança, quina és la probabilitat que surti creu? I que surti cara?

Exercici **223.** En una reunió hi ha quinze homes i vint dones. Sabem que hi ha cinc homes fumadors i quatre dones fumadores. Si triem una persona de la reunió a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui una dona fumadora?

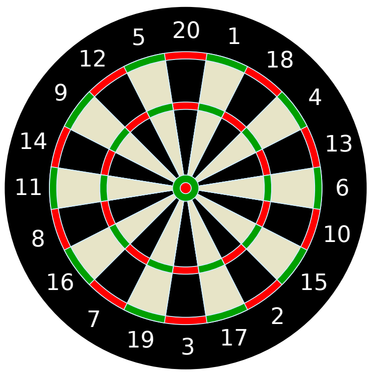
Exercici **224.** En un examen hi ha dues preguntes de tipus test amb quatre respostes possibles cadascuna, de les quals només una és correcta. Si triem les respostes d'aquestes dues preguntes a l'atzar, quina probabilitat tenim d'encertar-les totes dues? I d'encertar-ne almenys una?

Exercici **225.** (El *viciós* del 7) Una persona decideix sempre jugar al seu nombre preferit, el 7. En una ocasió li ofereixen quatre jocs:

Joc 1 Tirar dos daus i sumar les seves puntuacions	Joc 2 Jugar a una ruleta dividida en vuit sectors iguals
Joc 3 Treure tres cartes d'una baralla de cartes espanyola i sumar-les (les figures valen 1/2)	Joc 4 Tirar dos daus i multiplicar els seus resultats

Quin joc triaríeu si fóssiu aquest *viciós*. Quin evitaríeu?

Exercici **226.** (encertar la diana) Quina és la probabilitat de què una persona faci com a mínim 10 punts al dards en una sola tirada? Suposeu que el dard mai acaba fora del tauler.



Què passaria si tiràssim dos cops?

Exercici **227.** En una bossa hi ha boles etiquetades de la manera següent: 1, 2, 2, 3, 3. Extraiem primer una bola, la tornem i n'extraiem una altra. Calculeu les probabilitats següents: $p(1,1)$, $p(1,2)$, $p(1,3)$.

Exercici **228.** Si per a la segona extracció de l'exercici anterior (exercici 227) no tornem la primera bola, quin és el valor de les probabilitats ara?

Exercici **229.** Calculeu les probabilitats d'obtenir dos oros en extreure dues cartes d'una baralla espanyola en els casos de tornar i de no tornar la primera carta a la baralla abans d'extreure la segona.

Exercici **230.** Tenim un dau de 10 cares de la forma 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, i dues urnes: la primera amb tres boles vermelles i dues boles verdes i la segona amb una bola vermella i quatre boles verdes. Tirem el dau, si surt 1 extraiem una bola de la primera urna, i si surt 2, de la segona. Quina és la probabilitat d'extreure una bola vermella? I una verda?

Exercici **231.** Tenim les urnes següents:

- una urna amb boles numerades amb els nombres 1, 1, 2, 2, 2
- una urna I amb dues boles gravades amb les lletres R i V
- i, finalment, una urna II, amb boles gravades amb N, N, R, V.

Extraiem un nombre de la primera urna per decidir quina urna escollim. Llavors, prenem una bola de l'urna corresponent. Quina és la probabilitat d'obtenir la lletra R?

Exercici **232.** Llancem dos daus cúbics. Quina probabilitat hi ha d'obtenir menys de 8?

Exercici **233.** Llancem dues monedes. Si surten dues cares extraiem una bola d'una urna amb 3 boles blanques i 7 boles negres i en cas contrari, d'una urna amb 4 boles blanques i 6 boles negres. Quina és la probabilitat de treure una bola blanca?

Exercici **234.** Tirem un dau de 10 cares. Si surt menor que 7 extraiem una carta, i en cas contrari dues, tornant la primera abans de treure la segona. Quina probabilitat hi ha en d'obtenir alguna carta del coll d'oros?

3.3.4 Probabilitat condicionada

Exercici **235.** Un cop fet l'experiment de l'exercici 231, ha resultat ser V. Quina és la probabilitat que hagués estat extreta de l'urna I? I de la II?

Exercici **236.** Es tiren dues monedes. Si surten dues cares es tira un dau que té les cares numerades amb els nombres 1, 1, 1, 2, 2, 2, i sinó, es tira el dau que té les cares numerades amb els nombres 1, 1, 2, 2, 3, 3. Quina és la probabilitat d'obtenir un 1? Quan en surt un, amb quina probabilitat han sortit també dues cares?

Exercici 237. Deu amics organitzen un viatge i tria la destinació un d'ells per sorteig. Sis volen anar a la costa i quatre a l'interior. Dels primers, dos volen anar al nord i quatre al sud. Dels d'interior, la meitat prefereixen el nord i l'altra meitat, el sud.

- Trobeu la probabilitat d'anar a la costa del nord.
- Quina és la probabilitat d'anar al nord?
- Si van al nord, quina és probabilitat que sigui a la costa?

Exercici 238. En un col · legi el 60% dels alumnes juguen a futbol; el 50% a bàsquet i el 90%, a un esport o l'altre. Quina probabilitat hi ha que un estudiant del col · legi practiqui tots dos esports?
Si sabem que la persona triada juga a futbol, quina probabilitat hi ha de què jugui també a bàsquet?

Exercici 239. En una classe hi ha 40 persones, distribuïdes de la manera següent:

Sexe	Dretans	Esquerrans
Dona	15	4
Home	15	6

Calculeu les probabilitats següents:

a. Una persona sigui al · lota
b. Una persona sigui dretana
c. Una al · lota sigui esquerrana
d. Sigui al · lot sabent que és esquerrà

Exercici 240. ($\star$) En una classe d'estudiants, el 15% estudia alemany, el 30% estudia francès i el 10% ambdues materies.

a. Són independients els esdeveniments d'estudiar alemany i estudiar francès?
b. Si es tria un estudiant a l'atzar, calculeu la probabilitat de què no estudiï francès ni alemany
c. Calculeu la probabilitat de què, triat un estudiant que estudia francès, aquest no estudiï alemany

Exercici 241. Un lladre a l'escapar de la policia ho pot fer pels carrers A, B o C amb probabilitats del $0,25$, $0,6$ i $0,15$, respectivament. La probabilitat de ser agafat són de $0,4$, $0,5$ i $0,6$ si intenta escapar pels carrers A, B i C respectivament.

a. Trobeu la probabilitat de què la policia agafi el lladre
b. Si el lladre finalment ha estat agafat, quina és la probabilitat de què ho hagi estat en el carrer A?

Exercici 242. D'una amb 4 bolas blanques i 2 negres s'extreuen dues boles a l'atzar, succesivament i sense reemplaçament:

a. Quina és la probabilitat de què les boles extretes siguin blanques?

b. Si la segona ha resultat ser negra, quina és la probabilitat de què la primera també ho hagi estat?

Exercici 243. En una oficina, el 70% dels empleats són asturians. D'entre aquests, el 50% són homes, mentre que dels que no són asturians, només són homes un 20%.

a. Quin percentatge d'empleats són asturians i dones?
b. Calculeu la probabilitat de què un empleat de la oficina sigui dona
c. Si en Fernando treballa a l'oficina, quina és la probabilitat de què sigui asturià?

Exercici 244. Un jugador de bàsquet acostuma a encertar el 80% dels seus tirs des del punt de llançament de personals. Si tira tres vegades:

a. Calculeu la probabilitat de què encesti dues vegades
b. Calculeu la probabilitat de què no encesta cap pic
c. Sabent que ha encertat en el tercer tir, quina és la probabilitat de què hagi encertat en el segon tir?

Exercici 245. Una urna conté 4 bolles blanques, 1 de vermella i 5 de negres. Es considera l'experiment aleatori de treure dues bolles a l'atzar i anotar el color. Calcula les probabilitats:

a. Que surti una bolla blanca i negra
b. Que no surti una bolla vermella en cap cas
c. Que la primera bolla sigui negra sabent que la segona és blanca

Exercici 246. Si dos esdeveniments A i B verifiquen que la suma de les seves dues probabilitats és igual a 1 (és a dir $p(A) + p(B) = 1$), són:

a. compatibles
b. contraris
c. incompatibles
d. no es pot saber?

Exercici 247. En una classe de 4t d'ESO hi ha 8 al · lots i 12 al · lotes. Cinc al · lots i vuit al · lotes llegeixen habitualment el diari. Si triem a l'atzar un estudiant, calcula la probabilitat de què:

a. Llegeixi el diari i sigui home
b. No llegeixi el diari o sigui home

c. Sigui home sabent que llegeix el diari
d. Llegeixi el diari saben que és home

Exercici **248.** En una capsa de bombons hi ha 5 bombons amb un embolcall blanc i 15 amb un de negre. Hi ha dotze bombons, 2 blancs i 10 negres, que estan farcits de licor. Si treiem un bombó a l'atzar, calcula la probabilitat de què el bombó

a. Tengui l'embolcall negre i sigui farcit
b. Tengui l'embolcall blanc i no sigui farcit
c. Tengui l'embolcall blanc sabent que és farcit
d. Sigui farcit sabent que té l'embolcall negre.

Exercici **249.** En una urna tenim 2 bolles blanques i 2 de blaves. Extreiem dues bolles *sense remplaçament*. Calcula la probabilitat de què la primera bolla sigui blava sabent que la segona és blava.

Exercici **250.** En una guarderia hi ha 10 nins i 12 nines. Si 6 nins saben caminar i 6 nines *no* en saben, calcula la probabilitat que, si triem una persona a l'atzar, sigui nin i no sàpiga caminar
Quina probabilitat hi ha de què sabent que no sap caminar, sigui nin?

Exercici **251.** En un dinar, hi ha 28 homes i 32 dones. Han triat carn 16 homes i 20 dones i la resta ha triat peix. Si triem una persona a l'atzar, calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:

a. Que sigui home
b. Que hagi menjat peix
c. Que sigui home i hagi menjat peix
d. Que hagi menjat peix sabent que hem elegit un home

Exercici **252.** A una classe hi ha 25 alumnes: 12 noies (8 aproven Matemàtiques i 4 no) i 13 nois (7 aproven Matemàtiques i 6 no). Escollim una persona a l'atzar. Determineu

a. la probabilitat de què aprovi Matemàtiques
b. la probabilitat de què aprovi Matemàtiques sabent que és una dona
c. la probabilitat de què sigui dona si aprova Matemàtiques

Exercici **253.** En un centre escolar hi ha 1000 alumnes repartits així:

Característica	Nois	Noies
Usa ulleres	146	135
No usen ulleres	368	351
Juga a futbol	335	53
Juguen a bàsquet	229	169
No juguen ni a futbol ni a bàsquet	97	298

Caula la probabilitat de què si triem una persona a l'atzar, aquesta:

a. Sigui home
b. Jugui a futbol
c. Sigui una dona que juga a bàsquet
d. Sigui un home que juga a bàsquet i futbol
e. Sigui una dona que juga a futbol però no a bàsquet

- Exercici 182: $D_4 = \{2,4\}$, $D_6 = \{2,4,6\}$, $D_{10} = \{2,4,6,8\}$, $D_{12} = \{2,4,6,8,10,12\}$ i $D_{20} = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$
- Exercici 184: (a.) L’esdeveniment impossible $= \emptyset$, (b.) l’esdeveniment segur $= \{1,2,3,4\}$ (c.) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$
- Exercici 185: $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.
- Exercici 186: (a.) 12 (b.) 6 (c.) 6
- Exercici 187: (a.) 1 carta (b.) 13 (c.) 1 (d.) 12 (e.) 19 (f.) 3
- Exercici 188: (a.) $\{2,4,6\}$ (b.) $\{1,3,5\}$ (c.) $\{4,6\}$ (d.) $\{2,4,5,6\}$ (e.) $\{2\}$ (f.) $\{1,2,3,5\}$
- Exercici 194: (a.) $1/3$, (b.) $1/2$, (c.) $1/2$, (d.) $2/3$, (e.) $2/3$, (f.) $1/6$, (g.) 0, (h.) $2/3$
- Exercici 195: (a.) $1/12$, (b.) $1/16$, (c.) $1/2$, (d.) $7/16$, (e.) 0, (f.) $5/16$
- Exercici 197: $1/200$, (a.) $1/10$
- Exercici 198: (a.) $1/10$, (b.) $3/5$, (c.) $2/5$, (d.) $1/5$, (e.) $2/5$, (f.) $2/5$
- Exercici 201: Prop de 75 vegades l’1 i prop de 25 vegades el 2.
- Exercici 202: $p(1) = 0,1$, $p(2) = 0,2$, $p(3) = 0,3$ i $p(4) = 0,4$.
- Exercici 203: $p(\text{vermell}) = 0,3$, $p(\text{verd}) = 0,4$, $p(\text{negre}) = 0,2$ i $p(\text{blau}) = 0,1$.
- Exercici 204: En tres, $p(\text{dues cares}) = 3/8$. En 4, $p(\text{dues cares}) = 6/16 = 3/8$.
- Exercici 205: $p(\text{“1”}) = 0,7$, $p(\text{“3”}) = 0,2$, $p(\text{“4”}) = 0,3$, $p(\text{“5”}) = 0,4$, $p(\text{“6”}) = 0,1$, $p(\text{“7”}) = 0,5$ i $p(\text{“8”}) = 0,9$.
- Exercici 206:

Ruleta	Taronja	Verd	Blau	Gris
1	0, 3	0, 25	0, 15	0, 3
2	0, 4	0, 3	0, 15	0, 15
3	0, 1	0, 2	0, 1	0, 6
4	0, 35	0, 3	0, 15	0, 2

- Exercici 208 i 209 Amb aquesta gràfica, podem trobar les freqüències relatives i amb la llei dels grans nombres la seva probabilitat
- Exercici 212: (a.) $1/36$, (b.) $5/36$, (c.) $1/9$
- Exercici 213: $1/12$
- Exercici 214: (a.) $1/10$, (b.) $3/5$, (c.) $2/5$, (d.) $9/10$
- Exercici 219: $23/42$
- Exercici 220: $95/161$

- Exercici 221: $1/188$
- Exercici 222: $p(\text{creu}) = 3/4$, $p(\text{cara}) = 1/4$.
- Exercici 223: $4/35$
- Exercici 224: (a.) $1/6$, (b.) $7/16$
- Exercici 227: $p(1,1) = 1/25$, $p(1,2) = 2/25$, $p(1,3) = 2/25$.
- Exercici 228: $p(1,1) = 0$, $p(1,2) = 0,1$, $p(1,3) = 0,1$
- Exercici 229: Amb devolució, $p(2 \text{ oros}) = 1/16$; sense devolució $p(2 \text{ oros}) = 9/156$
- Exercici 230: $p(R) = 0,36$, $p(V) = 0,64$
- Exercici 231: $p(R \cup N) = 0,65$
- Exercici 235:$p(A \mid V) = 0,57$, $p(B \mid V) = 0,43$
- Exercici 236: $p(1) = 3/8$, $p(\text{dues cares}) = 1/3$
- Exercici 237: (a.) $0,2$, (b.) $0,4$, (c.) $0,5$

Apèndix A Seccions còniques

A.1 El con

El con és un cos geomètric que s'obté unint un punt V, el vèrtex del con, amb la vora d'un cercle, que forma la seva base (figura A.1). L'aresta del con s'anomena *generatriu*.

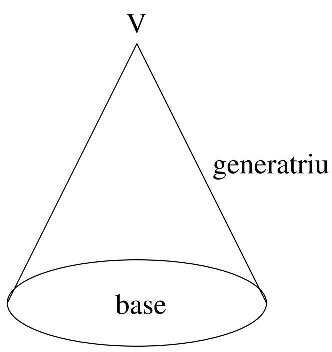


Figura A.1 Un con de vèrtex V

Es poden unir dos cons vèrtex contra vèrtex i allargar-los indefinidament, amb el que s'obté un con doble, de superfície infinita (figura A.2):

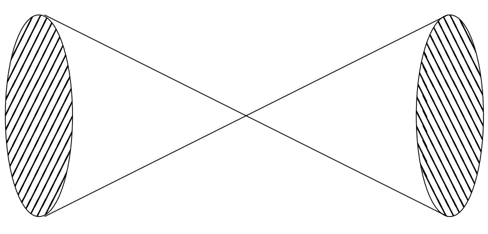


Figura A.2 Un con doble (infinit)

El con doble es pot veure com un cos de revolució que es produeix al girar la recta de la generatriu sobre l'eix del con (figura A.3):

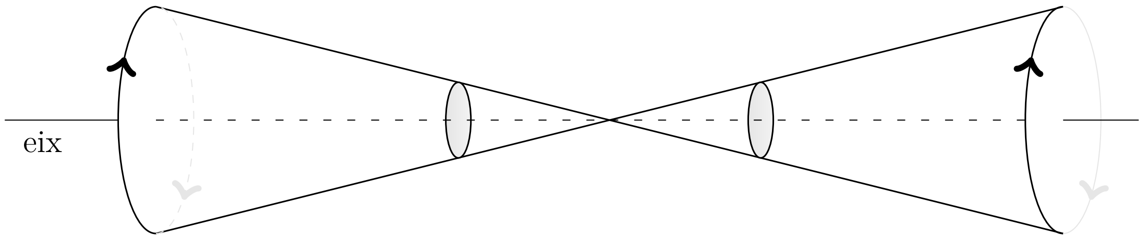


Figura A.3 Un con com a cos de revolució

A.2 La circumferència, l'el · lipse, la paràbola i la hipèrbola

Les *seccions còniques* o simplement *còniques* són corbes que s'obtenen de tallar un con doble amb un pla. Segons com sigui la inclinació del pla, aquest tall variarà de forma i donarà lloc a corbes diferents.

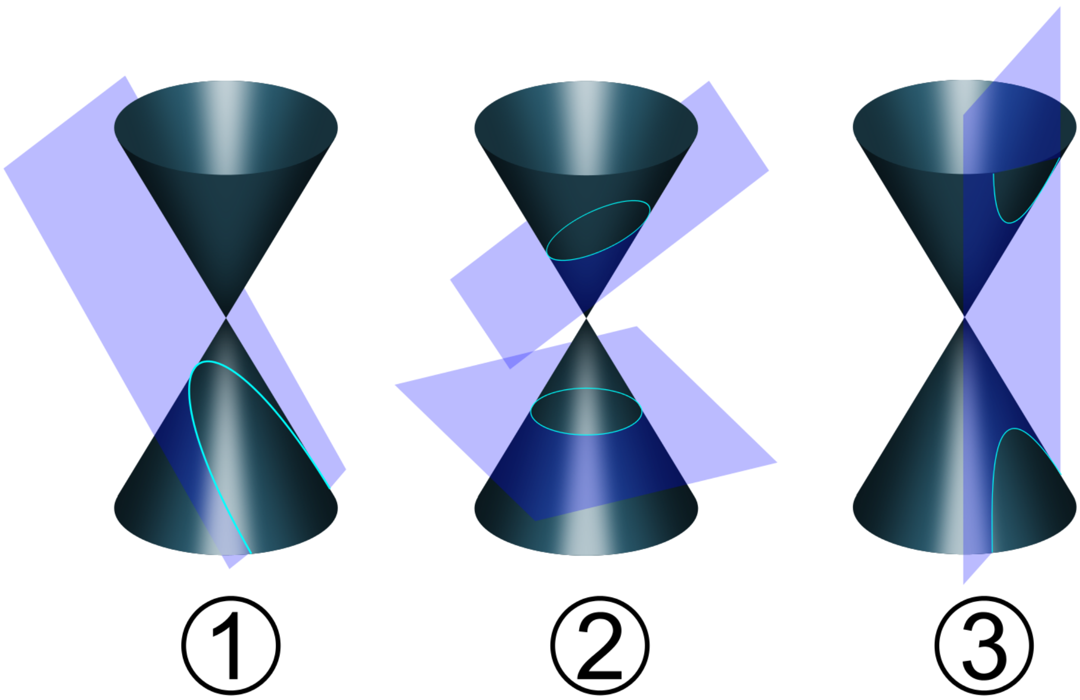


Figura A.4 Possibles talls d'un con amb un pla

- Si el con es talla perpendicular al seu eix, aleshores obtenim una *circumferència* (figura A.4-2)

- Obtenim una *el · lipse* si es talla el con amb un angle menor que 90 graus però major que l'angle de la generatriu del con (figura A.4-2)

- La *paràbola* s'obté quan la inclinació del pla és exactament la mateixa que la generatriu del con (figura A.4-1)

- Finalment, quan la inclinació és menor que l'angle de la recta generatriu, llavors s'obté una *hipèrbola* (figura A.4-3)

A.2.1 Referències externes

1. Visualització de les seccions còniques 1: https://www.youtube.com/watch?v=GDHNoQHQmtQ
2. Visualització de les seccions còniques 2: https://www.youtube.com/watch?v=bFOnicn4bbg
3. Visualització de les seccions còniques 3. Simulació amb SketckUp (anglès): https://www.youtube.com/watch?v=heB2s6p0Tms
4. Visualització de les seccions còniques com a la llum d'una llinterna: https://www.youtube.com/watch?v=yuJ3kydUUfM
5. Visualització de les seccions còniques com a les ombres d'una pilota 2: http://www.youtube.com/watch?v=xeKYNbVGEpw

A.3 Les equacions de les seccions còniques

Les seccions còniques corresponen a corbes algebraiques de grau 2, que tenen la forma general

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{A.1}$$

encara que hi ha formes simplicades o *canòniques*, que s'empren usualment:

a. La circumferència la defineix l'equació: $x^2 + y^2 = r^2$, on r és el radi

b. L'el · lipse la defineix l'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

c. La paràbola la defineix l'equació $y = ax^2 + b^2 + c$

d. La hipèrbola la defineix l'equació $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Es poden classificar les seccions còniques segons el *discriminant* $D = b^2 - 4ac$ de l'equació (A.1):

- Si $D < 0$, llavors l'equació A.1 representa una el · lipse. El cas especial de la circumferència s'obté quan $a = c$ i $b = 0$.
- Si $D = 0$, llavors l'equació representa una paràbola
- Si $D > 0$, llavors l'equació representa una hipèrbola

A.4 Construcció geomètrica de les còniques

Cadascuna de les còniques es pot definir de manera alternativa de la forma següent (figura A.5):

a. Donat un punt O, anomenat *centre*, i un nombre real $r > 0$, que s'anomena *radi*, la *circumferència de radi r i centre O* és el conjunt de punts que es troben a distància r del punt O.

b. Donats dos punts F_1 i F_2, anomenats *focus*, i un nombre real $k > 0$, l'*el · lipse* és el conjunt de punts tals que la suma de les distàncies a F_1 i a F_2 és igual a k, és a dir,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k,$$

per a qualsevol punt de l'el · lipse.

c. Donats dos punts F_1 i F_2, anomentats *focus*, i un nombre real $k > 0$, la *hipèrbola* és el conjunt de punts tals que la diferència de les distàncies a F_1 i a F_2 és igual a k, és a dir,

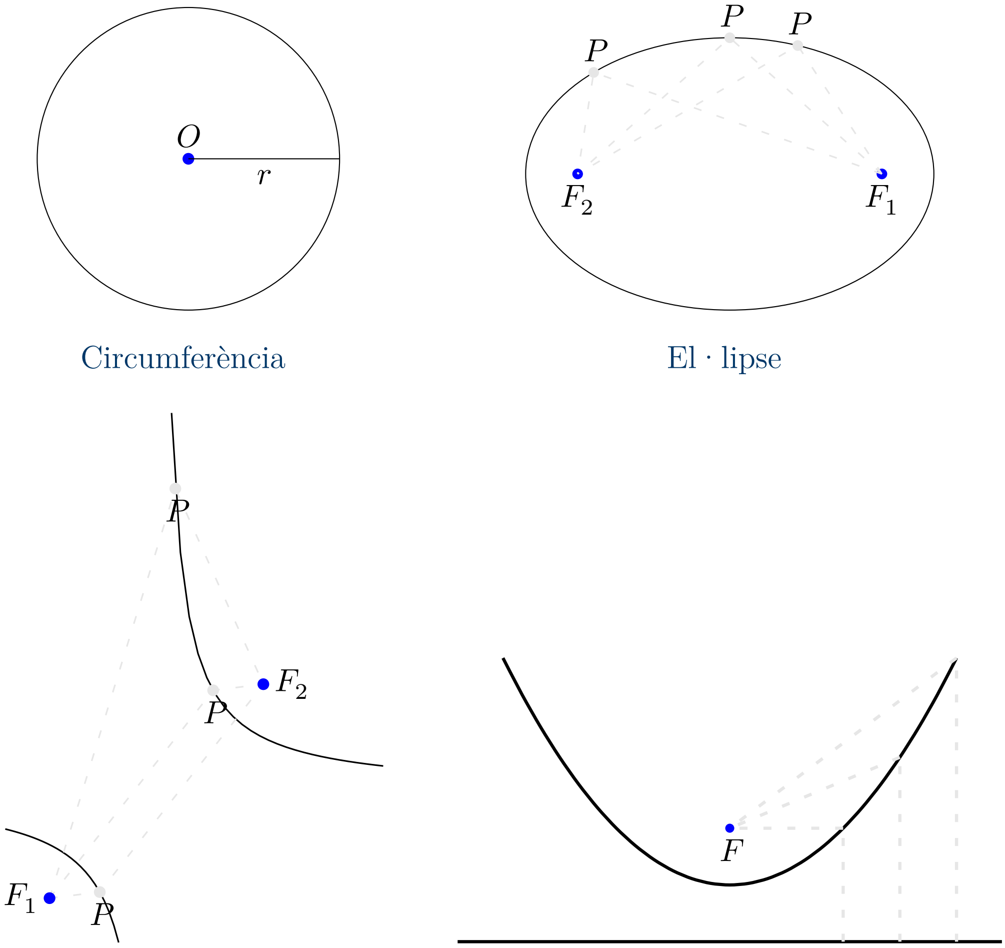
$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = k,$$

per a qualsevol punt de la hipèrbola.

d. Donats un punt F, anomenat *focus*, i una recta r, anomenada *directriu*, la *paràbola* és el conjunt de punts tals que equidisten a F i a r, és a dir,

$$d(P, F) = d(P, r),$$

per a qualsevol punt P de la paràbola.



Circumferència El · lipse

Hipèrbola Paràbola

Figura A.5 Definició geomètrica de les còniques

A.4.1 Focus, directriu i excentricitat

Donats una recta, anomenada *directriu*, i un punt F, anomenat *focus*, que no pertanyi a la recta i un nombre real positiu e, anomenat *excentricitat*, podem trobar el conjunt de punts P tals que

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, r)}. \tag{A.2}$$

Hi ha una correspondència entre aquests conjunts de punts i les seccions còniques. A més, segons l'excentricitat e, s'obtenen diferents còniques (figura A.6):

- Si $0 < e < 1$, aleshores s'obté una el · lipse
- Si $e = 1$, s'obté una paràbola
- Si $e > 1$, s'obté una hipèrbola

El cas de la circumferència correspon al cas en què $e = 0$ en què podem imaginar que la directriu està infinitament enfora del centre de la circumferència (seria el cas límit de l'equació (A.2) quan $d(P, r)$ tendeix a l'infinit).

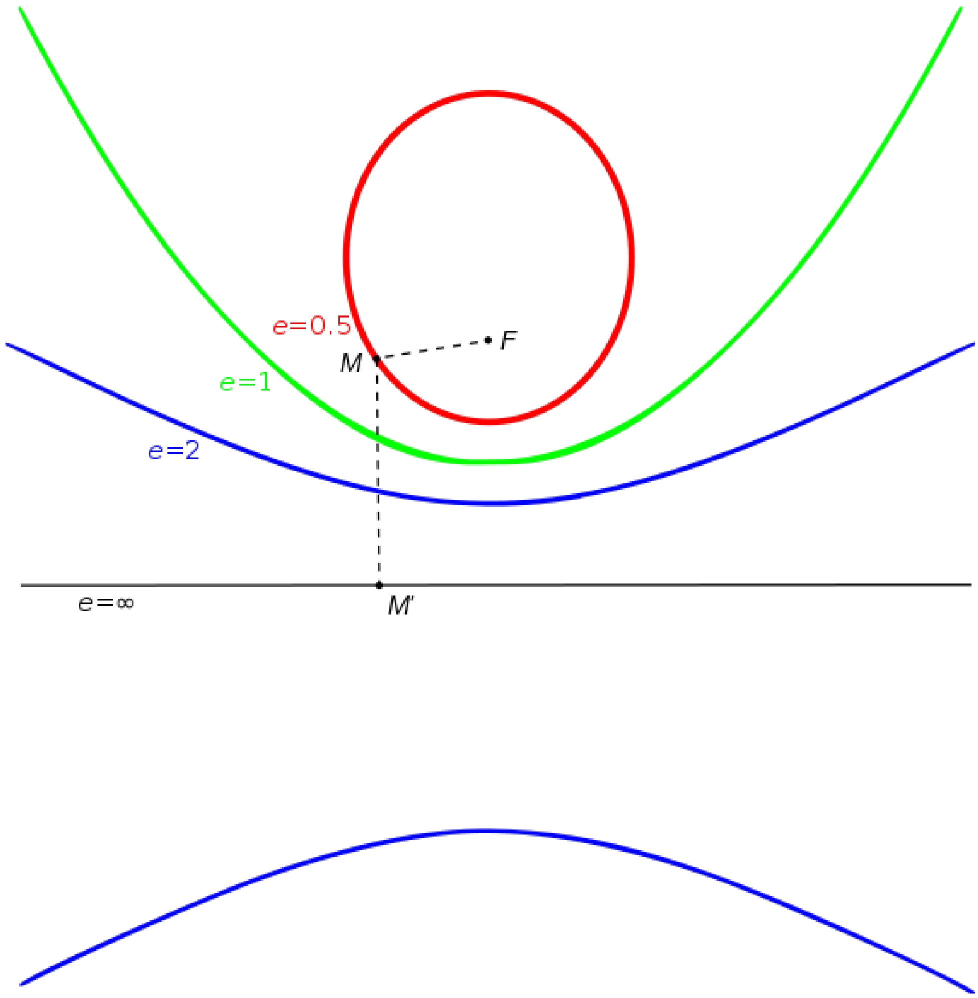


Figura A.6 Excentricitat de diverses còniques

A.4.2 Referències externes

1. La generació de les seccions còniques depenent de l'excentricitat (anglès):
   http://www.youtube.com/watch?v=fRAeGvjiM1A

Apèndix B Recordatori d'àrees i volums

B.1 Definicions geomètriques

1. Un *polígon* és una figura plana composta per un nombre finit de segments rectes que s'uneixen format una figura tancada. Els seus punts s'anomenen *vèrtexos* i els segments *costats*.

2. El *perímetre* d'un polígon és la suma de les longituds dels seus costats

3. Un *triangle* és un polígon que té tres costats.

4. Un *rectangle* és un polígon que té quatre costats que formen angles de 90º. Quan en un rectangle, tots els costats són iguals, aquests formen un *quadrat*

5. En general, un polígon de quatre costats s'anomena *quadrilàter*. Casos especials dels quadrilàter són el rectangle, el quadrat, el rombe, el romboide i el trapezi.

6. El *trapezi* és un quadrilàter que té un parell de costats paral · lels.

7. Un quadrilàter amb dos parells de costats paral · lels s'anomena *paral · lelogram*. Casos especials d'un paral · lelogram són el rombe, el romboide, el rectangle i el quadrat.

8. Un *rombe* és un paral · lelogram que té tots els costats iguals

9. Un *romboide* és un paral · lelogram tal que els costats oposats són paral · lels i els costats adjacents no són iguals i els angles no són rectes

10. Un rectangle és un paral · lelogram que té tots els angles rectes. El quadrat és el cas particular amb tots els costats iguals.

11. Quan tots els costats d'un polígon són iguals, aquest s'anomena *polígon regular*.

12. Segons el nombre de costats, el polígon pot ser un *pentàgon* (de cinc costats), un *hexagon* (de sis costats), un *heptàgon* (de set costats), etc.

13. L'*apotema* d'un polígon regular és el segment que va des del centre del polígon a la meitat d'un costat

14. Un *cercle* és la porció de pla dels punts que estan a distància menor o igual que un nombre fixat, que s'anomena *radi*. La *circumferència* és la vora del cercle

15. Un *políedre* és un cos geomètric delimitat per un nombre finit de cares poligonals. Les *arestes* són els costats dels polígons que el limiten. Els *vèrtexs* són els punts comuns a dues o més cares.

16. Un *prisma* és un políedre que té dues cares iguals i paral · leles (les *bases*) i cert nombre de cares laterals que són paral · lelograms (les *cares laterals*). Si les cares laterals no formen un angle de 90º amb les bases es parla de *prismes oblics*. Si les cares laterals són rectangles s'anomena *prisma rectangular*.

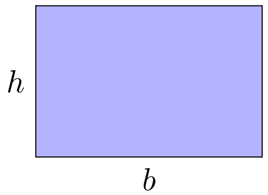
17. Una *piràmide* és un políedre que té per base un polígon i les seves cares laterals són triangles que tenen un vèrtex comú, el qual s'anomena *vèrtex* de la piràmide.

18. Un *cilindre* és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

19. Un *con* és un cos de revolució que s'obté en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets. El *costat* que va del seu vèrtex a la base (un cercle) s'anomena *generatriu*.

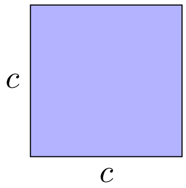
20. Una *esfera* és un cos de revolució que s'obté en girar un semicercle al voltant del seu diàmetre. Equivalentment són els punts de l'espai que estan a distància menor o igual que el radi d'aquest semicercle.

B.2 Àrees de les figures planes més usuals



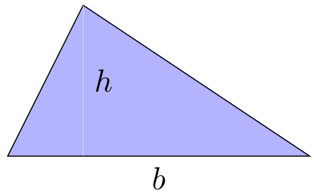
1. Rectangle

$A = b \cdot h$



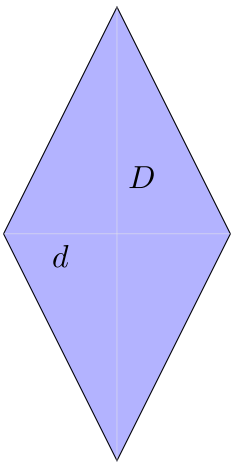
2. Quadrat

$A = c \cdot c = c^2$



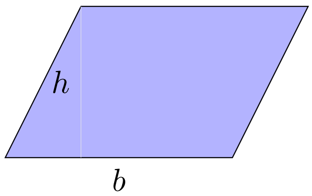
3. Triangle

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



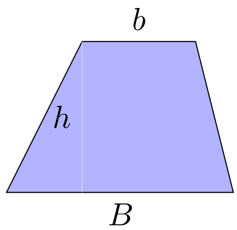
4. Rombe

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$



5. Romboide

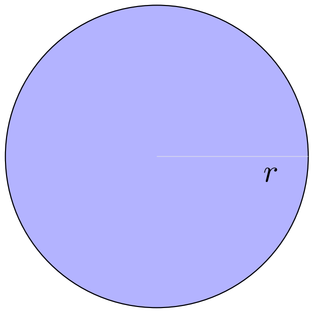
$A = b \cdot h$



6. Trapezi

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

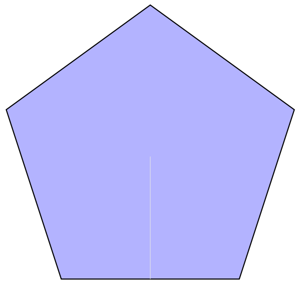
Taula B.1a Àrees de les figures planes més usuals



7. Cercle

$A = \pi \cdot r^2$

$L = 2 \cdot \pi \cdot r$

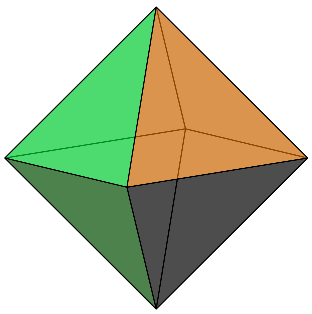


8. Polígon regular

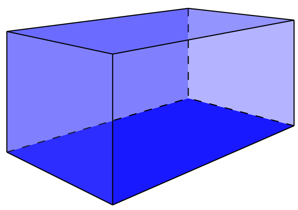
$$A = \frac{\mathrm{P} \cdot \mathrm{a}}{2}$$

Taula B.1b Àrees de les figures planes més usuals

B.3 Volums i àrees dels cossos geomètrics més usuals

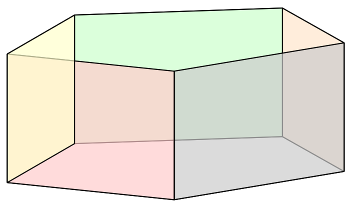


1. Políedre
El volum depèn del
tipus de políedre



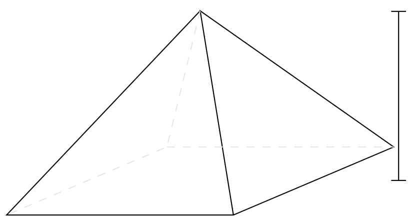
2. Ortoedre

$$A = A_L + 2 \cdot A_B$$
$$V = A_B \cdot h$$



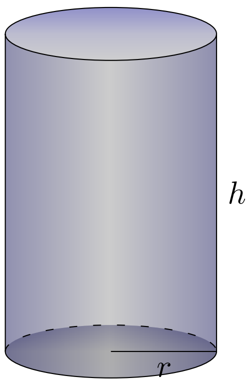
3. Prisme

$$A = A_L + 2 \cdot A_B$$
$$V = A_B \cdot h$$



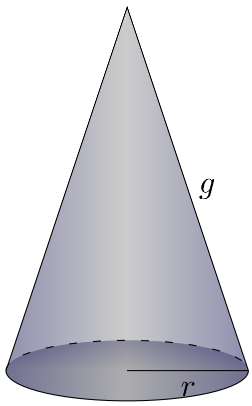
4. Piràmide

$$A = A_B + A_L$$
$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$



5. Cilindre

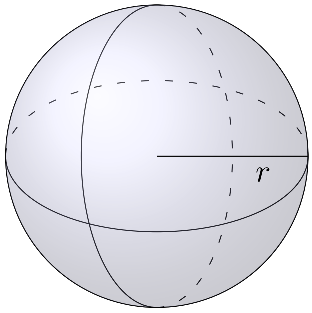
$$\begin{aligned} A &= A_L + 2 \cdot A_B \\ &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$
$$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



6. Con

$$\begin{aligned} A &= A_L + A_B \\ &= \pi \cdot g \cdot r + \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$
$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Taula B.2a Volums (i algunes àrees) dels cossos geomètrics més usuals



7. Esfera

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Taula B.2b Volums (i algunes àrees) dels cossos geomètrics més usuals

Nota: si desenvolupem el con, A_L és l'àrea d'un sector circular de longitud $2\pi r$ i radi g.

Apèndix C Resum de teoria

C.1 Experiments aleatoris

C.1.1 Espai mostral i successos

- *Experiment aleatori* $\longrightarrow$ un experiment del qual no podem predir-ne el resultat. Hi intervé la sort o l'atzar.
- *Experiment determinista* $\longrightarrow$ quan el resultat de l'experiment es pot conèixer abans de dur-lo a terme. No hi intervé la sort.
- *Espai mostral* $\longrightarrow$ és el conjunt de tots els possibles resultats
- Un *esdeveniment* (o *succés*) $\longrightarrow$ és qualsevol subconjunt de l'espai mostral (o sigui, una part de l'espai mostral).
  - *Esdeveniment elemental* $\longrightarrow$ és cadascun dels possibles resultats d'un experiment aleatori. És a dir, són els elements de l'espai mostral
  - *Esdeveniment compost* $\longrightarrow$ està format per dos o més esdeveniments simples. És a dir, és un conjunt de dos o més elements
  - Existeix un *esdeveniment segur*, que es verifica sempre, que és igual a l'espai mostral i un *esdeveniment impossible*, que mai pot ocorre, el qual és igual al conjunt buit (el conjunt que no té cap element), el qual simbolitzem per $\emptyset$.

Exemple **5.** Si tirem un dau, l'espai mostral és $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, els esdeveniments elementals són:

- "treure un 1" = $\{1\}$
- "treure un 2" = $\{2\}$
- "treure un 3" = $\{3\}$
- "treure un 4" = $\{4\}$
- "treure un 5" = $\{5\}$
- "treure un 6" = $\{6\}$

I un esdeveniment compost és "treure 5 o 6" = $\{5, 6\}$. I un altre seria "treure parell" = $\{2, 4, 6\}$.

C.1.2 Operacions amb esdeveniments

- La *unió* de dos esdeveniments A i $B \longrightarrow$ és l'esdeveniment format per cada element que hi ha a A o en B. S'escriu $A \cup B$. Que passi A o B es el mateix que passi $A \cup B$.
- La *intersecció* de dos esdeveniments A i $B \longrightarrow$ és l'esdeveniment format per cada element que apareix simultàniament a A i a B. S'escriu $A \cap B$. Que passi A i B a la vegada és el mateix que passi $A \cap B$.
- La *diferència* entre A i B, que s'escriu $A \setminus B$, és l'esdeveniment format pels elements que pertanyen a A però que no pertanyen a B.
- *L'esdeveniment contrari* (o *complementari*) d'un esdeveniment $A \longrightarrow$ és l'esdeveniment format per tots els elements de l'espai mostral que no estan a A. S'escriu A^c o $\overline{A}$.

Exemple **6.** En l'experiment de llançar un dau i mirar el resultat, tenim que $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si agafam A = "que surti parell" i B = "que surti un nombre menor que 5", tenim que:

- $A \cup B$ = "que surti parell o menor que 5" $= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Per tant, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A \cap B$ = "que surti parell i menor que 5" $= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$. Per tant, $A \cap B = \{2, 4\}$.
- $A \setminus B = \{6\}$
- $B \setminus A = \{1, 2\}$
- A^c = el contrari de què surti parell $= \{1, 3, 5\}$
- B^c = el contrari de què surti un nombre menor que 5 $= \{6\}$

Quan dos esdeveniments es poden donar simultàniament diem que són *compatibles*. En cas contrari, es diuen *incompatibles* (o *mútuament excloents*).
Dos esdeveniments A i B són compatibles quan $A \cap B \neq \emptyset$. Si $A \cap B = \emptyset$, aleshores A i B són incompatibles.

Exemple **7.** En l'experiment de llançar un dau, si consideram els esdeveniments A = "Sortir parell" i B = "Sortir múltiple de 3" i C = "Sortir potència de 2", tenim que

- A i B són compatibles perquè 6 és parell i múltiple de 3 a la vegada
- B i C són incompatibles perquè no hi ha cap nombre múltiple de 3 que a la vegada sigui potència de 2 (cap nombre està a la vegada a $\{3, 6\}$ i $\{2, 4\}$).

C.2 Probabilitat d'un esdeveniment

- La **probabilitat** d'un esdeveniment mesura la *facilitat* de què ocorri aquest esdeveniment. A cada esdeveniment se li assigna un nombre entre 0 i 1. Aquest nombre vendria a ser el tant per u de què pugui ocorre l'esdeveniment.
- La probabilitat de l'esdeveniment segur és sempre 1
- La probabilitat de l'esdeveniment impossible és sempre 0

En general, el càlcul de probabilitats és complicat si no es suposa que tots els esdeveniments elementals siguin *equiprobables*. Penseu en calcular la probabilitat de treure parell en un dau enbiaxat cap al 2. És molt més senzill si suposam un dau on totes les cares tenen la mateixa probabilitat. Els experiments on els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat es diuen *experiments regulars*.

C.2.1 Regla de Laplace

Per a calcular la probabilitat d'un esdeveniment A en un experiment regular, podem aplicar la regla següent:

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Exemple **8.** En l'experiment de llançar un dau, la probabilitat de l'esdeveniment $A =$ "que surti un nombre primer" és

$$p(A) = p(\{2, 3, 5\}) = 3/6 = 0,5$$

C.2.2 Llei dels grans nombres

Si repetim un experiment aleatori un nombre molt gran de vegades, les *freqüències relatives* de cada esdeveniment *s'aproximen a la seva probabilitat*.
D'aquesta manera, si tirem un dau moltes vegades (cents, milers, milions), cada vegada més les freqüències relatives del seus resultats s'aproximen als valor reals de la probabilitat. Això vol dir, en aquest exemple, que si tirem un dau moltes vegades,

$$\frac{\text{el nombre de vegades que ha sortit l'1}}{\text{nombre total de vegades que hem tirat el dau}}$$

s'aproximarà cada vegada més a $p(\text{"treure un 6"}) = \frac{1}{6}$.
El mateix passa amb els altres resultats: per exemple, el nombre de vegades que surt parell dividir entre el nombre total de vegades que hem tirat el dau s'atraca cada vegada més a 0,5.
Això serveix: (a.) Per a detectar si hi ha jocs trucats (b.) Per a estimar probabilitats que són molt difícils de calcular a la pràctica (per exemple, la probabilitat de què una peça sigui defectuosa, la probabilitat de què una persona tengui un accident de trànsit)

C.2.3 Propietats de la probabilitat

- La probabilitat de l'esdeveniment contrari és $p(A^c) = 1 - p(A)$
- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments és $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. En el cas de que els esdeveniments siguin incompatibles, aquesta probabilitat es transforma en $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

C.3 Probabilitat condicionada

Donats dos esdeveniments A i B, es defineix la *probabilitat de B condicionat a A*, i es denota $p(B \mid A)$, com la probabilitat que ocorri B quan sabem que ha passat A.
Per calcular-la s'empra les fórmules següents:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)},$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = p(B) \cdot p(A \mid B).$$

Dos esdeveniments A i B són *dependents* quan l'ocurrència d'un influeix en l'ocurrència de l'altre. Quan això no passa són *independents*.

- Si $p(B \mid A) = p(B) \Rightarrow A$ i B són independents.
- Si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow A$ i B són independents.

Referències