1 Pla cartesià

Exercici **1.** (a.) Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 4)$, $B = (4, 1)$, $C = (-5, 2)$, $D = (-3, -1)$, $E = (6, -3)$, $F = (0, 2)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades, i (b.) digueu a quin quadrant pertanyen.

Exercici **2.** Escriviu les coordendades dels punts següents (figura 1):

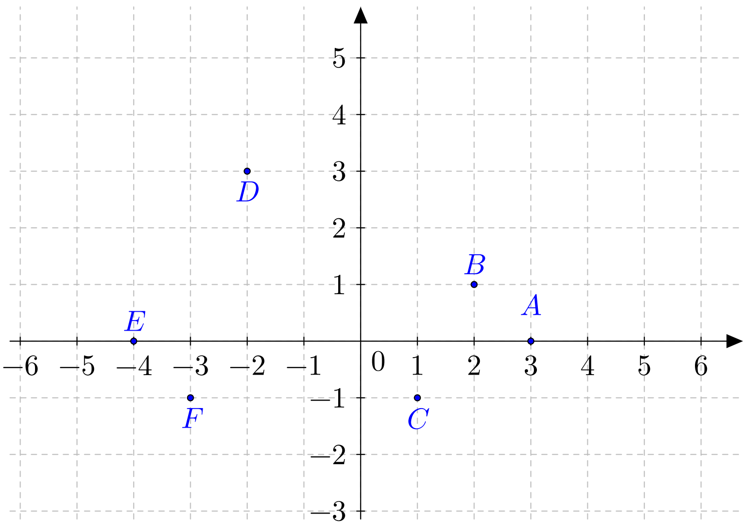


Figura 1 Punts al pla cartesià

Exercici **3.** Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, 1)$, $D = (2, 2)$, $E = (-1, 2)$, $F = (1, -2)$, $G = (0, 2)$, $H = (1, 0)$, $I = (0, 0)$, $F = (-2, -3)$. Digueu a quin quadrant pertanyen

Exercici **4.** Quines coordenades tenen els punts següents (figura 2):

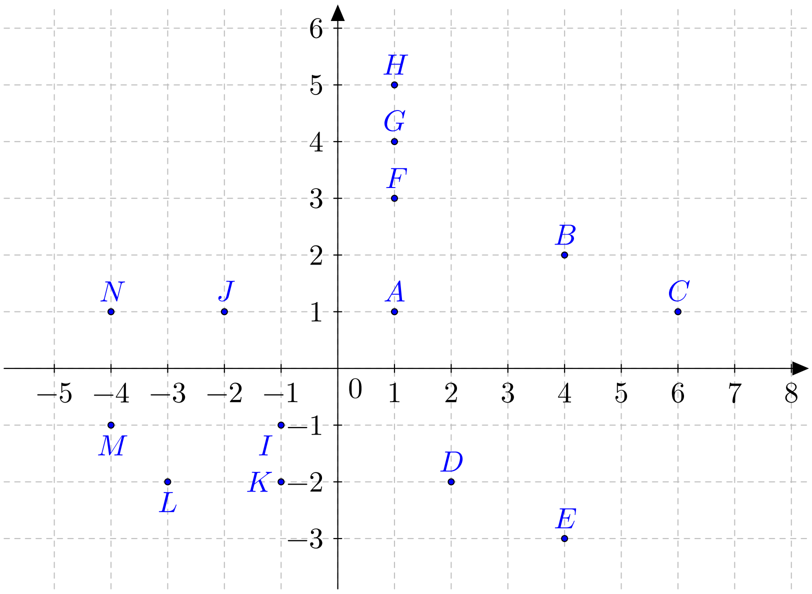


Figura 2 Punts al pla cartesià

Exercici **5.** Representeu al pla cartesià els punts següents i digueu a quin quadrant pertanyen: $A = (5, 6)$, $B = (-3, 4)$, $C = (7, -3)$, $D = (-1, -5)$, $E = (0, -2)$, i $F =$ origen de coordenades.

Exercici **6.**

a. Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (-3, 2)$, $D = (-4, -1)$, $E = (2, -3)$, $F = (0, 3)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades

b. Digueu a quin quadrant pertanyen

2 Representació de funcions

Exercici 7. Representeu gràficament:

a. $y = 3x - 9$

b. $y = 2x + 1$

c. $y = 10/x$

d. $y = x^2 - 2$

e. $y = 60/(x + 1)$

f. $y = x - 2$

g. $y = x^2 - x$

h. $y = 3x + 6$

i. $y = \sqrt{x} + 2$

Exercici 8. Representeu gràficament les funcions següents i digueu el tipus de funció del que es tracte (funció afí, funció quadràtica, funció de proporcionalitat inversa o funció exponencial):

a. $y = 2x + 3$

b. $y = 2/x$

c. $y = -5/x$

d. $y = x^2 - 5$

e. $y = 2^x$

f. $y = 5x - 2$

g. $y = -4x/2$

h. $y = 2 - x^2$

i. $y = 3 * \sqrt{x}$

j. $y = -2x^2 - 5$

Exercici 9. Representeu gràficament les funcions següents:

a. La funció que a cada nombre li assigna el seu doble

b. La funció que a cada nombre li assigna 100 entre aquest nombre

c. La funció que resulta d'elevar 0.8 a un nombre qualsevol

d. La funció que a cada nombre li assigna la meitat d'aquest nombre menys cinc

e. La funció que sorgeix de repartir 100 entre un nombre qualsevol

f. La funció que a cada nombre li assigna el seu quadrat més 2

g. La funció que a cada nombre li assigna el seu terç

h. La funció que resulta d'elevar 3 a un nombre qualsevol

i. La funció que a cada nombre li assigna la meitat del seu quadrat

Exercici 10. Trobeu la y corresponent a $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$ de les funcions dels exercicis 8 i 9.

3 Funcions afins

Exercici **11.** Representau gràficament aquestes funcions:

a. $y = 3x$

b. $y = -2x - 1$

c. $y = 0.1x$

d. $y = -x - 1$

e. $y = -7$

f. $y = \frac{5x}{4}$

g. $y = x$

h. $y = \frac{2x}{3}$

i. $y = 9x - 3$

j. $y = 2x + 5$

k. $y = 2x$

Exercici **12.** Representeu gràficament les funcions següents:

a. $y = 2x - 4$

b. $y = 2x$

c. $y = 2$

d. $y = -x - 2$

e. $y = x^2$

f. $y = \frac{x}{2}$

g. $y = 0,5x$

h. $y = x + 1$

i. $y = 2x + 1$

j. $y = 2x - 3$

k. $y = 2x + 3$

l. $y = 3x + 3$

m. $y = -3x + 3$

n. $y = -y + 3$

o. $y = y - 3$

Exercici **13.** Digueu si les gràfiques corresponents a les funcions següents són creixents o decreixents. Com ho sabeu?

a. $y = 2x + 4$

b. $y = -2x + 4$

c. $y = 2x - 4$

d. $y = -2x - 4$

e. $y = -2$

f. $y = -2x$

g. $y = -4$

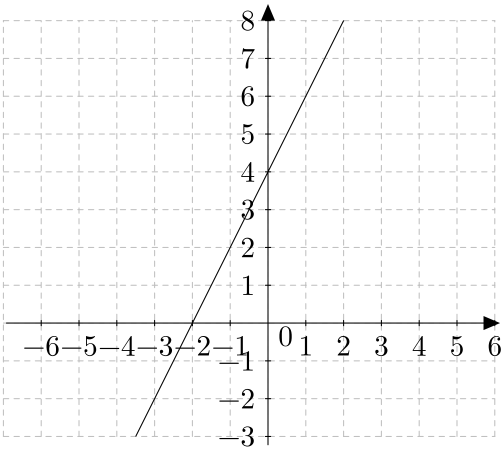
h. $y = \frac{x}{3} + 2$

i. $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{5}$

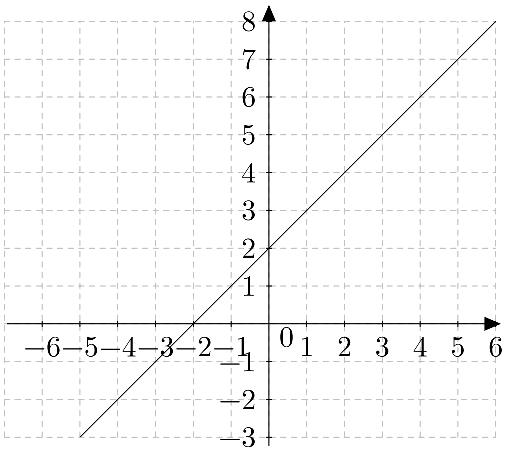
Exercici **14.** Trobeu els punts de tall amb els eixos de coordenades de les funcions dels exercicis 12 i 11.

Exercici **15.** Representeu gràficament les funcions de l'exercici anterior (exercici 13).

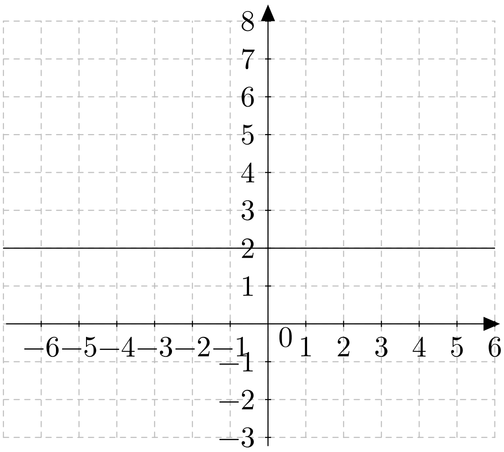
Exercici **16.** Identifiqueu el gràfic amb la fórmula corresponent: (a.) $y = x + 2$ (b.) $y = 2x + 4$ (c.) $y = 2x$ (d.) $y = -x + 2$ Digueu el motiu d'aquesta identificació.
Gràfiques:



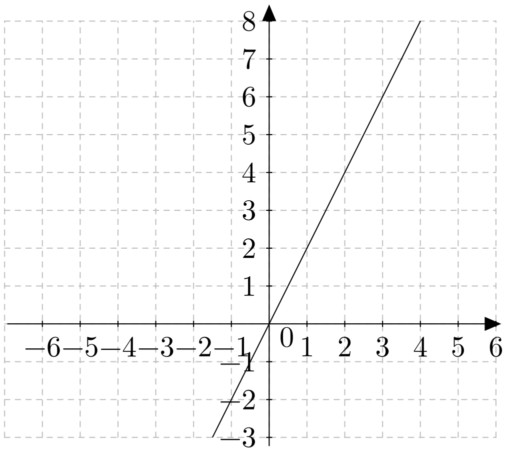
a



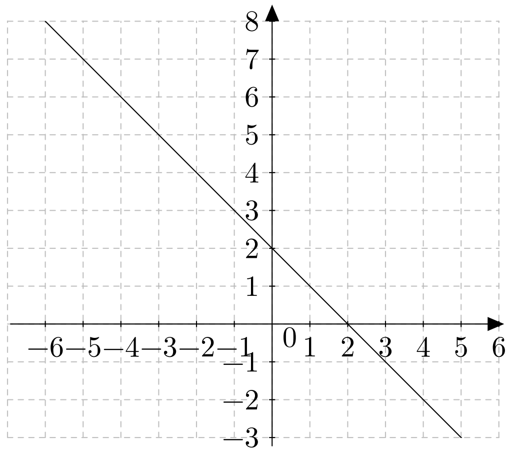
b



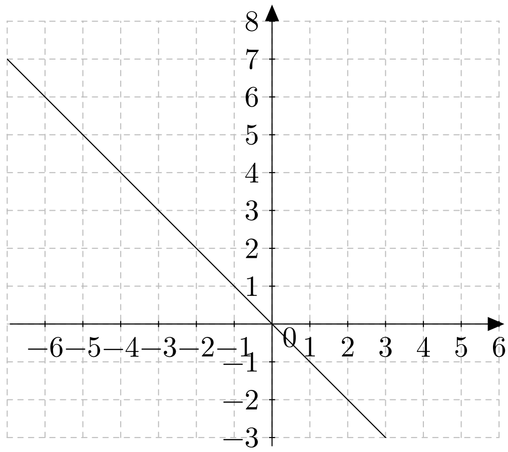
c



d



e



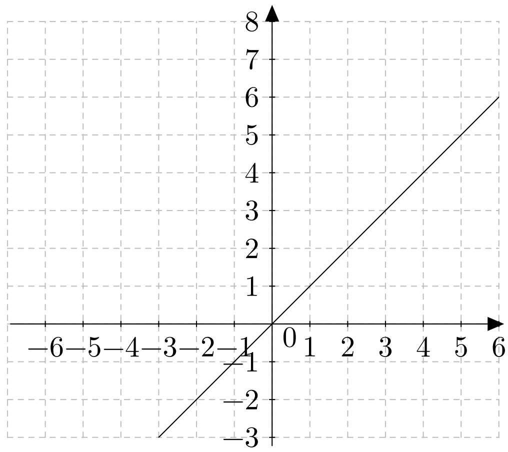
f

Quines fórmules tenen els gràfics que no estan emparellats amb cap fórmula anterior?

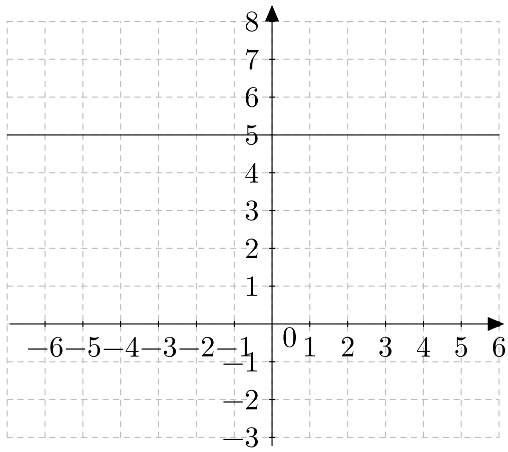
Exercici **17.** Identifiqueu el gràfic amb la seva fórmula:
Fórmules:

a. $y = x$ b. $y = 2x$ c. $y = 5$ d. $y = -x + 1$

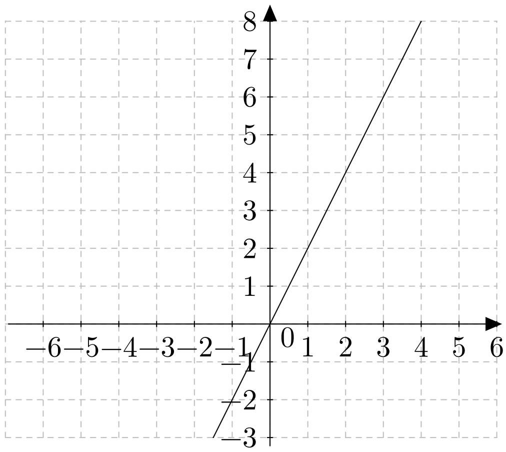
Gràfiques:



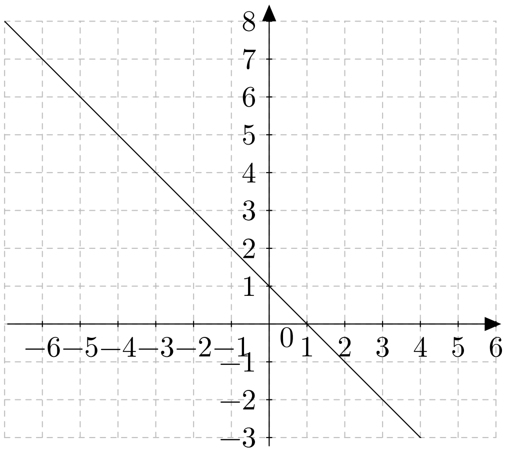
a



b



c



d

Exercici **18.** Quina fórmula dóna lloc a una recta amb major pendent? Per què? Quina creix i quina decreix?

a. (a.) $y = 2x + 3$, (b.) $y = 4x + 3$

b. (a.) $y = 5x + 10$, (b.) $y = 5x + 20$

c. (a.) $y = -5x + 12$, (b.) $y = 5x + 12$

d. (a.) $y = 20x + 100$, (b.) $y = 20x$, (c.) $y = -20x$, (d.) $y = 10x + 200$

4 Funció quadràtica

Recordem de cursos anteriors que una funció de l'estil $y = ax + b$ donava lloc a una recta i que totes[1] les rectes al pla cartesià venien donades per funcions d'aquest estil. Aquestes funcions s'anomenaven funcions afins. Per tant, totes les altres funcions donen llocs a corbes.

Ocupem-nos tot seguit de les funcions que tenen un factor de segon grau en la seva fórmula, és a dir, que tenen x^2 però no tenen cap potència d'exponent major.

- $y = x^2$

  Aquesta funció dóna lloc a la gràfica següent (figura 3):

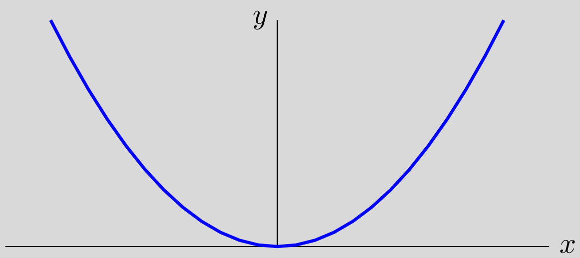
  

  Figura 3 Paràbola $y = x^2$

  Aquest tipus de corba es coneix com a *paràbola* i es caracteritza perquè tots els punts de la corba esta a la mateixa distància d'un punt fix, anomenat *focus*, i una recta, anomenada *directriu* (vegeu ??). Té la propietat que qualsevol *raig* vertical que incideix a la paràbola va a parar al focus. Això és utilitzat a les antenes parabòliques per amplificar les senyals.

  Existeix un punt singular: el vèrtex de la paràbola, on la paràbola passa de decrèixer a crèixer.

  A continuació anirem complicant aquesta fórmula, mica en mica, i veurem que lexs corbes resultants també donen lloc a paràboles. A més, les transformacions de la fórmula correspondran a moviments geomètrics d'aquesta paràbola base.

- $y = (x - B)^2$

  Aquesta transformació correspon a una translació vertical de la paràbola. La paràbola es mou B unitats a la dreta. O sigui, el seu vèrtex es mou a la posició $(B, 0)$. Vegeu figura

- $y = (x - B)^2 + C$

[1] Excepte les rectes verticals.

Aquesta transformació fa que el vèrtex de la paràbola pugi verticalment C unitats. Per tant, el vèrtex d'aquesta paràbola queda situat a (B, C). Vegeu figura

- $y = A(x - B)^2 + C$

  La introducció del paràmetre A fa que cada valor de $(x-B)^2$ es multipliqui per A. Per tant, si $|A|$ és major que 1, això farà que s'obtingui un valor major que si no es tingués A. Per tant, y tendrà un valor major i, llavors, la paràbola serà més tancada. En el cas, en que $|A| < 1$, la paràbola serà més oberta, més *gruixada*. En definitiva, el paràmetre A determina l'*obertura* de la paràbola. Vegeu figura

  – Si $A > 0$, la paràbola és *còncava*.

  – Si $A < 0$, la paràbola és *convexa*.

En general per a representar una paràbola es determinen: (a.) Orientació (b.) Vèrtex (c.) Punts de tall amb els eixos . Vegem com determinar aquests components per una paràbola genèrica.

- **Per $\boldsymbol{y = A(x - B)^2 + C}$**

  – Orientació:

    ⋆ Si $A > 0$, la paràbola és còncava.

    ⋆ Si $A < 0$, la paràbola és convexa.

  – Vèrtex: el vèrtex té coordenades (B, C)

  – Punts de tall amb els eixos:

    ⋆ El punt de tall amb l'eix Y es troba substituïnt $x = 0$ a la fórmula $y = A(x - B)^2 + C$.

    ⋆ El punt de tall amb l'eix X, anàlogament, es troba fent $y = 0$ a l'equació $y = A(x - B)^2 + C$.

- **Per $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$**

  – Orientació:

    ⋆ Si $a > 0$, la paràbola és còncava.

    ⋆ Si $a < 0$, la paràbola és convexa.

  – Vèrtex: El vèrtex és el punt (x_v, y_v) i s'obté amb la fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = y(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

– Punts de tall amb els eixos:

  ⋆ El punt de tall amb l'eix Y es troba substituïnt $x = 0$ a la fórmula $y = ax^2 + bx + c$.

  ⋆ El punt de tall amb l'eix X, anàlogament, es troba substituïnt $y = 0$ a l'equació $y = ax^2 + bx + c$.

Notem que sempre podem passar d'una forma a altra d'una paràbola usant les transformacions que vàrem veure a l'apartat de les equacions de 2n grau (equació ??, pàgina ??).

4.1 Representació gràfica de funcions quadràtiques

Exercici 19. Representeu gràficament les funcions següents:

a. $y = (x-2)^2 + 3$
b. $y = -2(x-3)^2 + 5$
c. $y = -(x+2)^2 - 4$
d. $y = -4x^2 - 8x + 12$
e. $y = -10x^2 - 20x$
f. $y = 2x^2 - 4x - 1$

Exercici 20. Representeu les funcions següents:

a. $y = x^2 + 2$
b. $y = (x-2)^2$
c. $y = 2x^2 - x + 2$
d. $y = 3(x-1)^2$
e. $y = -x^2 + x - 10$
f. $y = (x+3)^2 + 1$
g. $y = 2x^2 - 8x$
h. $y = (x-1)(x+2) + 3$
i. $y = -2(x-3)^2 - 10$

En cada cas, trobeu el vèrtex de la paràbola.

Exercici 21. Representeu:

a. $y = 2x^2 + 12x + 16$
b. $y = x^2 - 2x + 1$
c. $y = -x^2 - 2x - 4$
d. $y = x^2 - 2x$
e. $y = -x^2 + 2x - 2$
f. $y = -3x^2$
g. $y = 2x^2 - 8$
h. $y = -(x+10)^2 - 10$

4.2 Càlcul del vèrtex, orientació i punts de tall amb els eixos

Exercici 22. Trobeu la curvatura, el vèrtex i els punts de talls amb els eixos d'aquelles funcions que donin lloc a paràboles:

a. $y = 2x^2 + 2x - 12$
b. $y = -x^2 - 3x - 2$
c. $y = 3x^2 + 9x$
d. $y = -3x^2 + 9$

e. $y = 3x^2 + 9$
f. $y = -x^2 - 2x - 4$
g. $y = -x^2 - 3x - 2$
h. $y = -x^2$
i. $y = -x^2 + 2$
j. $y = -2x^2 + 7$
k. $y = -x^2 + 25$
l. $y = -x^2 - 25$
m. $y = x^2 - 2x + 3$
n. $y = (x-2)^2 + 3(x-3)$
o. $y = 3(x-3)^2 - 3x^2$

Exercici **23.** Trobeu el vèrtex de la paràbola que té com a fórmula $y = -x^2 + 4$

Exercici **24.** Trobeu el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de les paràboles:

a. $y = (x+2)^2 + 2$
b. $y = (x-2)^2 + 2$
c. $y = 4(x-2)^2 - 3$
d. $y = -2(x+3)^2 + 5$
e. $y = -5(x-3)^2 - 5$
f. $y = -2(x-1)^2$

Exercici **25.** Trobeu el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de les paràboles:

a. $y = -(x+2)^2$
b. $y = (x-1)(x-2)$
c. $y = (x-2)^2 - 1$
d. $y = (x-1)^2 - 1$
e. $y = 2(x-1)(x+3)$
f. $y = 2(x-1)(x-2) - 2$

1
Modelització

1.1 Models exponencials

Exercici **26.** (increment de sou) Per conveni col · lectiu, el sou dels treballadors d'una empresa s'incrementa a raó del 2% anual. Si a hores d'ara el sou d'un treballador és de 1000 €, què cobrarà aquest treballador després de 10 anys? I de 20 anys? I de 40 anys? En quin moment passarà dels 2000 €?

Exercici **27.** (IPC) L'Índex de Preus al Consum (IPC) d'Espanya l'any 2017 ha estat del 3%. Això vol dir que el preu d'un producte s'ha encarit un 3% aquest any respecte l'any anterior. Si assumim que aquest serà l'IPC dels pròxims anys, (a.) què costarà d'aquí 10 anys un producte que ara val 1 €? (b.) I d'aquí 20 anys? (c.) Quin tant per cent s'haurà encarit? (d.) Quan sobrepassarà el producte els 2 €?

Exercici **28.** (població de bacteris) El creixement d'una població de bacteris es modelitza habitualment mitjançant una funció exponencial. En concret, a cada generació es doblen el nombre de bacteris de la generació anterior (es considera la *generació 0* el bacteri primigeni).

a. Trobeu el nombre de bacteris que hi haurà a les primeres 10 generacions

b. A partir de quina generació el nombre de bacteris serà superior a un milió?

Exercici **29.** (població d'EUA) Segons l'Oficina del Cens dels Estats Units d'Amèrica, des del 1910 a 2010 la població dels EUA va créixer un 1,5% més cada any. Si sabem que la població l'any 1910 era de 92.228.531 habitants, podeu calcular la població dels anys 1911, 1912, 1920, 1950 i 2010?

Exercici **30.** (ISO 216) El format de paper DIN A és un dels més usats. Té la particularitat de què cada *format* s'obté doblegant el paper del format anterior per la meitat.

a. Podríeu calcular les mesures d'un hipotètic DIN A 11? I per un DIN A 12? I per un DIN A 20?

b. En quin moment el format DIN A seria més petit que 1 mm $\times$ 1 mm?

Exercici **31.** (virus mortal) Recentment s'ha descobert un nou virus, del qual per ara no hi ha cap vacuna. La malaltia va començar amb un portador inicial, que la va adquirir a través d'una mossegada de simi. Es sap que, de mitjana, una persona infecta a tres persones noves abans de morir. Això es considera una *passa de creixement del virus.*

a. Quantes persones s'infectaran a la passa 2? I a la 3? I a la 10? I a la 20?

b. Quantes persones hauran estat infectades des del començament fins a la passa 10?

c. Quantes passes són necessàries per a infectar a tota la població espanyola: 46.468.102 habitants?

Exercici **32.** (radioactivitat) Els elements radioactius es descomponen seguint un model exponencial: $Q(t) = Q_0 A^{-t}$, on

- Q_0 és la quantitat de material radioactiu que tenim al principi, és a dir, la quantitat per a $t = 0$.
- A és una constant que depèn del material radioactiu[2]
- t són el temps transcorregut (en segons)

Si sabem que un element concret té una constant $A = 2$, trobeu la quantitat de material radioactiu que tendrem quan hagin passat 20 segons.

Exercici **33.** (cultiu bacterià) En un cultiu bacterià sabem que cada bacteri dóna lloc a dos bacteris cada minut. Si sabem que a hores d'ara hi ha 2 ml de bacteris a un recipient: (a.) Determineu la quantitat de bacteris hi haurà després de 3 minuts i després d'1 hora? (b.) En quin moment haurem sobrepassat el litre de bacteris?

Exercici **34.** (població d'un país) La població d'un país (mesurada en milions d'habitants) creix exponencialment de la forma $P(t) = 30 \cdot e^{0,01t}$, on la variable t representa els anys transcorreguts des de l'any base 1980.

a. Calcula la població pels anys 1980 a 1995

b. En quin any la població duplicarà la de 1980?

c. En quin any la població duplicarà la de 1990?

Exercici **35.** Recentment s'ha inaugurat el Palau de congressos de Palma. L'any passat el varen visitar 10500 persones. Es preveu que aquesta quantitat s'incrementa un 2,5% cada any.

a. Calculeu quantes persones visitaran el Palau de congressos d'aquí 10 anys.

[2] Està relacionada amb la *constant de descomposició exponencial.*

b. Quant de temps ha de passar per a què el visitin més de 50000 persones.

Exercici **36.** La població mundial que té accés a internet s'incrementa en un 10% cada cinc anys. Si sabem l'any 2019 hi ha 4021 milions de persones.

a. Quantes persones tindran accés a internet d'aquí 20 anys?

b. En quants d'anys hi haurà 8000 milions de persones connectades?

Exercici **37.** El banc ens dóna un interès d'un 1,1% anual. Si decidim posar-hi 1200 €, en quant de temps tendrem més de 5000 €?

Exercici **38.** A Mallorca, el professor de Matemàtiques i el de Ciències Socials han estat mossegats per un zombie. La propagació dels zombies es fa mitjaçant una mossegada mortal. Sabem que de mitjana un zombie mossega a 5 persones (això es considera un passa de la transmissió).

a. Calculeu el nombre de zombies que hi haurà a la passa 12

b. . En quin moment hi haurà un apocalipsi zombie a Mallorca: tots els habitants de Mallorca esdevendran zombies?

Dades necessàries: la població de Mallorca és de 1.176.627 persones.

Exercici **39.** Un grup de cinc amics vol propagar una notícia sobre un acte benèfic a través de Whatsapp. Decideixen que cadascun d'ells li enviï a a 3 amics i dir-los que la reenviïn a tres amics més. Si no tenim en compte les possibles repeticions, en quant de temps la notícia arribarà a 10000 persones?

Exercici **40.** La matrícula del CEPA Camp Rodó creix un 1% anual. Sabem que l'any 2000 va ser de 400 alumnes. Quants d'alumnes s'han matriculat l'any 2019? Quants d'alumnes es matricularan l'any 2025? En quin any hi haurà una matrícula de 6000 alumnes?

Exercici **41.** El Govern de les Illes Balears redueix la despesa un 2% anual. Si l'any 2019 va ser de 5.457 milions, quants doblers gastarà el Govern l'any 2050?

Exercici **42.** El consum d'aigua per habitant a les Illes Balears és de 119 litres per dia. En una campanya de conscienciació un grup de 100 persones decideixen fer l'esforç de reduir aquest consum en un 2% anualment.

a. Quants litres consumeixen les 100 persones en l'any actual?

b. Quants litres consumiran aquest grup de persones al cap de 10 anys (anualment)? Quina quantitat consumirà diàriament una persona d'aquest grup?

c. Quina variació de consum hauran experimentat? De forma absoluta, en tant per cent, per persona i dia.