HE-ESPA4

HABILITATS ESPECÍFIQUES PER A ESPA 4

EXERCICIS PROCEDIMENTALS PER A L'ALUMNAT DEL NIVELL 2 MÒDUL 2 DE L'EDUCACIÓ SECUNDÀRIA PER A PERSONES ADULTES DE LES ILLES BALEARS (ESPA 4) DE L'ASSIGNATURA DE MATEMÀTIQUES

XAVIER BORDOY

Xavier Bordoy
Professor de Matemàtiques del CEPA Sud (Campos. Illes Balears)
Correu electrònic: somenxavier@gmail.com
Web: 101problemes.net

Mathematics Subject Classification (2010): 97-01, 97A10

Aquest document ha estat generat, diumenge 9 setembre 2018, usant programari lliure (ConTeXt versió 20180404 MKIV, luatex versió 1.07 i PGF/Ti*k*Z) sota un entorn GNU/Linux. El document ha estat mecanografiat. Encara que s'hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-me per correu electrònic. D'altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per millorar-la, us agraïria que m'ho communiquéssiu i, si el canvi és del meu gust, l'incorporaré a l'obra original en els mateixos termes de la llicència.

Índex de continguts

1
ÀLGEBRA

1.1 Resolució d'equacions de 1r grau

Exercici **1.** Resoleu aquestes equacions:

a.

$$\frac{x}{2} + 30 = 2x$$

b.

$$x - 1 = \frac{3x}{4}$$

c.

$$x - 20 = \frac{x}{3} + 2$$

d.

$$2 + \frac{x}{3} - 4 = \frac{2x}{3} - 11$$

e.

$$\frac{x}{3} + 4 - \frac{x}{2} = x - 10$$

f.

$$x + 5 = \frac{x+3}{3}$$

g.

$$\frac{x}{2} + \frac{x-3}{3} = 3$$

h.

$$\frac{x+4}{5} - \frac{x+3}{4} = 1 - \frac{x+1}{2}$$

i.
$$\frac{5x-1}{6}=\frac{1}{3}(4+x)+1$$

j.
$$\frac{x}{2}-\frac{2x+7}{5}=5$$

k.
$$\frac{x}{4}+5=\frac{7x}{12}$$

Exercici **2.** Resoleu les equacions següents i comproveu-ne la solució

a. $3x+2=35$

b. $11x–18=4$

c. $56x+33=-23$

d. $5x+25=125$

Exercici **3.** Resoleu les equacions següents:

a. $5x+2=10x-18$

b. $4x+90=-4+2x$

c. $16x-8=x+22$

d. $-x–20=8x+781$

e. $3x-2=8x+4-8x$

f. $\frac{x}{4}-4=32$

Exercici **4.** Resoleu:

a. $3x+5=7x–2$

b. $8x–10=8x–10x+2$

c. $x–2=4x+5$

d. $7x–8=5x+2$

e. $3(x+2)=5x$

f. $2(x–1)=x+5$

g. $6x–2x+3x=5(-x+2)$

h. $8x=7x+x+x–2$

Exercici **5.** Resoleu:

a. $6x+2-x=7x-6+2x+8+2x+6$

b. $x+2-2x+5x+2=6x-3+4$

c. $-x+2x-1+5x+4=7x+2+40x-81$

d. $28x-34+20x-100=10x-2+35x$

e. $80x-20+70x=79x-2x-93$

f. $7x+3-4x+8=-3+4x+19$

g. $24x - 8 + 6x + 1 = 42x + 1$

h. $-2 - x + 10 + 8x = -4x + 24x$

i. $2x + 5 - x + 2 = 2x + 2 + 14x$

j. $5x + 4 - 2x + 8 + 7x + 3 = -20x$

Exercici **6.** Resoleu:

a. $3x - (x - 2) = 4x + 1$

b. $4(x + 3) - (2x - 7) = 6x + 18$

c. $5 - (3 - x) = 2(x + 2) - 3$

d. $2x - (9x + 2) + 4x = 43 - x + 8 - x - 13$

e. $2(x - 2) - (5 - x) = 3x + 2 - 6(x + 2)$

f. $2x - (x - 3) - 2(5 - x) = 6 - x + 8x - 1$

Exercici **7.** Resoleu les equacions següents amb parèntesi:

a. $x - 5(x - 2) = 6x$

b. $120 = 2x - (15 - 7x)$

c. $6(x + 11) = 40 + 6(x + 2)$

d. $2(x - 17) = x - 3(12 - 2x)$

e. $x - 5(x - 2) = 6$

f. $5(x + 4) = 7(x - 2)$

g. $3(x + 7) - 6 = 2(x + 8)$

h. $60x + 1 = 3(3 + 4x)$

i. $3(x + 8) = 6(x - 2) + 24$

j. $7(x - 18) - 3(x - 14) = 0$

k. $3x - 4(x - 2) - 5 = x + 10 - (x + 5) + x$

l. $5x - 3(x + 5) = 3x + 10$

1.2 Resolució d'equacions de 2n grau

- **Completant quadrats**

  En general, la transformació no es pot fer de cap. Per passar una equació de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ a una equació de la forma $A(x - B)^2 + C = 0$ usarem la fórmula:

  $$A = a \qquad B = \frac{-b}{2a} \qquad C = c - AB^2 \tag{1.1}$$

  Per exemple, l'equació $2x^2 - 4x + 10 = 0$ es transformaria en $2(x - 1)^2 + 8 = 0$.

- **Fórmula de segon grau**

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \tag{1.2}$$

Exercici **8.** Resoleu les equacions de 2n grau següents:

a. $3x^2 + 2x = 5x - 2$

b. $10x - 8x = x^2 - 5$

c. $9x - 8 = 7 - x^2$

d. $8x^2 - 2 = 10x^2 - 5x$

e. $(x-2)^2 - 5 = 10$

f. $3(x+4)^2 = 10$

g. $(x-2)^2 - 8 = 20x$

h. $5(x-1)^2 = 2$

i. $(x-1)^2 = -4$

j. $(x-5)^2 = 5x^2$

Exercici **9.** Resoleu les equacions de segon grau següents:

a. $3x - 5x^2 = 2x - 490$

b. $7 - (x-3) = x^2 - 4x$

c. $x - \frac{x^2}{2} = x^2 - 3$

d. $4x - (2x^2 - 5x) = \frac{x}{2}$

e. $-3x^2 + 432 = 0$

f. $\frac{x}{2} + 3(x^2 + 2) = 311$

Exercici **10.** Resoleu les equacions següents:

a. $9x^2 - 225 = 0$

b. $5x^2 = 10$

c. $10 = -6x^2$

d. $6x^2 + 27 = 9x^2$

Exercici **11.** Resoleu les equacions següents:

a. $3x^2 + 2x = -2x$

b. $3x^2 - x = -5x^2 + x$

c. $-9x^2 + 81x - 4 = -4$

d. $-20x = 8x^2 - 2 + 2x^2 + 2$

Exercici **12.** Resoleu les equacions següents:

a. $4x^2 + 2x - 4 = -2x + 4$

b. $9x^2 - 63x + 90 = 0$

c. $-x^2 - 3x + 10 = x^2 + 3x - 10$

d. $-2x^2 + 4x - 3 = -2x + x^2$

e. $2x^2 + 4x + 1 = -1$

f. $2x + 1 = -2 - x^2$

Exercici **13.** Digueu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

a. $x = -2$ és solució de l'equació $x^2 - 2x - 1 = 0$

b. $x = \frac{1}{2}$ és solució de l'equació $4x^2 - 1 = 0$

c. $x = 2$ i $x = 0$ són solucions de l'equació $x^2 = 4x$

d. $x = -1$ és la única solució de l'equació $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Nota: podeu comprovar si el nombre assenyalat és o no solució de l'equació en comptes de trobar totes les solucions de l'equació.

Exercici **14.** Resoleu:

a.

$$\frac{3x-1}{2} + \frac{x^2}{3} + 5 = x^2 + 3$$

b.

$$\frac{x}{3} - 5(1 + x^2) = 311$$

Exercici **15.** Reduïu i resoleu les equacions següents:

a.

$$3(x+2) + 4x^2 - 4 = 8 - x(1-x) + 7x$$

b.

$$5x^2 + 2(x^2 + x) - 4 = \frac{5x^2}{2} + 11x^2$$

c.

$$2x(x+1) - 2(x+2) = 0$$

d.

$$\frac{x^2+1}{3} - \frac{x-2}{2} = 0$$

e.

$$7x + 3 + 5x^2 = -3x^2 + 4x + 35 + 3x$$

f.

$$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{5} = 2(x+1)$$

Exercici **16.** Resoleu:

a. $2x^2 + 2x - 4 = 0$

b. $3x^2 - 27 = 0$

c. $2x^2 + 6x = 0$

d. $x^2 - 6x + 8 = 0$

e. $-x^2 + 2x + 8 = 0$

f. $-x^2 - 4x - 6 = 0$

g. $15x^2 + 2x - 8 = 0$

h. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

i. $2x^2 - 5x - 7 = 0$

j. $3x^2 - 5x + 4 = 0$

k. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

l. $3x^2 - 6x + 2 = 0$

m. $x^2 - 6 = 30$

n. $3x^2 - 115 = 185$

o. $x(x+5) = 0$

p. $4x = 3x^2$

q. $x^2 = 121$

r. $5x^2 - 7x = 0$

s. $x^2 + x = 3x - x^2$

Exercici 17. Reduïu i resoleu les equacions següents:

a. $2x + 4x - x^2 + 7 = x^2 + 2x - 9$

b. $-x + 4 - x^2 - 1 + x = -2x^2 + 19$

c. $2x^2 + x - 3 + 3x - 8 + 2x = 4x + x^2 - 11$

d. $x^2 - 3x = -x^2 + 2x - x^2 - 1 - 4x^2 + 2 + 5x^2 - 3$

e. $-x^2 - 3x = x^2 + 2x + 3x + 6$

f. $2x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 1 + 2x - x^2 + x + 1$

g. $-x^2 - 3x - x^2 + 2 = 2x^2 - 14 - 3x$

h. $24x^2 - 3x - x^2 + 2 = -6x^2 - 41x^2 - 29x^2 + 22 - 13x - x^2$

Exercici 18. Resoleu:

a.
$$\frac{3x^2}{2} + \frac{13x}{4} = -\frac{1}{2}$$

b.
$$-2x^2 + x + 23 = -4x^2 - 11x + 7$$

c.
$$(x+2)^2 + 3x - 5 = 0$$

d.
$$(x+2)(x-3) + 3x = (2x-4)(x+2)$$

Exercici 19. Resoleu les equacions següents:

a. $(3x-1)^2 = 0$

b. $(x-3)(x-8) = 0$

c. $(2x-1)^2 = 25$

d. $(x-5)^2 = 0$

e. $(x-2)(x+2) = 7$

f. $\frac{(x-1)(x+1)}{3} = \frac{(x-1)^2}{2}$

1.3 Plantejament d'equacions de 2n grau

Exercici **20.** Trobeu les dimensions dels quadrats següents:

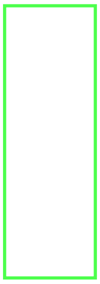
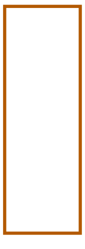
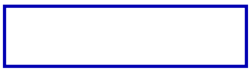
a. Un quadrat que té àrea igual a 25 m^2

b. Un quadrat que té àrea igual a 20 cm^2

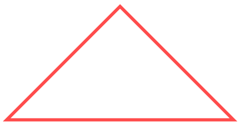
c. Un quadrat d'àrea 160.000 km^2

d. Un quadrat d'àrea 10,24 cm^2

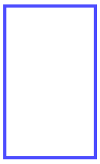
Exercici **21.** Trobeu les dimensions d'aquestes figures amb les condicions donades

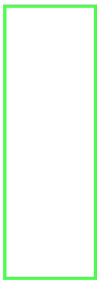
a)		$\grave{A}rea = 50$	L'altura és la meitat que la base
b)		$\grave{A}rea = 27$	La base és un terç de l'altura
c)		$\grave{A}rea = 300$	L'altura és el triple que la base
d)		$\grave{A}rea = 10.000$	L'altura és un quart que la base

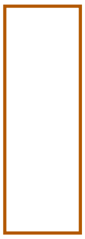
e)  $\grave{A}rea = 86.400$ L'altura és el doble d'un nombre desconegut i la base és el triple d'aquest mateix nombre

f)  $\grave{A}rea = 225$ L'altura fa la meitat que la base

Exercici 22. Trobeu les dimensions d'aquestes figures.

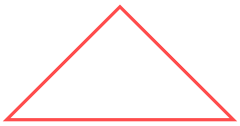
a)  $\grave{A}rea = 15$ L'altura medeix 2 metres més que la base

b)  $\grave{A}rea = 50$ La base fa sis metres menys que l'altura

c)  $\grave{A}rea = 231$ L'altura mesura deu centímetres més que la base

d)  $\grave{A}rea = 7.301$ L'altura mesura x i la base $3x + 2$

e)  $\grave{A}rea = 300$ L'altura és 3/4 de la base

f)  $\text{Àrea} = 71{,}5$ L'altura fa 2 centímetres més que la base

Exercici 23. L'àrea d'un quadrat és 1024. Què val el seu costat?

Exercici 24. Calculeu la longitud dels catets d'un triangle rectangle isòsceles d'àrea 50 m^2.

Exercici 25. En un rectangle, la base fa tres centímetres més que l'altura. Si l'àrea és de 1.720 cm^2. Què val cada costat?

Exercici 26. En un rectangle, l'altura és quatre centímetres més curta que la base. Si l'àrea és de 70 cm^2, quines són les dimensions del rectangle?

Exercici 27. Calculeu el valor de x sabent que l'àrea total de la figura 1.1 és igual a 79 m^2:

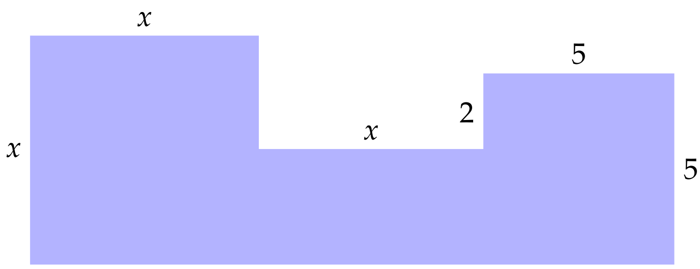


Figura 1.1 Composició de diversos rectangles

Exercici 28. En un rectangle, la base és 3 cm més curta que l'altura. Calculeu les dimensions del rectangle si sabem que la seva àrea és de 70 cm^2.

Exercici 29. Trobeu x per a que l'àrea de la figura 1.2 sigui igual a 54 m^2:

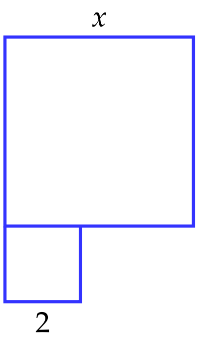


Figura 1.2 Composició de dos quadrats

Exercici 30. L'àrea d'un quadrat és 324. Què val el seu costat?

Exercici 31. En un rectangle, la base fa dos centímetres més que l'altura. Si l'àrea és de 2808 cm^2. Què val cada costat?

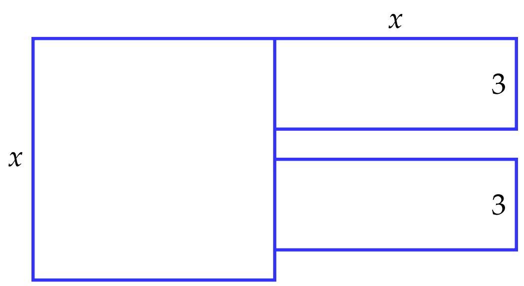
Exercici 32. En un rectangle, l'altura és deu centímetres més curta que la base. Si l'àrea és de 1200 cm^2, quines són les dimensions del rectangle?

Exercici 33. En un rectangle de 4 cm de perímetre, sabem que la base és igual al quadrat de l'altura. Calcula les seves dimensions.

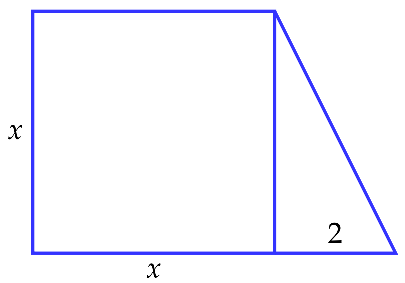
Exercici 34. En un rectangle de 600 m de perímetre, sabem que l'altura és igual a dues vegades el quadrat de la base. Calculeu les seves dimensions.

Exercici 35. Calculeu el valor de x sabent que l'àrea total de la figura és igual al valor que s'indica.

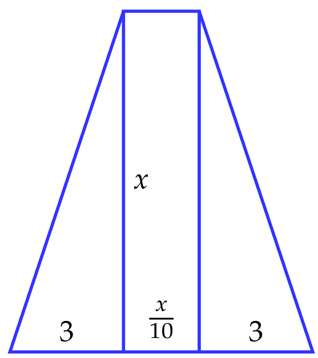
a. 112 m^2:



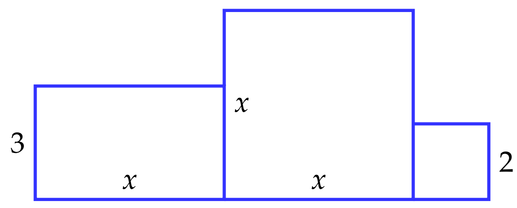
b. 20 m^2:



c. 1540 m^2:



d. 44 m^2:



Exercici **36.** L'àrea d'un quadrat és 324. Què val el seu costat?

Exercici **37.** En un rectangle, la base és igual a tres vegades l'altura. Si la seva àrea és 300, trobeu les dimensions del rectangle.

Exercici **38.** Quan passarà que l'àrea d'aquest terreny (figura 1.3) serà igual a 4.485 m^2? Quina àrea tendria si x fos igual a 3 m?

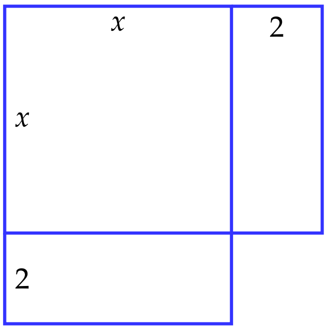


Figura 1.3 Terreny format per composició de rectangles

2
Funcions

2.1 Pla cartesià

Exercici **39.** (a.) Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1,4)$, $B = (4,1)$, $C = (-5,2)$, $D = (-3,-1)$, $E = (6,-3)$, $F = (0,2)$, $G = (-2,0)$, $H =$ origen de coordenades, i (b.) digueu a quin quadrant pertanyen.

Exercici **40.** Escriviu les coordendades dels punts següents (figura 2.1):

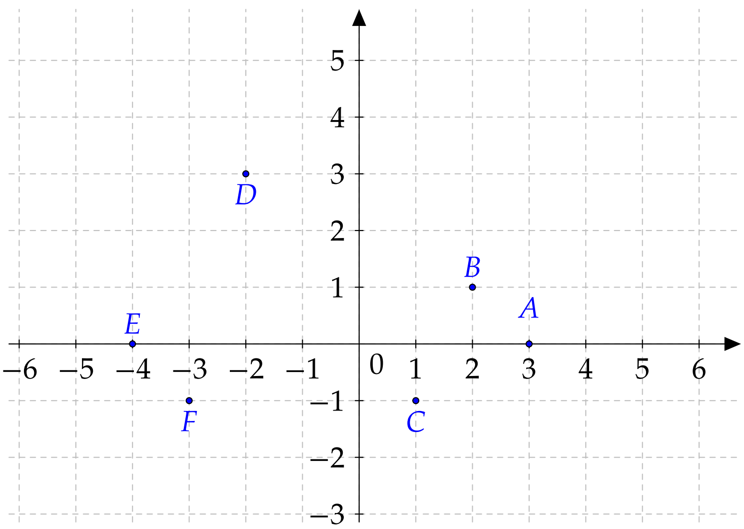


Figura 2.1 Punts al pla cartesià

Exercici **41.** Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1,2)$, $B = (2,1)$, $C = (1,1)$, $D = (2,2)$, $E = (-1,2)$, $F = (1,-2)$, $G = (0,2)$, $H = (1,0)$, $I = (0,0)$, $F = (-2,-3)$. Digueu a quin quadrant pertanyen

Exercici 42. Quines coordenades tenen els punts següents (figura 2.2):

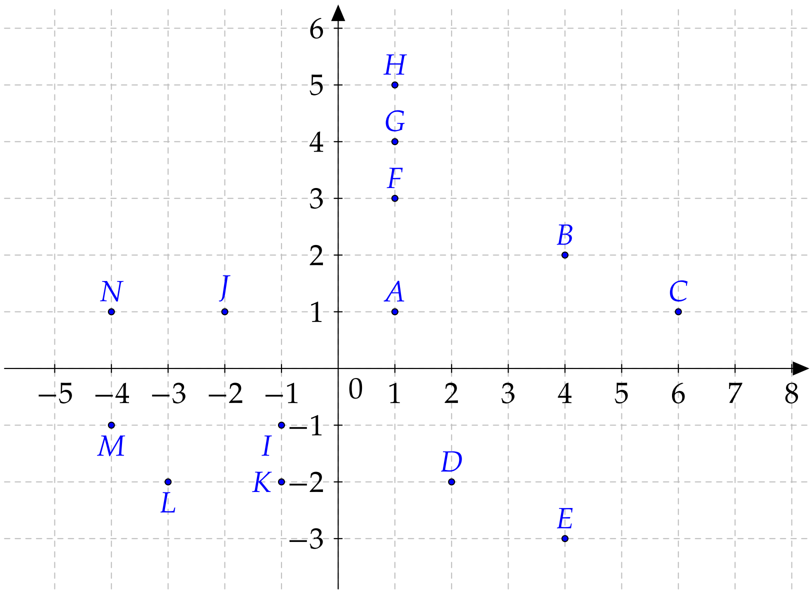


Figura 2.2 Punts al pla cartesià

Exercici 43. Representeu al pla cartesià els punts següents i digueu a quin quadrant pertanyen: $A = (5,6)$, $B = (-3,4)$, $C = (7,-3)$, $D = (-1,-5)$, $E = (0,-2)$, i $F =$ origen de coordenades.

Exercici 44.

a. Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1,2)$, $B = (2,1)$, $C = (-3,2)$, $D = (-4,-1)$, $E = (2,-3)$, $F = (0,3)$, $G = (-2,0)$, $H =$ origen de coordenades

b. Digueu a quin quadrant pertanyen

2.2 Representació de funcions

Exercici 45. Representeu gràficament les funcions següents i digueu el tipus de funció del que es tracte (funció afí, funció quadràtica, funció de proporcionalitat inversa o funció exponencial):

a. $y = 2x + 3$

b. $y = 2/x$

c. $y = -5/x$

d. $y = x^2 - 5$

e. $y = 2^x$

f. $y = 5x - 2$

g. $y = -4/x$

h. $y = (\frac{1}{4})^x$

i. $y = -5x^2 - 5$

Exercici **46.** Representeu gràficament les funcions següents:

a. La funció que a cada nombre li assigna el seu doble

b. La funció que a cada nombre li assigna 100 entre aquest nombre

c. La funció que resulta d'elevar 0.8 a un nombre qualsevol

d. La funció que a cada nombre li assigna la meitat d'aquest nombre menys cinc

e. La funció que sorgeix de repartir 100 entre un nombre qualsevol

f. La funció que a cada nombre li assigna el seu quadrat més 2

g. La funció que a cada nombre li assigna el seu terç

h. La funció que resulta d'elevar 3 a un nombre qualsevol

i. La funció que a cada nombre li assigna la meitat del seu quadrat

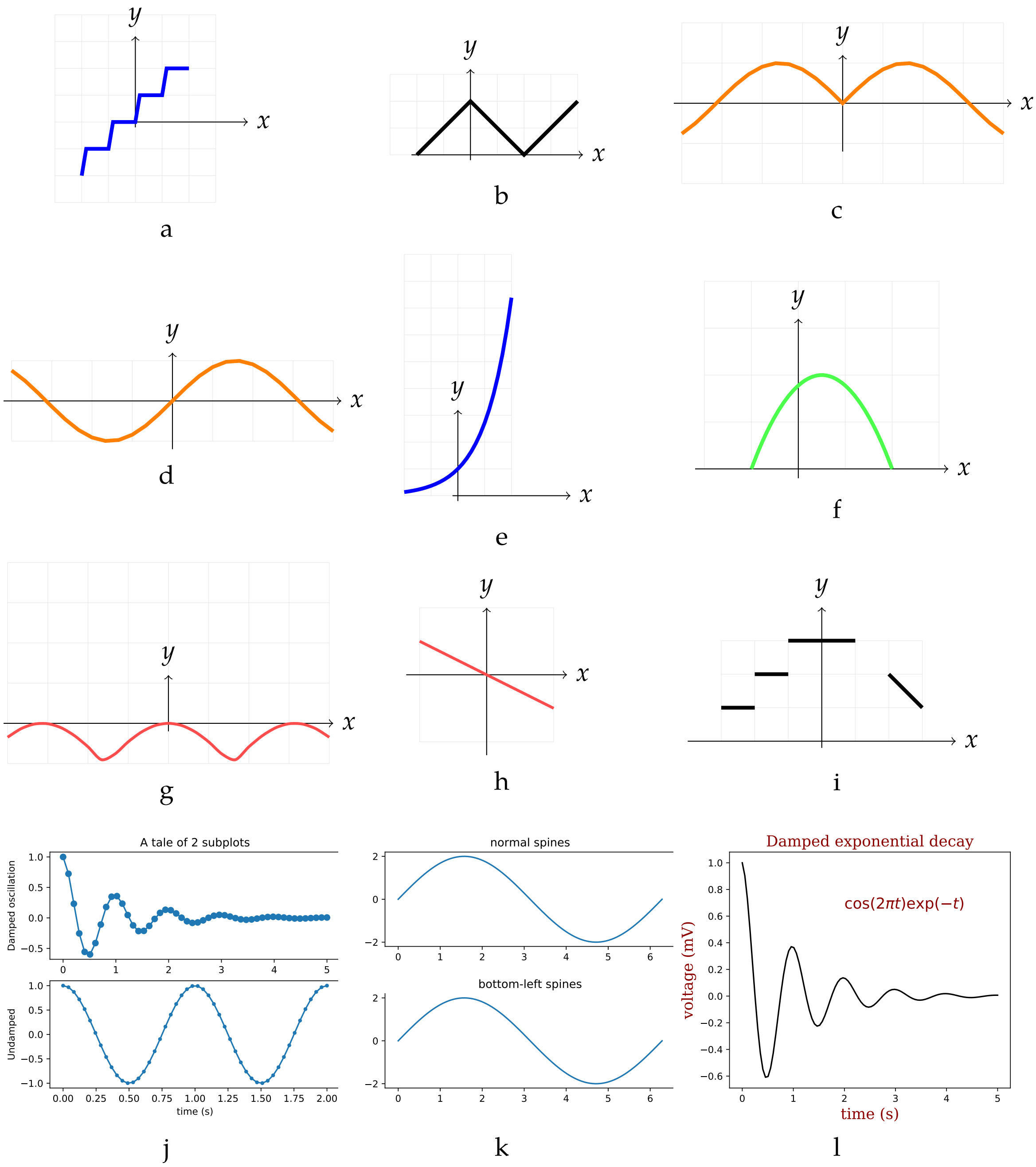
Exercici **47.** Dels tipus de funcions següents, investeu-vos tres funcions de cada tipus. Representeu-la gràficament en l'interval $[-2, 2]$.

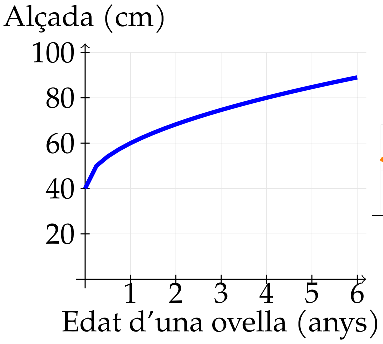
Exercici **48.** Podríeu trobar les expressions algebraiques, la taula de valors i la descripció verbal equivalents a les funcions dels exercicis 45, 46?

Exercici **49.** Trobeu $f(0)$, $f(1)$ i $f(-1)$ de les funcions dels exercicis 45, 46 i 47.

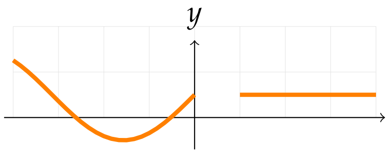
2.3 Elements d'un gràfic

Exercici **50.** Calculeu (a.) el domini de definició, (b.) els intervals de creixement i decreixement, (c.) els màxims i mínims, (d.) punts de talls amb els eixos, (e.) continuïtat i (f.) simetries dels gràfics de les funcions dels exercicis 47 i dels gràfics següents:

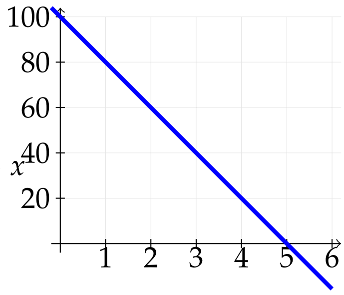

a
b
c
d
e
f
g
h
i
A tale of 2 subplots
Damped oscillation
Undamped
time (s)
j
normal spines
bottom-left spines
k
Damped exponential decay
$\cos(2\pi t)\exp(-t)$
voltage (mV)
time (s)
l



m



n

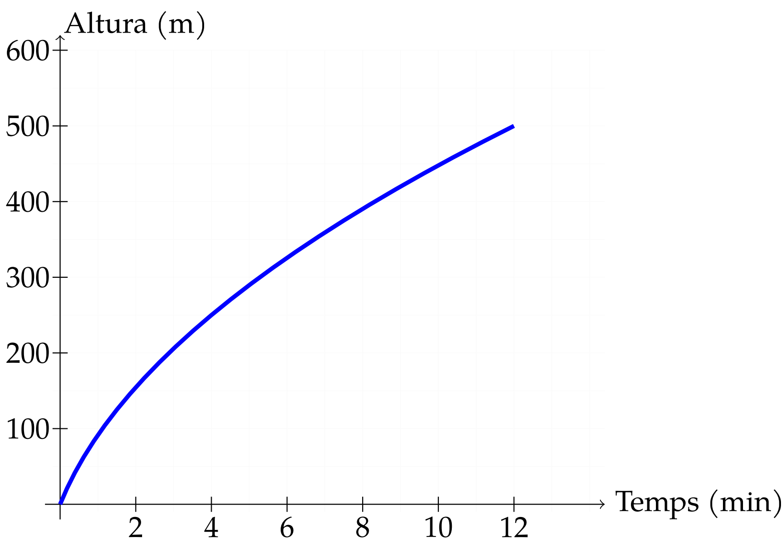


o

2.4 Gràfic → interpretació

Activitat **51.** (*Interpretant gràfiques de distància-temps*) . Activitat en grup. (vegi's el fitxer específic de l'activitat).

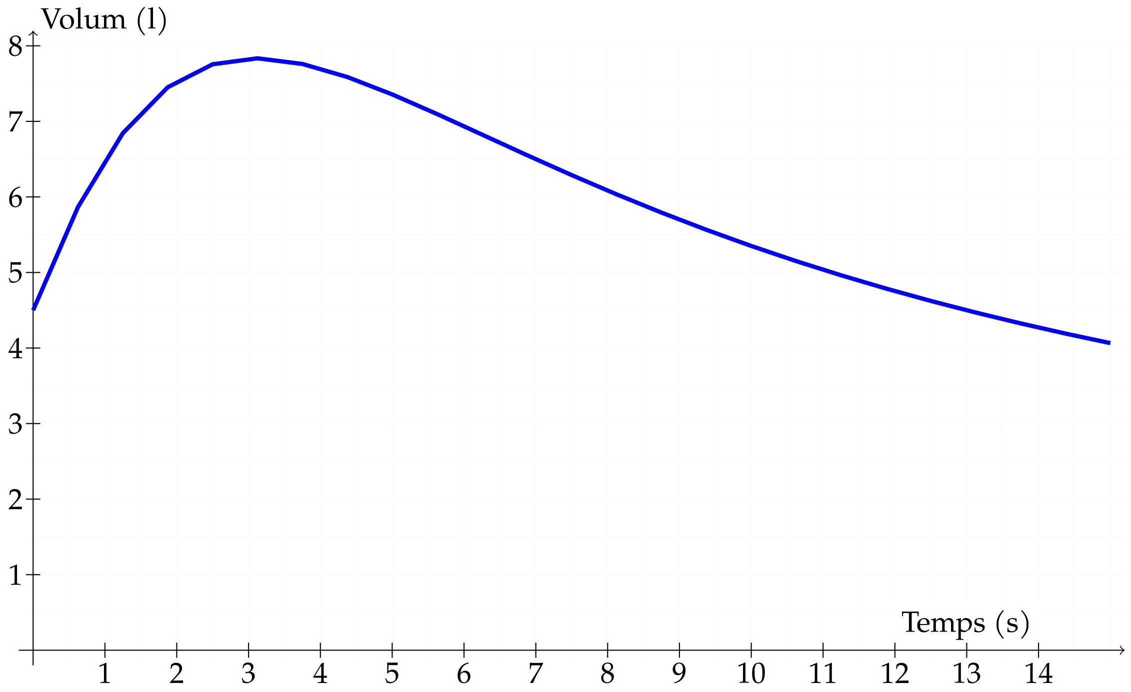
Exercici **52.** Es molla un globus que s'eleva i, a l'assolir certa altura, rebenta. La gràfica següent representa l'altura, amb el pas del temps, en la que es troba el globus fins que rebenta.



a. A quina altura rebenta el globus?
b. Quan tarda en rebentar des de que l'amollam?
c. Quines variables intervenen?
d. Quina escala s'utilitza per a cada variable?

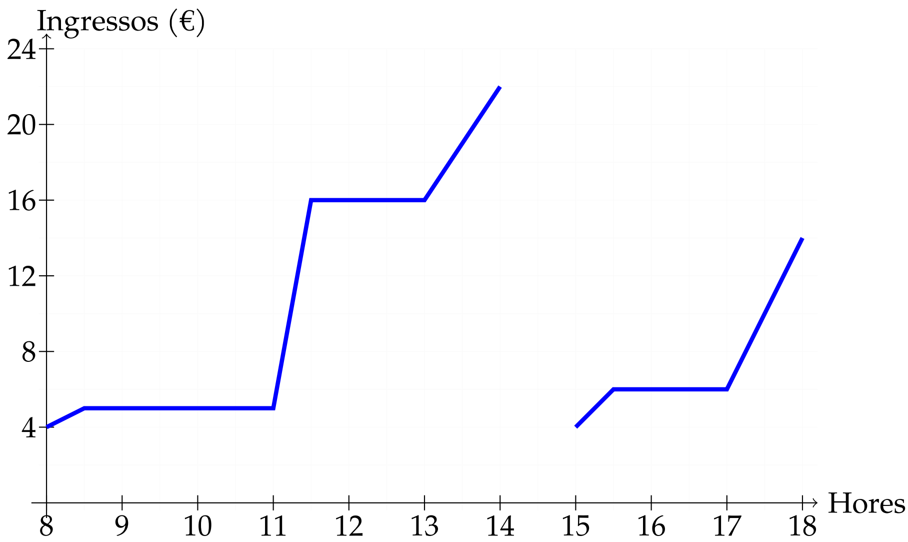
e. Quin és el domini de definició d'aquesta funció?
f. Quin és el seu recorregut
g. Quina altura guanya el globus entre el minut 0 i el 4? I entre el 4 i el 8? En quin d'aquests intervals creix més ràpidament la funció?

Exercici **53.** Per mesurar la capacitat espiratòria dels pulmons es fa una prova que consisteix en inspirar al màxim i després espirar tan ràpid com sigui possible en un aparell que s'anomena "espiròmetre". Aquesta corba indica el volum d'aire que entra i surt dels pulmons.



a. Quin és el volum en el moviment inicial?
b. Quin temps va durar l'observació?
c. Quin és la capacitat màxima dels pulmons d'aquesta persona?
d. Quin és el volum als 10 segons després d'iniciar-se la prova?

Exercici **54.** En la porta d'un col·legi hi ha una parada de llaminadures. En aquesta gràfica es veu la quantitat de doblers que hi ha a la caixa al llarg d'un dia:

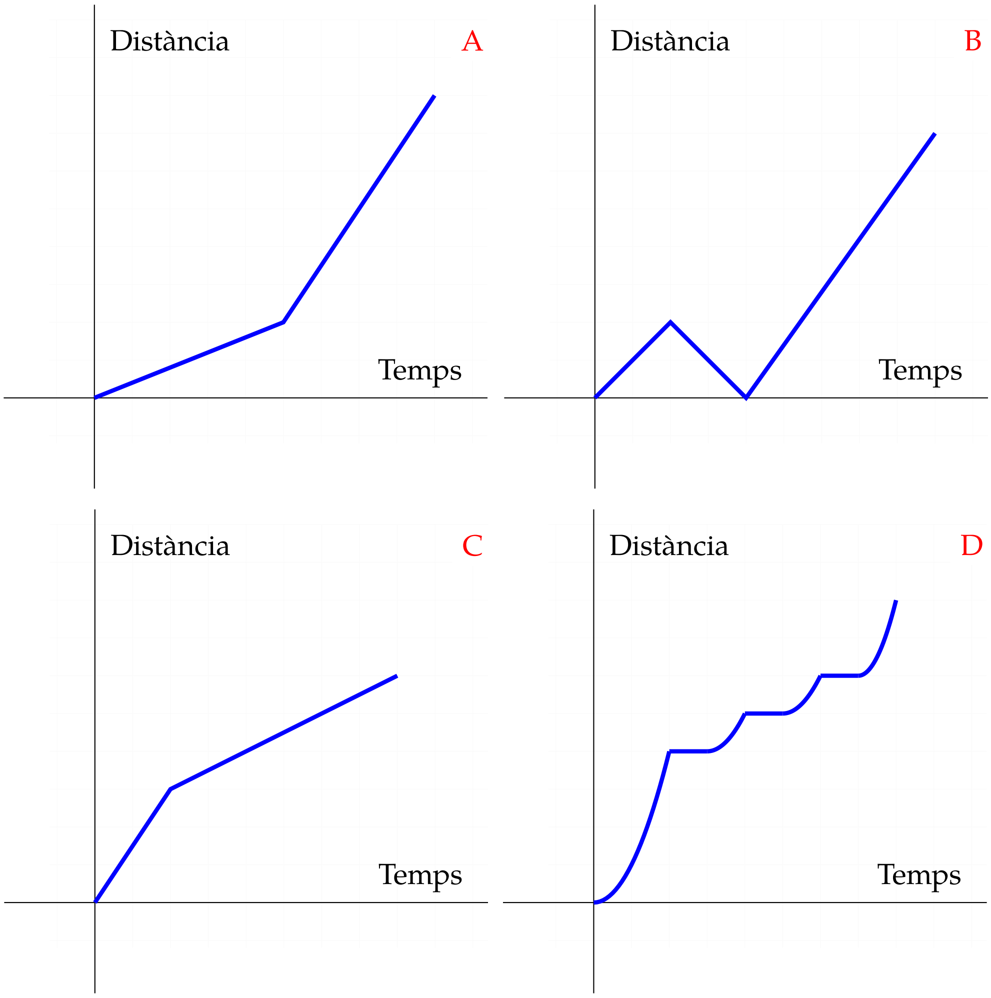


a. A quina hora comencen les classes pel matí?
b. A quina hora és el pati? Quant dura?
c. La parada es tanca al migdia i l'amo s'enduu els doblers a casa. Quins varen ser els ingressos aquest matí?
d. Quin és l'horari d'horabaixa del col·legi?
e. Aquesta funció és contínua o discontínua?

Exercici **55.** Na Marta, en Marc, n'Elena i en Lluís comenten com ha anat la seva anada al l'institut aquest matí.

- MARTA: Vaig anar amb motocicleta; però se m'oblidà un treball que havia d'entregar i vaig haver de tornar a ca meva. Després vaig córrer tot el que pogué fins a arribar a l'escola.
- MARC: Ma mare me va dur en cotxe; però ens trobàrem un embús en el semàfor que hi ha a la meitat de camí i ens va retardar molt.
- ELENA: Me vaig trobar en el portal de ca nostra un amic que anava a un altre col·legi. Vàrem fer junts una part del camí i, quan ens vàrem separar, vaig haver de fer més via perquè, amb la xerrada, se me va fer tard.
- LLUÍS: Vaig sortir de casa molt aviat perquè havia quedat amb na Maria i era tard. Després vàrem fer el camí junts amb més calma.

Els quatre van al mateix col·legi i cadascuna d'aquestes gràfiques mostra, *en distint ordre*, la trajectòria que han duit a terme des de la sortida de les seves cases fins a l'entrada al col·legi. En totes les gràfiques s'ha utilitzat la mateixa escala.



a. Quina és la gràfica que relaciona amb la descripció que ha fet cadascú?
b. Qui viu més aprop del col·legi?
c. Qui va tardà menys en arribar-hi?

2.5 Funció exponencial

2.5.1 Càlcul de $f(x)$

Exercici **56.** Trobeu el terme desè de la sèrie numèrica: 2, 4, 8, 16, 32, ... Podríeu trobar el terme 20è? Podríeu enunciar la regla de formació?

Exercici **57.** Donades les funcions (a.) $y = 2^x$, (b.) $y = 3^x$, (c.) $y = 0,5^x$, (d.) $y = 0,1^x$ i (e.) $y = 1,5^x$, calculeu (a.) la y per a $x = 2$, (b.) la y que correspon a $x = 0$, (c.) la y que correspon a $x = -1$, (d.) $y(1)$, (e.) $y(3)$ i (f.) $y(0,5)$.

Exercici **58.** Determineu la fórmula de la funció exponencial on cada terme enter s'obté aplicant un augment percentual del 10% respecte de l'anterior. Podeu calcular els 10 primers termes? I el terme 40è?

Exercici **59.** Donades les funcions (a.) $f(x) = 10^x$, (b.) $g(x) = 0,25^x$, (c.) $h(x) = 4^x$, (d.) $t(x) = 0,2^x$ i (e.) $u(x) = 5^x$, calculeu els valors de les funcions per a $x = 1, 2, 3, -1, -2, -3$. Noteu alguna relació entre les funcions $g(x)$ i $h(x)$? I entre les funcions $t(x)$ in $u(x)$?

Exercici **60.** Determineu la fórmula de la funció exponencial determinada per la progressió:

1. Pas 1 → 20 cm,
2. Pas 2 → 5% més de 20 cm = 21 cm,
3. Pas 3 → 5% més de 21 cm = 22, 05 cm
4. ...

Trobeu el terme 15è.

Exercici **61.** Calculeu el valor de la $f(t)$ per a $t = 2$, $t = 5$, $t = 0$ i $t = -2$ per a (a.) $f(t) = 0.2^t$, (b.) $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, (c.) $f(t) = 12^t$ i (d.) $f(t) = 0.3^t$

Exercici **62.** Determineu la fórmula de la funció exponencial determinada per la progressió: (1.) Pas 1 → 6 l, (2.) Pas 2 → un 25% menys de 6 l = 4, 5 l, (3.) Pas 3 → un 25% menys del pas 2 = 3, 375 l (4.) ... . Trobeu el terme 15è.

Exercici **63.** Donada la funció $f(x) = 0,7^x$, determineu les coordenades dels punts $P = (-2, a)$, $Q = (-1, b)$, $R = (1.55, c)$ i $S = (3.9, d)$ que pertanyen a la seva gràfica.

Exercici **64.** (la paradoxa de Zenó) Zenó plantejava la següent paradoxa:

"una persona vol caminar 1 metre. Però en comptes de fer-ho d'una tirada, en primer terme camina la meitat del camí, després camina la meitat de la meitat, i així successivament.

D'aquesta manera mai arribaria a assolir el punt d'arribada, ja que és necessari una infinitat de passos per arribar-hi, però la distància de partida era finita"

Això suposava per a Zenó una paradoxa. Podríeu calcular quina distància caminaria a la passa 11a? I si el recorregut fos de 8 quilòmetres en comptes d'un metre? I si en comptes de caminar la meitat cada cop el personatge de la paradoxa recorregués un dos cinquens?

Exercici **65.** Donada la funció $f(x) = 3.2^x$, trobeu (a.) $f(2)$, (b.) $f(0.25)$, (c.) $f(0.8)$, (d.) $f(0)$, (e.) $f(-1)$ i (f.) $f(-10)$.

2.5.2 Determinació de $f(x)$ i càlcul de $f(x_0)$

Exercici **66.** Determineu la funció exponencial $f(x) = a^x$ si sabem que $f(2) = 16$. Trobeu $f(3)$.

Exercici **67.** Sabem $f(x)$ és una funció exponencial. Trobeu $f(5)$ si sabem que:

a. $f(2) = 81$
b. $f(3) = 0,008$
c. $f(3) = 27$
d. $f(4) = 0,4096$
e. $f(4) = 625$
f. $f(6) = 0,015625$

Exercici **68.** Determineu la funció exponencial $f(x) = a^x$ si sabem que $f(x)$ passa pel punt $P = (1,3)$.

Exercici **69.** Si $f(x) = a^x$ és una funció exponencial, calculeu el paràmetre a si sabem que passa pel punt $P = (7,3)$.

Exercici **70.** Determineu la funció exponencial $f(x) = a^x$ si sabem que passa pel punt $P = (2.5, 0.1)$. Podem esperar un valor de a major o menor que 1?

2.5.3 Representació gràfica

Exercici **71.** Representeu gràficament les funcions exponencials dels exercicis 57 i 59.

Exercici **72.** (a.) Emparelleu les expressions algebraiques, les taules de valors i les expressions verbals (hi pot haver més d'un emparellament). (b.) Podeu representar gràficament aquestes funcions?

A. Expressió algebraica

a. $y = 2^x$
b. $y = 3^x$
c. $y = 0,5^x$
d. $y = 5 \cdot 2^x$

B. Taules de valors

a.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	9	27	81

b.

x	0	2	5
$f(x)$	5	20	160

x	0	2	3	6
$f(x)$	1	0,25	0,125	0,015625

c.
d.

x	0	1	3	-2
$f(x)$	1	2	8	0,25

C. Expressions verbals

a. La població inicial és de 5 homes i cada any s'incrementa la població un 2%
b. La població inicial és de 5 homes i cada any s'incrementa el doble la població
c. Cada terme enter és el doble de l'anterior
d. Cada terme enter és un 300 % l'anterior
e. La població inicial és de 5 homes i cada any s'incrementa la població un 200%
f. Cada vegada, feim la meitat

Exercici **73.** Relacioneu les funcions exponencials següents amb el tipus de gràfic (creixent, decreixent o constant):

a. $f(x) = 2^x$

b. $y = 5^x$

c. $y = 0,1^x$

d. $y = 1^x$

e. $y = \frac{2}{3}^x$

f. $y = \frac{5}{2}^x$

g. $f(x) = 10^x$

Exercici **74.** Representeu gràficament les funcions dels exercicis 60 i 62.

2.6 Funció quadràtica

Recordem de cursos anteriors que una funció de l'estil $y = ax + b$ donava lloc a una recta i que totes[1] les rectes al pla cartesià venien donades per funcions d'aquest estil. Aquestes funcions s'anomenaven funcions afins. Per tant, totes les altres funcions donen llocs a corbes.

Ocupem-nos tot seguit de les funcions que tenen un factor de segon grau en la seva fórmula, és a dir, que tenen x^2 però no tenen cap potència d'exponent major.

- $y = x^2$

  Aquesta funció dóna lloc a la gràfica següent (figura 2.3):

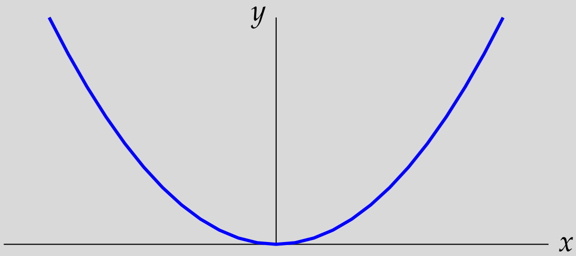
  

  Figura 2.3 Paràbola $y = x^2$

  Aquest tipus de corba es coneix com a *paràbola* i es caracteritza perquè tots els punts de la corba esta a la mateixa distància d'un punt fix, anomenat *focus*, i una recta, anomenada *directriu* (vegeu ??). Té la propietat que qualsevol *raig* vertical que incideix a la paràbola va a parar al focus. Això és utilitzat a les antenes parabòliques per amplificar les senyals.

  Existeix un punt singular: el vèrtex de la paràbola, on la paràbola passa de decrèixer a crèixer.

  A continuació anirem complicant aquesta fórmula, mica en mica, i veurem que lexs corbes resultants també donen lloc a paràboles. A més, les transformacions de la fórmula correspondran a moviments geomètrics d'aquesta paràbola base.

- $y = (x - B)^2$

[1] Excepte les rectes verticals.

Aquesta transformació correspon a una translació vertical de la paràbola. La paràbola es mou B unitats a la dreta. O sigui, el seu vèrtex es mou a la posició $(B, 0)$. Vegeu figura

- $y = (x - B)^2 + C$

  Aquesta transformació fa que el vèrtex de la paràbola pugi verticalment C unitats. Per tant, el vèrtex d'aquesta paràbola queda situat a (B, C). Vegeu figura

- $y = A(x - B)^2 + C$

  La introducció del paràmetre A fa que cada valor de $(x-B)^2$ es multipliqui per A. Per tant, si $|A|$ és major que 1, això farà que s'obtingui un valor major que si no es tingués A. Per tant, y tendrà un valor major i, llavors, la paràbola serà més tancada. En el cas, en que $|A| < 1$, la paràbola serà més oberta, més *gruixada*. En definitiva, el paràmetre A determina l'*obertura* de la paràbola. Vegeu figura

  – Si $A > 0$, la paràbola és *còncava*.

  – Si $A < 0$, la paràbola és *convexa*.

En general per a representar una paràbola es determinen: (a.) Orientació (b.) Vèrtex (c.) Punts de tall amb els eixos . Vegem com determinar aquests components per una paràbola genèrica.

- **Per $y = A(x - B)^2 + C$**

  – Orientació:

    ⋆ Si $A > 0$, la paràbola és còncava.

    ⋆ Si $A < 0$, la paràbola és convexa.

  – Vèrtex: el vèrtex té coordenades (B, C)

  – Punts de tall amb els eixos:

    ⋆ El punt de tall amb l'eix Y es troba substituïnt $x = 0$ a la fórmula $y = A(x - B)^2 + C$.

    ⋆ El punt de tall amb l'eix X, anàlogament, es troba fent $y = 0$ a l'equació $y = A(x - B)^2 + C$.

- **Per $y = ax^2 + bx + c$**

  – Orientació:

- ⋆ Si $a > 0$, la paràbola és còncava.
- ⋆ Si $a < 0$, la paràbola és convexa.

– Vèrtex: El vèrtex és el punt (x_v, y_v) i s'obté amb la fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$
$$y_v = y(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

– Punts de tall amb els eixos:

- ⋆ El punt de tall amb l'eix Y es troba substituïnt $x = 0$ a la fórmula $y = ax^2 + bx + c$.
- ⋆ El punt de tall amb l'eix X, anàlogament, es troba substituïnt $y = 0$ a l'equació $y = ax^2 + bx + c$.

Notem que sempre podem passar d'una forma a altra d'una paràbola usant les transformacions que vàrem veure a l'apartat de les equacions de 2n grau (equació 1.1, pàgina 5).

2.6.1 Representació gràfica de funcions quadràtiques

Exercici **75.** Representeu gràficament les funcions següents:

a. $y = (x-2)^2 + 3$
b. $y = -2(x-3)^2 + 5$
c. $y = -(x+2)^2 - 4$
d. $y = -4x^2 - 8x + 12$
e. $y = -10x^2 - 20x$
f. $y = 2x^2 - 4x - 1$

Exercici **76.** Representeu les funcions següents:

a. $y = x^2 + 2$
b. $y = (x-2)^2$
c. $y = 2x^2 - x + 2$
d. $y = 3(x-1)^2$
e. $y = -x^2 + x - 10$
f. $y = (x+3)^2 + 1$
g. $y = 2x^2 - 8x$
h. $y = (x-1)(x+2) + 3$
i. $y = -2(x-3)^2 - 10$

En cada cas, trobeu el vèrtex de la paràbola.

Exercici **77.** Representeu:

a. $y = 2x^2 + 12x + 16$
b. $y = x^2 - 2x + 1$
c. $y = -x^2 - 2x - 4$
d. $y = x^2 - 2x$
e. $y = -x^2 + 2x - 2$
f. $y = -3x^2$
g. $y = 2x^2 - 8$
h. $y = -(x+10)^2 - 10$

2.6.2 Càlcul del vèrtex, orientació i punts de tall amb els eixos

Exercici **78.** Trobeu la curvatura, el vèrtex i els punts de talls amb els eixos d'aquelles funcions que donin lloc a paràboles:

a. $y = 2x^2 + 2x - 12$
b. $y = -x^2 - 3x - 2$
c. $y = 3x^2 + 9x$
d. $y = -3x^2 + 9$
e. $y = 3x^2 + 9$
f. $y = -x^2 - 2x - 4$
g. $y = -x^2 - 3x - 2$
h. $y = -x^2$
i. $y = -x^2 + 2$
j. $y = -2x^2 + 7$
k. $y = -x^2 + 25$
l. $y = -x^2 - 25$
m. $y = x^2 - 2x + 3$
n. $y = (x-2)^2 + 3(x-3)$
o. $y = 3(x-3)^2 - 3x^2$

Exercici **79.** Trobeu el vèrtex de la paràbola que té com a fórmula $y = -x^2 + 4$

Exercici **80.** Trobeu el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de les paràboles:

a. $y = (x+2)^2 + 2$
b. $y = (x-2)^2 + 2$
c. $y = 4(x-2)^2 - 3$
d. $y = -2(x+3)^2 + 5$
e. $y = -5(x-3)^2 - 5$
f. $y = -2(x-1)^2$

Exercici **81.** Trobeu el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de les paràboles:

a. $y = -(x+2)^2$
b. $y = (x-1)(x-2)$
c. $y = (x-2)^2 - 1$
d. $y = (x-1)^2 - 1$
e. $y = 2(x-1)(x+3)$
f. $y = 2(x-1)(x-2) - 2$

2.7 Funcions afins

TODO Interporlació: CFGS

3
Modelització

3.1 Models exponencials

Exercici **82.** (increment de sou) Per conveni col·lectiu, el sou dels treballadors d'una empresa s'incrementa a raó del 2% anual. Si a hores d'ara el sou d'un treballador és de 1000 €, què cobrarà aquest treballador després de 10 anys? I de 20 anys? I de 40 anys? En quin moment passarà dels 2000 €?

Exercici **83.** (IPC) L'Índex de Preus al Consum (IPC) d'Espanya l'any 2017 ha estat del 3%. Això vol dir que el preu d'un producte s'ha encarit un 3% aquest any respecte l'any anterior. Si assumim que aquest serà l'IPC dels pròxims anys, (a.) què costarà d'aquí 10 anys un producte que ara val 1 €? (b.) I d'aquí 20 anys? (c.) Quin tant per cent s'haurà encarit? (d.) Quan sobrepassarà el producte els 2 €?

Exercici **84.** (població de bacteris) El creixement d'una població de bacteris es modelitza habitualment mitjançant una funció exponencial. En concret, a cada generació es doblen el nombre de bacteris de la generació anterior (es considera la *generació 0* el bacteri primigeni).

a. Trobeu el nombre de bacteris que hi haurà a les primeres 10 generacions

b. A partir de quina generació el nombre de bacteris serà superior a un milió?

Exercici **85.** (població d'EUA) Segons l'Oficina del Cens dels Estats Units d'Amèrica, des del 1910 a 2010 la població dels EUA va créixer un 1,5% més cada any. Si sabem que la població l'any 1910 era de 92.228.531 habitants, podeu calcular la població dels anys 1911, 1912, 1920, 1950 i 2010?

Exercici **86.** (ISO 216) El format de paper DIN A és un dels més usats. Té la particularitat de què cada *format* s'obté doblegant el paper del format anterior per la meitat.

a. Podríeu calcular les mesures d'un hipotètic DIN A 11? I per un DIN A 12? I per un DIN A 20?

b. En quin moment el format DIN A seria més petit que 1 mm × 1 mm?

Exercici **87.** (virus mortal) Recentment s'ha descobert un nou virus, del qual per ara no hi ha cap vacuna. La malaltia va començar amb un portador inicial, que la va adquirir a través d'una mossegada de simi. Es sap que, de mitjana, una persona infecta a tres persones noves abans de morir. Això es considera una *passa de creixement del virus*.

a. Quantes persones s'infectaran a la passa 2? I a la 3? I a la 10? I a la 20?

b. Quantes persones hauran estat infectades des del començament fins a la passa 10?

c. Quantes passes són necessàries per a infectar a tota la població espanyola: 46.468.102 habitants?

Exercici **88.** (radioactivitat) Els elements radioactius es descomponen seguint un model exponencial: $Q(t) = Q_0 A^{-t}$, on

- Q_0 és la quantitat de material radioactiu que tenim al principi, és a dir, la quantitat per a $t = 0$.
- A és una constant que depèn del material radioactiu[2]
- t són el temps transcorregut (en segons)

Si sabem que un element concret té una constant $A = 2$, trobeu la quantitat de material radioactiu que tendrem quan hagin passat 20 segons.

Exercici **89.** (cultiu bacterià) En un cultiu bacterià sabem que cada bacteri dóna lloc a dos bacteris cada minut. Si sabem que a hores d'ara hi ha 2 ml de bacteris a un recipient: (a.) Determineu la quantitat de bacteris hi haurà després de 3 minuts i després d'1 hora? (b.) En quin moment haurem sobrepassat el litre de bacteris?

Exercici **90.** (població d'un país) La població d'un país (mesurada en milions d'habitants) creix exponencialment de la forma $P(t) = 30 \cdot e^{0,01t}$, on la variable t representa els anys transcorreguts des de l'any base 1980.

a. Calcula la població pels anys 1980 a 1995

b. En quin any la població duplicarà la de 1980?

c. En quin any la població duplicarà la de 1990?

[2] Està relacionada amb la *constant de descomposició exponencial*.

3.2 Models quadràtics

3.2.1 Aplicació de la fórmula de segon grau

Exercici **91.** (Dipòsit d'aigua) Es vol construir un dipòsit en forma de prisme de base quadrada. Per motius legals, no es pot fer el dipòsit amb una altura major que 10 m. (a.) Quina hauria de ser el costat de la base si es vol que el seu volum sigui de 1000 m^3? (b.) Si al final es construeix un dipòsit de 4 m d'amplària, quin serà el seu volum?

Exercici **92.** (El safareig) Es vol construir un safareig. Per falta d'espai, no el podem fer més llarg que 5 metres. D'altra banda, per qüestions estètiques, volem que l'alçada faci un metre més que d'amplada. Amb aquestes restriccions, quin volum tendria el safareig si fes 1 metre d'amplada? Quina capacitat tendria?

Si volem que el safareig tengui una capacitat de 43.750 l, quines han de ser les seves dimensions?

Exercici **93.** Un cub i una esfera tenen l'aresta i el radi iguals. Si sabem que l'àrea de l'esfera és de 400 m^2, què val l'àrea del cub?

Exercici **94.** (El tanc de combustible) Es vol pintar un tanc de combustible amb una pintura anticorrosiva (figura 3.1).

Figura 3.1 Tanc de combustible

a. Quina quantitat de pintura necessitarem?
b. Quin diàmetre hauria de tenir el dipòsit si volguéssim gastar 10.000 litres de pintura?

Dades necessàries: (a.) El diàmetre del dipòsit és de 5 m (b.) La seva alçada és de 10 m.

Exercici 95. (Les piràmides egípcies) La piràmide de Keops, de base quadrada, té una altura de 146 metres i el costat de la seva base és de 230 m.

a. Si la omplíssim d'aigua, quina quantitat d'aigua hi cabria?
b. Quina quantitat de pintura necessitaríem per pintar-la?
c. En quants de metres hauríem d'acursar la piràmide per a què tingués un volum de 1000 m^3?

3.2.1.1 Caiguda lliure

La caiguda lliure consisteix en deixar anar un objecte des d'una altura determinada fins que toqui el terra. Aquest objecte només està sotmès a la força de la gravetat. Es suposa que la resistència a l'aire és nul·la.

Es suposa que l'origen de coordenades està enterra. Si deixem anar un objecte des d'una altura inicial h, la fórmula que relaciona l'altura que té l'objecte en funció del temps és:

$$s = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

on $g = 9{,}8 \mathrm{m/s^2}$.

Exercici 96. Quants de segons tardarà a tocar el terra un cos que es llança des d'una altura de 20 metres? A quina alçada es trobarà el cos al cap de 2 segons?

Exercici 97. Calculeu quan tocarà el terra una bomba que es llanci des d'una distància de 1000 metres?

Exercici 98. Un paracaigudista es llança des de 5000 metres d'alçada. Si ha d'ejectar el paracaigudes als 1500 metres, a quina alçada es trobarà en aquest moment? Quant de temps tardarà a arribar a aquesta alçada?

3.2.1.2 Distància de frenada

La distància de frenada és la distància que recorre un vehicle fins que s'atura si inicialment anava a una certa velocitat v. Aquesta distància es pot calcular amb la fórmula:

$$d = \frac{v^2}{100},$$

on la distància resultant d serà en metres i la velocitat v estarà expressada en km/h.

En aquesta fórmula es suposa que la via on circula el vehicle no té inclinació, és a dir, que el vehicle circula per un terreny totalment horitzontal. També es suposa que el temps de reacció és instantani i que l'adherència és òptima.

La fórmula anterior es pot reescriure com

$$d = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Això suposa una regla pràctica: dividir la velocitat a la que anam entre deu i fer el seu quadrat.

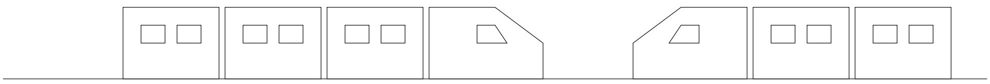
D'aquesta manera, tendríem que si anàssim a 42 km/h, aleshores hauríem de deixar, aproximadament, $4 \cdot 4 = 16$ m de distància de seguretat. Si anàssim a 100 km/h, aleshores n'hauríem de deixar $10 \cdot 10 = 100$ m.

Exercici **99.** Calculeu la distància de frenada d'un cotxe que viatja a 80 km/h

Exercici **100.** Si un cotxe va a 120 km/h quina distància necessita per frenar en sec? Tendrà temps d'evitar un accident que es troba a 100 metres?

Exercici **101.** Un motorista va a 50 km/h. A 20 metres de distància, el semàfor es posa en groc. Si frena en sec, s'aturarà abans o després del semàfor?

Exercici **102.** Xocaran aquests dos trens?



Sabem que el primer va a 20 km/h i el segon a 10 km/h i que la distància que els separa en el moment que tots dos frenen és de 200 metres.

3.2.2 Problemes d'optimització

Exercici **103.** (el preu de les bicicletes) Es vol dissenyar un nou model de bicicletes. Basant-nos en altres models de bicicleta i en la pròpia experiència es sap que la funció de demanda és

$$\text{Unitats venudes} = 70.000 - 200 \cdot P,$$

on P és el preu de la bicicleta.

a. Quin serà el benefici màxim que podem obtenir? (noteu que el benefici serà la multiplicació del preu de venda de cada unitat pel nombre d'unitats venudes).

b. Fins quan tendrem beneficis (no perdre en el negoci)?

Exercici **104.** (el preu de l'entrada) A un municipi es vol programar un concert d'estiu. Es decideix contractar a un grup famòs i que aquest toqui a l'estadi de futbol de la localitat, en previsió de la considerable afluència, que té una capacitat de 10.000 persones. Es convoca un ple extraordinari a l'ajuntament per debatre un únic punt: "Quin ha de ser el preu de l'entrada del concert".
Després de molt de discutir es decideix fixar el preu que faci màxim els doblers recaptats. Però l'únic que es sap és que: quan més car sigui el preu de l'entrada més poca gent la comprarà. Podeu ajudar a trobar aquest preu?

Podeu suposar que per cada dos euros de pujada, baixarà un 10% el nombre de vendes. I que si l'entrada és gratuïta, aleshores l'estadi s'omplirà.

Exercici **105.** (la capsa de cartró) Els costos de producció d'una capsa de cartró depenen de la seva àrea: cada centímetre quadrat de capsa costa 0,01 €. Es vol fabricar una capsa ortoèdrica com s'indica a la figura següent (figura 3.2), tenint en compte que els estàndards imposen que la mitjana aritmètica de l'amplada i l'alçada sigui igual a 50 cm. Quin serà el cost màxim? Quines mesures tendria la capsa en aquest cas?

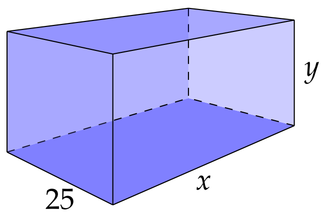


Figura 3.2 Esboç de la capsa de cartró

Exercici **106.** (el moment de vendre) Una cooperativa agrícola ha de vendre els tomàquets el més aviat possible, quan els preus són alts i el deteriorament és baix. Ara mateix, la cooperativa té 25 tones a la seva disposició i pot afegir-ne dues tones a la setmana d'espera. El benefici actual és de 250 € per tona, però es redueix a raó de 15 € per tona per cada setmana que es retarda. Quan s'han de vendre els tomàquets per tenir el benefici màxim?

Exercici **107.** (la tarifa de transports) Una companyia de transports cobra 1,25 € per trajecte. Actualment té una mitjana de 10.000 usuaris per dia. L'empresa necessita per augmentar els ingressos, però estima que, per cada 0,10 € d'augment en la tarifa, l'empresa perdrà 500 usuaris. Què ha de cobrar l'empresa per maximitzar els ingressos?

Exercici **108.** Es vol un recipient en forma d'ortoedre de tal manera que el seu volum sigui màxim. L'única restricció que és un costat ha de mesurar 10 cm i els altres dos costats sumats són iguals a 25 cm. Quines són les mesures d'aquest ortoedre?

Exercici **109.** (l'edifici de menor cost) Es vol construir un magatzem amb el menor cost possible. Es sap que:

a. El magatzem ha de tenir 20 metres de façana

b. Cada metre que es construeix en alçada costa 25 € i cada metre que es construeix en amplada costa 5 €

Com han de ser la fondari i l'alçada del magatzem si el constructor vol que li costi exactament 5000 € i vol maximitzar el seu volum?
Quin volum màxim s'aconseguiria? Quants de litres hi cabrien?

4
Probabilitat

4.1 Àlgebra de successos

Exercici **110.** Es llancen dos daus i es multiplica el nombre de punts obtinguts en cadascun.

a. Quants de resultats es poden obtenir?
b. Descriu l'espai mostral.
c. Escriu dos esdeveniments que siguin elementals i dos que siguin compostos

Exercici **111.** Tenim un dau de 4 cares numerades de l'1 al 4. El tirem una vegada. Escriviu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles esdeveniments classificats pel seu nombre d'elements.

Exercici **112.** Tenim un dau de 6 cares blanc, en el qual s'han escrit a les cares les lletres següents: A, A, A, B, B, C. Escriviu tots els esdeveniments possibles.

Exercici **113.** Determineu el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 48

a. Amb numeració inferior a 4
b. De bastos i més gran que 4
c. Figures d'oros o bastos

Si aquests conjunts de cartes són, respectivament, A, B i C, calculeu (a.) $A \cup B$, (b.) $A \cap B$, (c.) $A \setminus B$, (d.) $B \setminus A$, (e.) A^c, (f.) B^c i (g.) C^c .

Exercici **114.** En una baralla espanyola, enumereu i compteu les cartes dels esdeveniments:

a. Oros i sets
b. Oros o sets
c. Set d'oros
d. Figures

e. Oros o figures

f. Oros i figures

Feis la intersecció, la unió i la diferència del primer amb els altres esdeveniments. I trobeu el contrari de cadascun d'ells.

Exercici **115.** Per a un dau de sis cares, escriviu els esdeveniments: (a.) obtenir parell, (b.) obtenir senar, (c.) obtenir parell i major que 3, (d.) obtenir parell o major que 3, (e.) obtenir parell però que no sigui major que 3, (f.) obtenir el contrari de parell i major que 3. Calculeu els seus successos complementaris i feis la unió, la intersecció i la diferència d'aquests esdeveniments de manera que, com a màxim, calculeu set operacions diferents.

Exercici **116.** Es llança una ruleta de 12 costats, numerats de l'1 al 12, i s'observa el resultat obtingut.

a. Trobeu l'espai mostral.
b. Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:

  – A = "obtenir un nombre parell"
  – B = "obtenir un nombre senar"
  – C = "obtenir un múltiple de 3"
  – D = "obtenir un múltiple de 5"
  – E = "obtenir un nombre major que 4"
  – F = "obtenir un nombre menor que 6"
  – G = "obtenir un múltiple de 3 i 4"

c. Calculeu els seus esdeveniments contraris.
d. Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d'A amb cadascun dels altres esdeveniments.
e. Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

Exercici **117.** Digueu quins d'aquests successos són successos impossibles i quins són successos segurs (n'hi ha que no són ni segurs ni impossibles):

a. la suma del resultat de dos daus és 1

b. llancem tres monedes i surten una cara i dues creus

c. agafem una fitxa de dòmino a l'atzar i la suma de punts és més gran de 1

d. llancem dues monedes i el nombre de cares menys el nombre de creus és més petit o igual a dos

e. llancem dos daus i la resta de punts és 6

f. llancem un dau de 8 cares i el resultat es més petit que 10

g. llancem 10 monedes i obtenim 10 cares més que creus

h. llancem dos daus i la multiplicació dels punts és múltiple de 7

i. en el sorteig de la primitiva surt premiat el número 65478

j. llancem dos daus i la multiplicació dels dos números es menor de 40

4.2 Experiments simples

Exercici **118.** En l'experiment consistent a llançar un dau cúbic i observar-ne la puntuació, considerem els esdeveniments següents:

A. "Obtenir un múltiple de 3"

B. "Obtenir un divisor de 4"

C. "Obtenir un nombre senar"

D. "Obtenir un nombre menor que 5"

Calculeu:

a. $p(A)$
b. $p(B)$
c. $p(C)$
d. $p(D)$
e. $p(A \cup C)$
f. $p(A \cap C)$
g. $p(A \cap B)$
h. $p(A^c)$

Exercici **119.** En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

a. Sota
b. Copa o oros
c. Copa i oros
d. Figura i espasa
e. Figura o espasa
f. Cavall o espasa

Exercici **120.** En una bossa hi ha 5 bolles vermelles, 10 bolles negres i 5 bolles blaves. En treiem una i miram de quin color és. Calculeu la probabilitat de:

a. Treure una bolla vermella
b. Treure una bolla negra o blava
c. Treure una bolla que no sigui blava.

Exercici **121.** En una rifa de mil nombres (del 000 al 999) es sorteja un viatge. Calculeu:

a. La probabilitat de guanyar el premi si comprem cinc nombres
b. La probabilitat que el nombre premiat acabi en 5

Exercici **122.** En una bossa hi ha deu boles numerades de l'1 al 10. Si extraiem una bola de la bossa, calculeu la probabilitat de:

a. Treure un 7

b. Treure un nombre menor que 7
c. Treure un nombre no inferior 7
d. Treure un múltiple de 5
e. Treure un divisor de 6
f. Treure un nombre primer

Exercici 123. En una capsa hi ha vuit bolles numerades consecutivament com segueix: 2, 4, 6, ..., 16. Si diem A = "treure un nombre menor o igual que 10" i B = "treure un múltiple de 3":

a. Escriu els elements de A i de B
b. Calcula la probabilitat de:

- A
- B
- A^c
- B^c
- $A \cup B$
- $A \cap B$

Exercici 124. (Pràctica dels complementaris) Completeu la taula següent:

Experiència	Esdeveniment	Probabilitat	Complementari	Probabilitat
Tirar un dau	Surt parell			
Tirar un dau	Surt un 6			
Tirar un dau	Surt un 3 o un 6			
Prendre una carta de póquer			Surt comodí	
Tirar una moneda			Surt cara	
		1/6		5/6
Triar dia de gener				30/31
Triar dia d'abril		1/2		
Triar una vocal		2/5		3/5
Prendre una carta de la baralla espanyola	Surt múltiple de tres			
Prendre una carta de la baralla espanyola		9/48		
		1/2		1/2
	Surt la Z			27/28
			Surt la X	

Exercici 125. (dòmino) En un joc de dòmino, s'estreu una fitxa a l'atzar. Trobeu la probabilitat de què (a.) la suma de punts sigui 6, (b.) almenys un dels dos nombres sigui

un 4, (c.) la suma de punts sigui un múltiple de tres, (d.) la resta dels punts d'una banda i l'altre doni 6, (e.) la suma de punts sigui un nombre imparell

Exercici **126.** (les lletres d'una paraula) Escrivim cada una de les lletres de la paraula "CAVALLERESCA" en un paper i les posem en una bossa. N'extraiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què (a.) treure la lletra A, (b.) treure la lletra E, (c.) treure la lletra L, (d.) treure una vocal, (e.) treure una consonant.

Exercici **127.** (el centre escolar) En un centre escolar hi ha 1000 alumnes repartits segons s'hi indica a la taula 4.1. Calculeu la probabilitat que si triem una persona a l'atzar, aquesta persona: (a.) sigui home, (b.) jugui a futbol, (c.) sigui home i jugui a bàsquet, (d.) sigui home que juga a bàsquet i futbol, (e.) sigui dona que juga a futbol però no a bàsquet .

Tret	Dones	Homes
Usen ulleres	146	135
No usen ulleres	368	351
Juguen a futbol	335	53
Juguen a bàsquet	229	169
No practiquen cap esport	97	298

Figura 4.1 Trets de les persones d'un centre escolar

Nota: potser podeu servir els diagrames de Venn.

Exercici **128.** (l'urna) D'una bossa que conté 3 bolles blanques, 2 bolles vermelles i 4 bolles negres, en traiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat dels esdeveniments següents:

a. Obtenir una bolla blanca.

b. Obtenir una bolla vermella o negra.

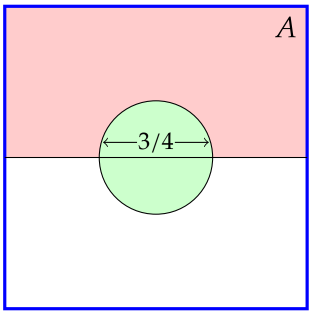
c. Obtenir una bolla que no sigui negra.

Exercici **129.** (una altra urna) D'una bossa que conté 4 bolles blanques i 3 bolles vermelles, en traiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què: (a.) es tregui una bolla blanca; (b.) es tregui una bolla verda; (c.) no es tregui cap bolla

Exercici **130.** (caramels) Tenim una bossa amb 23 caramels: 7 són de maduixa, 4 de menta i la resta de taronja. Calculeu la probabilitat de treure a l'atzar un caramel de taronja.

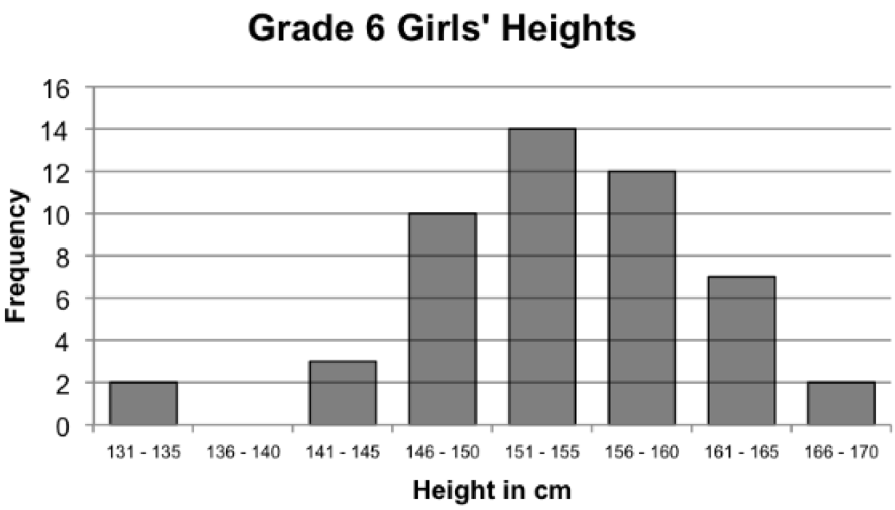
Exercici **131.** (delegat i subdelegat) Una classe de 10 alumnes, on hi assiteix regularment n'Alícia, fan les votacions per a escollir delegat i subdelegat. Sabem que n'Alícia no és delegada (s'ha presentat voluntari una altra persona). Determineu la probabilitat de què sigui subdelegada (sabent que no hi pot haver acumulació de càrrecs).

Exercici **132.** (Els altres paracaigudistes) Els paracaigudistes realitzen pràctiques d'aterratge en precisió: intenten aterrar al centre d'aquest camp de 1 km^2. Quina probabilitat tenen d'encertar?



- Quina probabilitat hi ha de què no aterrin al centre?
- Quina probabilitat hi ha de què aterrin a l'àrea A (la regió nord del rectangle que no està inclosa dins el cercle)?

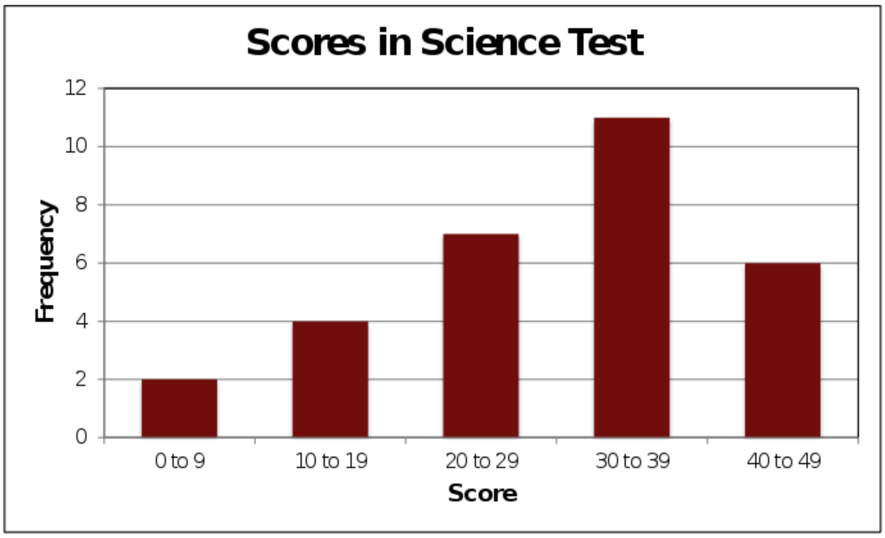
Exercici **133.** (Les alçades de les noies de 6è) Aquesta gràfica mostra les freqüències de l'alçada d'un grup d'al·lotes de 6è de primària (figura 4.1). Totes les alçades han estat arrodonides al centímetre més pròxim (totes les qüestions estan referides a les alçades arrodonides, no a les exactes).



Taula 4.1 Alçades de les nines de 6è de primària

Quina probabilitat tenim que una al·lota d'aquesta classe faci més que $1,50$ m?

Exercici **134.** (Els resultats del test) Aquesta gràfica mostra el nombre de preguntes correctes d'un test de 50 preguntes (figura 4.2).



Taula 4.2 Nombre d'encerts d'un test de 50 preguntes

Quina probabilitat tenim que una persona hagi tret un resultat major que 25?

4.3 Experiments compostos

Exercici **135.** En una bossa hi ha dues boles blanques i tres de negres. Se n'extreuen dues sense devolució i se n'observa el color. Calculeu la probabilitat de què:

a. Les dues boles siguin blanques
b. Siguin de colors diferents
c. Totes dues siguin del mateix color
d. Almenys una sigui negra

Exercici **136.** Tenim una urna amb tres bolles blaves i dues bolles verdes. Extreiem una bolla, *no* la tornem a l'urna i en tornem a extreure una altra.

a. Quina és la probabilitat que les dues boles siguin blaves?
b. I que siguin verdes?
c. I que n'hi hagi una de cada color?

Exercici **137.** En un concurs, a un participant que ha quedat eliminat se li dóna una última oportunitat. Amb els ulls embenats, ha de triar una de les urnes següents a les quals hi ha bolles blanques i bolles negres, i treure una bolla d'aquesta urna:

a. L'urna 1 conté 3 bolles blanques i 4 bolles negres

b. L'urna 2 conté 2 bolles blanques i 1 bolla negra

Treure una bolla blanca li permet continuar en el concurs. Quina és la probabilitat de què pugui continuar?

Exercici **138.** Una de les proves d'unes oposicions consisteix a desenvolupar un tema dels setanta que componen el temari. El dia de la prova s'extreuen dues boles d'una bossa que conté setanta boles numerades de l'1 al 70. Els participants han de triar un dels dos temes corresponents a les boles que han sortit i desenvolupar-lo.
Si un participant ha estudiat 25 temes, quina és la probabilitat que almenys una de les dues boles que s'extreuen correspongui a un dels temes estudiats?

Exercici **139.** S'extreuen dues cartes d'una baralla espanyola de 48 cartes sense devolució. Quina és la probabilitat que s'obtinguin dos reis?

Exercici **140.** En una reunió hi ha quinze homes i vint dones. Sabem que hi ha cinc homes fumadors i quatre dones fumadores. Si triem una persona de la reunió a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui una dona fumadora?

Exercici **141.** En un examen hi ha dues preguntes de tipus test amb quatre respostes possibles cadascuna, de les quals només una és correcta. Si triem les respostes d'aquestes dues preguntes a l'atzar, quina probabilitat tenim d'encertar-les totes dues? I d'encertar-ne almenys una?

4.4 Probabilitat condicionada

Exercici **142.** Un lladre a l'escapar de la policia ho pot fer pels carrers A, B o C amb probabilitats del $0,25$, $0,6$ i $0,15$, respectivament. La probabilitat de ser agafat són de $0,4$, $0,5$ i $0,6$ si intenta escapar pels carrers A, B i C respectivament.

a. Trobeu la probabilitat de què la policia agafi el lladre
b. Si el lladre finalment ha estat agafat, quina és la probabilitat de què ho hagi estat en el carrer A?

Exercici **143.** En una classe hi ha 40 persones, distribuïdes de la manera següent:

Sexe	Dretans	Esquerrans
Dona	15	4
Home	15	6

Calculeu les probabilitats següents:

a. Una persona sigui al·lota
b. Una persona sigui dretana
c. Una al·lota sigui esquerrana
d. Sigui al·lot sabent que és esquerrà

Exercici **144.** En una oficina, el 70% dels empleats són asturians. D'entre aquests, el 50% són homes, mentre que dels que no són asturians, només són homes un 20%.

a. Quin percentatge d'empleats són asturians i dones?
b. Calculeu la probabilitat de què un empleat de la oficina sigui dona
c. Si en Fernando treballa a l'oficina, quina és la probabilitat de què sigui asturià?

Exercici **145.** Un jugador de bàsquet acostuma a encertar el 80% dels seus tirs des del punt de llançament de personals. Si tira tres vegades:

a. Calculeu la probabilitat de què encesti dues vegades
b. Calculeu la probabilitat de què no encesta cap pic
c. Sabent que ha encertat en el tercer tir, quina és la probabilitat de què hagi encertat en el segon tir?

Exercici **146.** Una urna conté 4 bolles blanques, 1 de vermella i 5 de negres. Es considera l'experiment aleatori de treure dues bolles a l'atzar i anotar el color. Calcula les probabilitats:

a. Que surti una bolla blanca i negra
b. Que no surti una bolla vermella en cap cas
c. Que la primera bolla sigui negra sabent que la segona és blanca

Exercici **147.** En una classe de 4t d'ESO hi ha 8 al·lots i 12 al·lotes. Cinc al·lots i vuit al·lotes llegeixen habitualment el diari. Si triem a l'atzar un estudiant, calcula la probabilitat de què:

a. Llegeixi el diari i sigui home
b. No llegeixi el diari o sigui home
c. Sigui home sabent que llegeix el diari
d. Llegeixi el diari saben que és home

Exercici **148.** En una capsa de bombons hi ha 5 bombons amb un embolcall blanc i 15 amb un de negre. Hi ha dotze bombons, 2 blancs i 10 negres, que estan farcits de licor. Si treiem un bombó a l'atzar, calcula la probabilitat de què el bombó

a. Tengui l'embolcall negre i sigui farcit
b. Tengui l'embolcall blanc i no sigui farcit

c. Tengui l'embolcall blanc sabent que és farcit
d. Sigui farcit sabent que té l'embolcall negre.

Exercici **149.** En una guarderia hi ha 10 nins i 12 nines. Si 6 nins saben caminar i 6 nines *no* en saben, calcula la probabilitat que, si triem una persona a l'atzar, sigui nin i no sàpiga caminar
Quina probabilitat hi ha de què sabent que no sap caminar, sigui nin?

Exercici **150.** En un dinar, hi ha 28 homes i 32 dones. Han triat carn 16 homes i 20 dones i la resta ha triat peix. Si triem una persona a l'atzar, calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:

a. Que sigui home
b. Que hagi menjat peix
c. Que sigui home i hagi menjat peix
d. Que hagi menjat peix sabent que hem elegit un home

Exercici **151.** A una classe d'ESPA assisteixen regularment a classe un 50% de les persones. D'aquestes, aproven Matemàtiques un 90%. Si no assisteixen regularment a classe només aproven 1 de cada 10 persones. Determineu

a. la probabilitat de què aprovi Matemàtiques
b. la probabilitat de què hagi assistit a classe sabent que ha aprovat

Exercici **152.** Un restaurant té contractats a dos cambrers: Javier i Ana per atendre el servei del menjador. Ana posa el servei el 70% dels dies i es confon al col·locar els coberts només el 5% dels dies. Mentre, Javier col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

a. Aquest matí, l'encarregat del restaurant ha passat revista al servei. Quina és la probabilitat de què trobi algun servei mal col·locat?

b. Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i vol trobar quina és la probabilitat de què hagi estat en Javier

Exercici **153.** Certa persona compra tots els dies el diari local, comprant-lo indistintament en un de les botigues, A i B, que estan més pròximes a ca seva. El 80% dels dies el compra a la botiga A.

a. Quina proporció dels dies compra el diari a la botiga B?

b. Quina probabilitat hi ha de què compri dos dies el diari a la botiga A?

c. Quina és la probabilitat de què dos dies consecutius compri el diari a dues botigues diferents?

Exercici **154.** La probabilitat de què un aficionat al futbol vagi al camp municipal a veure un partit és del 90% quan es disputa en cap de setmana i el 50% si té lloc en un dia laborable. La probabilitat de què un partit es jugui en cap de setmana és la mateixa que se jugui entre setmana.

a. Cert partit es celebrarà la setmana que ve en un dia encara sense determinar. Calculeu la probabilitat de què els aficionats vagin a veure'l al camp

b. Si finalment un aficionat va anar a veure el partit, quina és la probabilitat de què aquest hagi estat en cap de setmana?

Exercici **155.** En una capsa estan desats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

a. Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?

b. Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, quina és la probabilitat de què funcionin els dos correctament?

c. Si el segon no funciona correctament, quina és la probabilitat de què el primer tampoc ho faci?

Exercici **156.** El 25% de les famílies de certa comunitat autònoma espanyola no surt fora de la mateixa durant les vacances d'estiu. El 65% estiueja per la resta de l'estat i el 10% restant se'n va a l'extranger. Dels qui queden a la seva comunitat, només un 10% no usa cotxe en els desplaçaments. Aquesta quantitat augmenta al 30% entre els que surtin per la resta d'Espanya, i al 90% entre els que viatgen a l'extranger.

a. Calculeu el percentatge de famílies d'aquesta comunitat que utilitza el cotxe en els seus desplaçaments d'estiu

b. Una família no usa cotxe en les seves vacances d'estiu. Quina és la probabilitat de què surti de la comunitat movent-se per la resta d'Espanya?

Exercici **157.** Un grup de 40 persones acabar de prendre un bus. D'aquests, només 10 són fumadors. Entre els fumadors, el 70% es mareja durant el viatge. I entre els qui no fumen, aquesta quantitat baixa al 40%.

a. Quina probabilitat hi ha que dues persones siguin fumadores ambdues?

b. Quina és la probabilitat de què un viatger no es maregi?

Exercici **158.** Dos joves aficionats als jocs d'atzar es troben realitzant un solitari amb una baralla espanyola. Extreuen una carta de la baralla i volen saber quina és la probabilitat d'obtenir rei condicionat a què s'hagi tret figura

Exercici **159.** En un país s'ha constituït una comissió parlamentària integrada per deu membres, dels quals set pertanyen al partit governant i la resta al partit de l'oposició. Entre els set membres del partit governant hi ha quatres homes; dos entre els del partit de l'oposició. El president de la comissió s'elegeix per sorteig entre els seus integrants. Celebrat el sorteig, es sap que el president triat ha estat un home. Quin partit té més possibilitats de dirigir la comissió?

Exercici **160.** S'ha fet un estudi d'un nou tractament sobre 120 persones que pateixen certa enfermetat. Trenta d'elles ja han patit l'enfermetat amb anterioritat. Entre les persones que l'han patida anteriorment, el 80% ha reaccionat positivament al nou tractament. De les que no la han patida amb anterioritat, el percentatge de la reacció positiva ha estat del 90%.

a. Si triem a l'atzar un pacient, quina és la probabilitat de què no reaccioni positivament al nou tractament?

b. Si un pacient ha reaccionat positivament al tractament, quina és la probabilitat de què no hagi patit l'enfermetat amb anterioritat?

Apèndix A
Resum de teoria de probabilitat

A.1 Experiments aleatoris

A.1.1 Espai mostral i successos

- *Experiment aleatori* $\longrightarrow$ un experiment del qual no podem predir-ne el resultat. Hi intervé la sort o l'atzar.
- *Experiment determinista* $\longrightarrow$ quan el resultat de l'experiment es pot conèixer abans de dur-lo a terme. No hi intervé la sort.
- *Espai mostral* $\longrightarrow$ és el conjunt de tots els possibles resultats
- Un *esdeveniment* (o *succés*) $\longrightarrow$ és qualsevol subconjunt de l'espai mostral (o sigui, una part de l'espai mostral).
  - *Esdeveniment elemental* $\longrightarrow$ és cadascun dels possibles resultats d'un experiment aleatori. És a dir, són els elements de l'espai mostral
  - *Esdeveniment compost* $\longrightarrow$ està format per dos o més esdeveniments simples. És a dir, és un conjunt de dos o més elements
  - Existeix un *esdeveniment segur*, que es verifica sempre, que és igual a l'espai mostral i un *esdeveniment impossible*, que mai pot ocorre, el qual és igual al conjunt buit (el conjunt que no té cap element), el qual simbolitzem per $\emptyset$.

Exemple **1.** Si tirem un dau, l'espai mostral és $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, els esdeveniments elementals són:

- "treure un 1" = $\{1\}$
- "treure un 2" = $\{2\}$
- "treure un 3" = $\{3\}$
- "treure un 4" = $\{4\}$
- "treure un 5" = $\{5\}$
- "treure un 6" = $\{6\}$

I un esdeveniment compost és "treure 5 o 6" = $\{5, 6\}$. I un altre seria "treure parell" = $\{2, 4, 6\}$.

A.1.2 Operacions amb esdeveniments

- La *unió* de dos esdeveniments A i $B \longrightarrow$ és l'esdeveniment format per cada element que hi ha a A o en B. S'escriu $A \cup B$. Que passi A o B es el mateix que passi $A \cup B$.
- La *intersecció* de dos esdeveniments A i $B \longrightarrow$ és l'esdeveniment format per cada element que apareix simultàniament a A i a B. S'escriu $A \cap B$. Que passi A i B a la vegada és el mateix que passi $A \cap B$.
- La *diferència* entre A i B, que s'escriu $A \setminus B$, és l'esdeveniment format pels elements que pertanyen a A però que no pertanyen a B.
- *L'esdeveniment contrari* (o *complementari*) d'un esdeveniment $A \longrightarrow$ és l'esdeveniment format per tots els elements de l'espai mostral que no estan a A. S'escriu A^c o $\overline{A}$.

Exemple **2.** En l'experiment de llançar un dau i mirar el resultat, tenim que $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si agafam A = "que surti parell" i B = "que surti un nombre menor que 5", tenim que:

- $A \cup B$ = "que surti parell o menor que 5" $= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Per tant, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A \cap B$ = "que surti parell i menor que 5" $= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$. Per tant, $A \cap B = \{2, 4\}$.
- $A \setminus B = \{6\}$
- $B \setminus A = \{1, 2\}$
- A^c = el contrari de què surti parell $= \{1, 3, 5\}$
- B^c = el contrari de què surti un nombre menor que 5 $= \{6\}$

Quan dos esdeveniments es poden donar simultàniament diem que són *compatibles*. En cas contrari, es diuen *incompatibles* (o *mútuament excloents*).

Dos esdeveniments A i B són compatibles quan $A \cap B \neq \emptyset$. Si $A \cap B = \emptyset$, aleshores A i B són incompatibles.

Exemple **3.** En l'experiment de llançar un dau, si consideram els esdeveniments A = "Sortir parell" i B = "Sortir múltiple de 3" i C = "Sortir potència de 2", tenim que

- A i B són compatibles perquè 6 és parell i múltiple de 3 a la vegada
- B i C són incompatibles perquè no hi ha cap nombre múltiple de 3 que a la vegada sigui potència de 2 (cap nombre està a la vegada a $\{3, 6\}$ i $\{2, 4\}$).

A.2 Probabilitat d'un esdeveniment

- La **probabilitat** d'un esdeveniment mesura la *facilitat* de què ocorri aquest esdeveniment. A cada esdeveniment se li assigna un nombre entre 0 i 1. Aquest nombre vendria a ser el tant per u de què pugui ocorre l'esdeveniment.
- La probabilitat de l'esdeveniment segur és sempre 1
- La probabilitat de l'esdeveniment impossible és sempre 0

En general, el càlcul de probabilitats és complicat si no es suposa que tots els esdeveniments elementals siguin *equiprobables*. Penseu en calcular la probabilitat de treure parell en un dau enbiaxat cap al 2. És molt més senzill si suposam un dau on totes les cares tenen la mateixa probabilitat. Els experiments on els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat es diuen *experiments regulars*.

A.2.1 Regla de Laplace

Per a calcular la probabilitat d'un esdeveniment A en un experiment regular, podem aplicar la regla següent:

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Exemple **4.** En l'experiment de llançar un dau, la probabilitat de l'esdeveniment $A =$ "que surti un nombre primer" és

$$p(A) = p(\{2, 3, 5\}) = 3/6 = 0,5$$

A.2.2 Llei dels grans nombres

Si repetim un experiment aleatori un nombre molt gran de vegades, les *freqüències relatives* de cada esdeveniment *s'aproximen a la seva probabilitat*.

D'aquesta manera, si tirem un dau moltes vegades (cents, milers, milions), cada vegada més les freqüències relatives del seus resultats s'aproximen als valor reals de la probabilitat. Això vol dir, en aquest exemple, que si tirem un dau moltes vegades,

$$\frac{\text{el nombre de vegades que ha sortit l'1}}{\text{nombre total de vegades que hem tirat el dau}}$$

s'aproximarà cada vegada més a $p(\text{"treure un 6"}) = \frac{1}{6}$.

El mateix passa amb els altres resultats: per exemple, el nombre de vegades que surt parell dividir entre el nombre total de vegades que hem tirat el dau s'atraca cada vegada més a 0,5.

Això serveix: (a.) Per a detectar si hi ha jocs trucats (b.) Per a estimar probabilitats que són molt difícils de calcular a la pràctica (per exemple, la probabilitat de què una peça sigui defectuosa, la probabilitat de què una persona tengui un accident de trànsit)

A.2.3 Propietats de la probabilitat

- La probabilitat de l'esdeveniment contrari és $p(A^c) = 1 - p(A)$

- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments és $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. En el cas de que els esdeveniments siguin incompatibles, aquesta probabilitat es transforma en $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

A.3 Probabilitat condicionada

Donats dos esdeveniments A i B, es defineix la *probabilitat de B condicionat a A*, i es denota $p(B \mid A)$, com la probabilitat que ocorri B quan sabem que ha passat A.

Per calcular-la s'empra les fórmules següents:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)},$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = p(B) \cdot p(A \mid B).$$

Dos esdeveniments A i B són *dependents* quan l'ocurrència d'un influeix en l'ocurrència de l'altre. Quan això no passa són *independents*.

- Si $p(B \mid A) = p(B) \Rightarrow A$ i B són independents.
- Si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow A$ i B són independents.

A.4 Recordatori d'àrees i volums

A.4.1 Definicions geomètriques

1. Un *polígon* és una figura plana composta per un nombre finit de segments rectes que s'uneixen format una figura tancada. Els seus punts s'anomenen *vèrtexos* i els segments *costats*.

2. El *perímetre* d'un polígon és la suma de les longituds dels seus costats

3. Un *triangle* és un polígon que té tres costats.

4. Un *rectangle* és un polígon que té quatre costats que formen angles de 90º. Quan en un rectangle, tots els costats són iguals, aquests formen un *quadrat*

5. En general, un polígon de quatre costats s'anomena *quadrilàter*. Casos especials dels quadrilàter són el rectangle, el quadrat, el rombe, el romboide i el trapezi.

6. El *trapezi* és un quadrilàter que té un parell de costats paral·lels.

7. Un quadrilàter amb dos parells de costats paral·lels s'anomena *paral·lelogram*. Casos especials d'un paral·lelogram són el rombe, el romboide, el rectangle i el quadrat.

8. Un *rombe* és un paral·lelogram que té tots els costats iguals

9. Un *romboide* és un paral·lelogram tal que els costats oposats són paral·lels i els costats adjacents no són iguals i els angles no són rectes

10. Un rectangle és un paral·lelogram que té tots els angles rectes. El quadrat és el cas particular amb tots els costats iguals.

11. Quan tots els costats d'un polígon són iguals, aquest s'anomena *polígon regular*.

12. Segons el nombre de costats, el polígon pot ser un *pentàgon* (de cinc costats), un *hexagon* (de sis costats), un *heptàgon* (de set costats), etc.

13. L'*apotema* d'un polígon regular és el segment que va des del centre del polígon a la meitat d'un costat

14. Un *cercle* és la porció de pla dels punts que estan a distància menor o igual que un nombre fixat, que s'anomena *radi*. La *circumferència* és la vora del cercle

15. Un *políedre* és un cos geomètric delimitat per un nombre finit de cares poligonals. Les *arestes* són els costats dels polígons que el limiten. Els *vèrtexs* són els punts comuns a dues o més cares.

16. Un *prisma* és un políedre que té dues cares iguals i paral·leles (les *bases*) i cert nombre de cares laterals que són paral·lelograms (les *cares laterals*). Si les cares laterals no formen un angle de 90º amb les bases es parla de *prismes oblics*. Si les cares laterals són rectangles s'anomena *prisma rectangular*.

17. Una *piràmide* és un políedre que té per base un polígon i les seves cares laterals són triangles que tenen un vèrtex comú, el qual s'anomena *vèrtex* de la piràmide.

18. Un *cilindre* és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

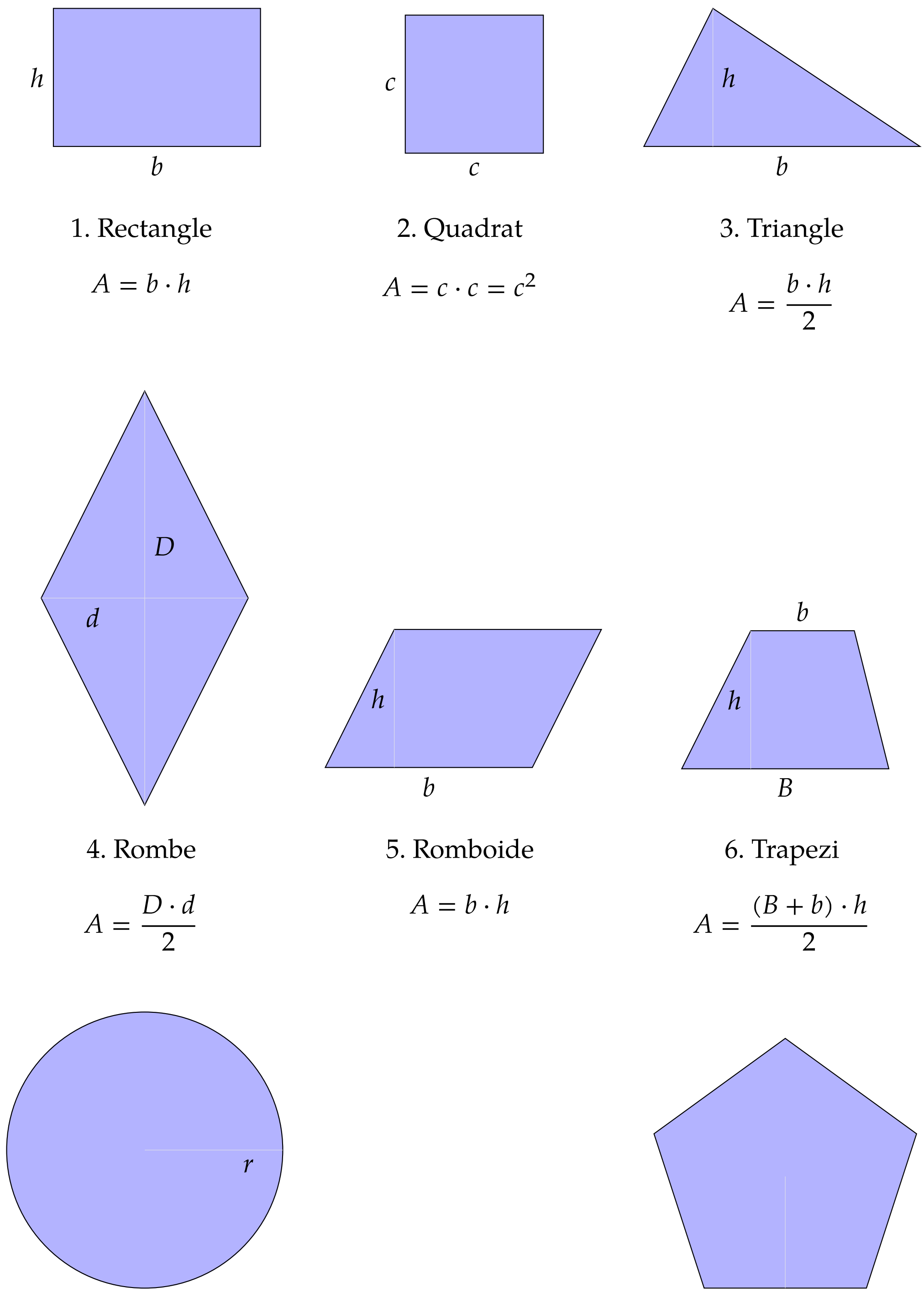
19. Un *con* és un cos de revolució que s'obté en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets. El *costat* que va del vèrtex a la base (un cercle) s'anomena *generatriu*.

20. Una *esfera* és un cos de revolució que s'obté en girar un semicercle al voltant del seu diàmetre. Equivalentment són els punts de l'espai que estan a distància menor o igual que el radi d'aquest semicercle.

A.4.2 Àrees de les figures planes més usuals

A.4.3 Volums i àrees dels cossos geomètrics més usuals

[3] Si desenvolupem el con, A_L és l'àrea d'un sector circular de longitud $2\pi r$ i radi g.



1. Rectangle

$A = b \cdot h$

2. Quadrat

$A = c \cdot c = c^2$

3. Triangle

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

4. Rombe

$A = \frac{D \cdot d}{2}$

5. Romboide

$A = b \cdot h$

6. Trapezi

$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

7. Cercle

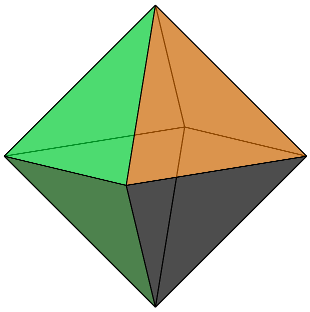
$A = \pi \cdot r^2$

$L = 2 \cdot \pi \cdot r$

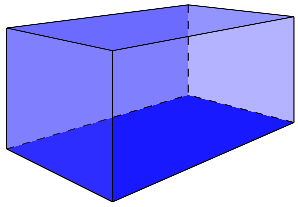
8. Polígon regular

$A = \frac{\mathrm{P} \cdot \mathrm{a}}{2}$

Figura A.1 Àrees de les figures planes més usuals

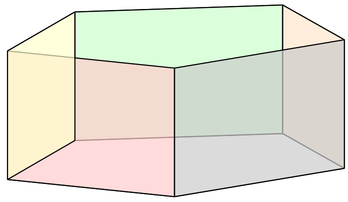


1. Políedre
El volum depèn del
tipus de políedre



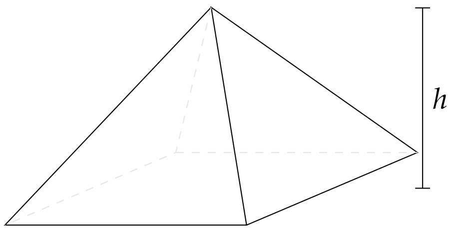
2. Ortoedre

$$A = A_L + 2 \cdot A_B$$
$$V = A_B \cdot h$$



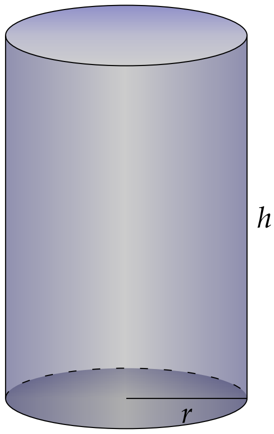
3. Prisma

$$A = A_L + 2 \cdot A_B$$
$$V = A_B \cdot h$$



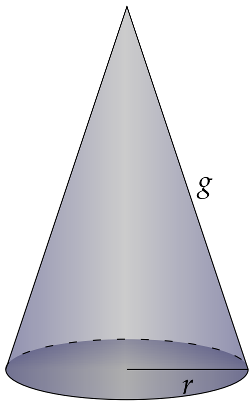
4. Piràmide

$$A = A_B + A_L$$
$$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$



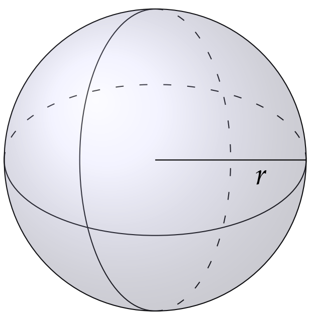
5. Cilindre

$$\begin{aligned} A &= A_L + 2 \cdot A_B \\ &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \\ V &= A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$



6. Con

$$\begin{aligned} A &= A_L + A_B \\ &= \pi \cdot g \cdot r + \pi \cdot r^2 \\ V &= \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \end{aligned}$$



$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \qquad V = \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

7. Esfera

Figura A.2 Volums (i algunes àrees) dels cossos geomètrics més usuals[3]

Apèndix B Solucions

Aquí hi ha algunes solucions, pistes o resolucions dels exercicis d'aquest document.

1 : (a.) $x = 20$ (b.) $x = 4$, (c.) $x = 33$, (d.) $x = 27$, (e.) $x = 12$, (f.) $x = 24$, (g.) $x = -60$, (h.) no té solució, (i.) $x = -6$, (j.) $x = 24/5$, (k.) $x = 30$, (l.) $x = 1$, (m.) $x = 24$, (n.) $x = \frac{1}{2}$, (o.) $x = 3$, (p.) $x = -3$, (q.) $x = 0$, (r.) $x = 5$, (s.) $x = 4$, (t.) $x = 64$, (u.) $x = 15$, (v.) $x = 3$, (w.) $x = -8$, (x.) $x = 60$, (y.) $x = -\frac{9}{2}$

2 (a.) $x = 11$ (b.) $x = 2$ (c.) $x = -1$ (d.) $x = 20$

3 (a.) $x = 4$ (b.) $x = -47$ (c.) $x = 2$ (d.) $x = -89$ (e.) $x = 2$ (f.) $x = 144$

4 (a.) $x = 7/4$ (b.) $x = 6/5$ (c.) $x = -7/3$ (d.) $x = 5$ (e.) $x = 3$ (f.) $x = 7$ (g.) $x = 5/6$ (h.) $x = 2$

5 (a.) $x = -1$ (b.) $x = 3/2$ (c.) $x = 2$ (d.) $x = 44$ (e.) $x = -1$ (f.) $x = -5$ (g.) $x = -2/3$ (h.) $x = 8/13$ (i.) $x = 1/3$ (j.) $x = -1/2$

6 (a.) $x = 1/2$ (b.) $x = 1/4$ (c.) $x = 1$ (d.) $x = -40$ (e.) $x = -1/6$ (f.) $x = -3$

7 (a.) $x = 1$ (b.) $x = 15$ (c.) no té solució (d.) $x = 2/5$ (e.) $x = 1$ (f.) $x = 17$ (g.) $x = 1$ (h.) $x = 1/6$ (i.) $x = 4$ (j.) $x = 21$ (k.) $x = -1$ (l.) $x = -25$

111: (a.) L'esdeveniment impossible $= \emptyset$, (b.) l'esdeveniment segur $= \{1,2,3,4\}$ (c.) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$

112: $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

113: (a.) 12 (b.) 6 (c.) 6

114: (a.) 1 carta (b.) 13 (c.) 1 (d.) 12 (e.) 19 (f.) 3

115: (a.) $\{2,4,6\}$ (b.) $\{1,3,5\}$ (c.) $\{4,6\}$ (d.) $\{2,4,5,6\}$ (e.) $\{2\}$ (f.) $\{1,2,3,5\}$

118: (a.) 1/3, (b.) 1/2, (c.) 1/2, (d.) 2/3, (e.) 2/3, (f.) 1/6, (g.) 0, (h.) 2/3

119: (a.) 1/12, (b.) 1/16, (c.) 1/2, (d.) 7/16, (e.) 0, (f.) 5/16

121: 1/200, (a.) 1/10

122: (a.) 1/10, (b.) 3/5, (c.) 2/5, (d.) 1/5, (e.) 2/5, (f.) 2/5

135: (a.) 1/10, (b.) 3/5, (c.) 2/5, (d.) 9/10

137: 23/42

138: 95/161

139: 1/188

140: 4/35

141: (a.) 1/6, (b.) 7/16

Copyrights externs

Els continguts següents no són d'el·laboració pròpia i com a tals es distribueixen sota la seva llicència respectiva. L'ús dels materials aliens es realitza acollint-se al dret de cita de l'article 32.2 de la Llei de Propietat Intel·lectual (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. Entrada 8930 del BOE 97, de 22 d'abril de 1996) i del *Fair Use* de la Legislació dels Estats Units d'Amèrica (vegi's https://en.wikipedia.org/wiki/Fair_use).

- A l'exercici 94, la imatge del tanc (figura 3.1) s'ha extreta de la plana web del Neil Theasby (http://www.geograph.org.uk/more.php?id=3633065). La imatge es titula "Old fuel tank on abandoned military camp" i es distribueix sota llicència "Creative Commons Reconeixement. CompartirIgual 2.0" (CC-BY-SA 2.0)
- Els exercicis 103 està extret de la pàgina de *Math is Fun* (http://www.mathsisfun.com/algebra/quadratic-equation-real-world.html). © Math is Fun 2014.
- Als exercicis 52, 53, 54 i 55, la idea i els continguts estan extrets de *Llibre de text de 3r d'ESO*. Tema "Funciones y gráficas". Ed. Anaya. Exercicis 1, 2, 4, 5, 12, 15, 14, respectivament. Pàgines 225-228. IES Arroyo. Dpt. Matemàtiques (Averroes).
- L'exercici 132 està adaptat a partir de l'exercici "Favorables i possibles" (quadre 15, pàgina 206) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006
- L'exercici 124 està adaptat a partir de l'exercici "Practica els complementaris" (pàgina 208) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006.
- Els exercicis 118, 119, 121, 122, 135, 137, 138, 139, 140 i 141 estan extrets del llibret *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior* de n'Alícia Espuig Bermell. © Alícia Espuig Bermell 2009, distribuït sota llicència "Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada" (CC-BY-NC-SA 3.0)
- Els exercicis 111, 112, 113, 114 i 115 estan extrets del llibre electrònic "Matemàtiques 4t Opció B" de la col·lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil. Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència "Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya" (CC-BY-NC-SA 3.0 ES)

- L'exercici 145 s'ha extret del llibre electrònic "Matemàtiques 4t Opció A" de la col·lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil. Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència "Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya" (CC-BY-NC-SA 3.0 ES)

- Els exercicis 147, 148, 150, 125, 126, 127, 128, 129, 130 i 131 s'han extret del web tomates.net distribuïts sota llicència "Creative Commons de Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada" (CC-BY-NC-SA 3.0). © 2007-2009 Gerard Romo, Joan Carles Sampera Bonet, Oriol Olivé i Ana Rodríguez.

- Les imatges dels exercicis 133 i 134 s'han pres de la tasca 595 de MathShell *Representing Data Using Grouped Frequency Graphs and Box Plots*. © 2014 MARS, Shell Center, University of Nottingham. Distribuïda sota llicència "Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0 No adaptada" (CC-BY-NC-ND 3.0).

- El codi font de la figura 3.2 és una obra derivada de la figura "Example: Cuboid in a 2 vanishing points perspective" (http://www.texample.net/tikz/examples/cuboid/). © Florian Lesaint. Distribuït sota llicència "Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional" (CC-BY 4.0).

- Els exercicis 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159 i 160 són de "Apunts de Matemàtiques per a l'Accés a la UIB per a majors de 25 anys" de Xavier Bordoy i Xisco Sebastià, els quals es distribueixen sota llicència "Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional" (CC-BY 4.0).