

# Exercicis procedimentals i alguns apunts teòrics de Matemàtiques per a les classes d'ESPA

---

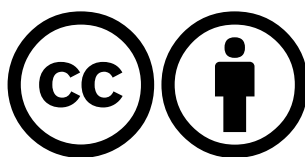
NIVELLS ESPA 1, 2, 3 I 4

XAVIER BORDOY

Xavier Bordoy  
Professor de Matemàtiques  
CEPA Camp Rodó (Palma, Illes Balears)  
Correu electrònic: [somenxavier@posteo.net](mailto:somenxavier@posteo.net)  
Web: [101problemes.net](http://101problemes.net)

Mathematics Subject Classification (2010): 97-01, 97A10

© 2021 Xavier Bordoy. Tots els drets reservats. Llevat que s’hi indiqui el contrari (vegeu la pàgina 274), aquesta obra està subjecta a la llicència “Reconeixement 4.0 Internacional de Creative Commons” (CC-BY 4.0). Per veure una còpia de la llicència, visiteu <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>. Això vol dir, *essencialment*, que podeu copiar, modificar i distribuir qualsevol part de l’obra com vulgueu, sempre que en citeu la font de manera explícita, d’acord amb els termes de la llicència.



La informació obtinguda en aquest document pot no ser suficientment precisa. En aquest sentit, l’autor no assumeix cap responsabilitat ni obligació legal per cap error o ommissió que pugui haver fet.

Aquest document està pensat per fer classes d’Educació Secundària de Persones Adultes (ESPA) de les Illes Balears amb el currículum pertinent amb una metodologia magistral o que impliqui, eventualment, una reiteració d’exercicis rutinaris o l’aplicació de tècniques de resolució de problemes específiques.

Aquest document ha estat generat, dijous 22 abril 2021 a les 09:59, usant programari lliure (`CONTEX` versió 20200310 MKIV, `luatex` versió 1.12 i `PGF/TikZ`) sota un entorn `GNU/Linux`. El document ha estat mecanografiat. Encara que s’hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors — el més probable de tipus tipogràfic o gramatical. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-me per correu electrònic. D’altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per millorar-la, us agrairia que m’ho comunicués i, si el canvi és del meu gust, l’incorporaré a l’obra original en els mateixos termes de la llicència.

# ÍNDIX DE CONTINGUTS

1	Aritmètica	5
1.1	Nombres enters	5
1.1.1	Ordenació, valor absolut, oposat	5
1.1.2	Suma i resta	7
1.1.3	Producte i divisió	17
1.1.4	Operacions combinades	20
1.2	Potències de nombres enters	26
1.2.1	Càlcul de potències	26
1.2.2	Propietats de les potències	28
1.3	Potències d'un nombre sencer	33
1.3.1	Càlcul de potències	33
1.3.2	Signe d'una potència	35
1.3.3	Potències d'exponent negatiu	35
1.4	Propietats de les potències	40
1.5	Potències de base 10. Notació científica	45
2	Proporcionalitat numèrica	49
2.1	Relacions entre magnituds	49
2.2	Proporcionalitat directa	51
2.3	Proporcionalitat inversa	56
2.4	Percentatges	58
2.5	Proporcionalitat composta	64
2.6	Interès simple i interès compost	69
2.7	Repartiments proporcionals	70
2.8	Mesclats	73

3	Proporcionalitat geomètrica	79
	Fitxa 0. Introducció	79
	Què hem après?	86
	Fitxa 1. Ús d'escala gràfica	87
	L'escala numèrica	96
	Fitxa 2. Ús d'escala numèrica	97
3.1	Teorema de Tales	107
	Semblança	108
	Figures semblants	110
	Homotècies	118
3.1.4	Teorema de Tales	120
3.1.5	Hipsòmetre	127
	Informe de mesura amb l'hipsòmetre	129
4	Teorema de Pitàgores i cossos geomètrics	132
4.1	Teorema de Pitàgores	132
4.1.1	Tipus de figures planes	132
4.1.2	Tipus de triangles	133
4.2	Cossos geomètrics	143
5	Àlgebra	151
5.1	Llenguatge algebraic	151
5.1.1	Llenguatge formal i llenguatge literari	151
5.1.2	Identitats i equacions	153
5.2	Equacions	155
5.2.1	Equacions senzilles i amb parèntesi	155
5.2.2	Comprovació	159
5.2.3	Equacions amb denominadors	162
5.2.4	Problemes	167
5.3	Resolució d'equacions de 2n grau	179
5.4	Plantejament d'equacions de 2n grau	182
6	Funcions	187
6.1	Pla cartesià	187
6.1.1	Representació de funcions	188
6.2	Modelització	193
6.2.1	Funcions lineals	193
6.2.2	Funcions afins	194
6.2.3	Comparativa de productes	196
6.3	Representació de funcions	199
6.4	Elements d'un gràfic	199
6.5	Gràfic $\rightarrow$ interpretació	201
6.6	Funció exponencial	204
6.6.1	Càlcul de $f(x_0)$	204
6.6.2	Determinació de $f(x)$ i càlcul de $f(x_0)$	205

6.6.3	Representació gràfica	205
6.7	Funció quadràtica	207
6.7.1	Representació gràfica de funcions quadràtiques	208
6.7.2	Càlcul del vèrtex, orientació i punts de tall amb els eixos	209
6.8	Funcions afins	209
7	Modelització	210
7.1	Models exponencials	210
7.2	Models quadràtics	212
7.2.1	Aplicació de la fórmula de segon grau	212
7.2.2	Problemes d'optimització	214
8	Probabilitat	216
8.1	Àlgebra de successos	216
8.2	Experiments simples	217
8.3	Experiments compostos	220
8.4	Probabilitat condicionada	222
9	Estadística descriptiva	226
9.1	Introducció a l'Estadística	226
9.2	Població i mostra	226
9.2.1	Població i mostra	228
9.2.2	Tipus de variables estadístiques	230
9.2.3	Recòmpte de dades	231
	Taula de freqüències	231
	Cas discret	231
	Cas discret amb <i>moltes</i> dades	232
	Cas continu	234
9.3	Paràmetres estadístics	238
	Tipus de paràmetres estadístics	238
9.3.2	Paràmetres de centralització	242
9.3.3	Paràmetres de dispersió	249
9.3.4	Paràmetres de centralització i dispersió	252
9.4	Gràfics estadístics	256
	Diagrama de barres	256
	Diagrama de sectors	259
	Histograma	262
Apèndix A	Resum de teoria de probabilitat	266
A.1	Experiments aleatoris	266
A.1.1	Espai mostral i successos	266
A.1.2	Operacions amb esdeveniments	266
A.2	Probabilitat d'un esdeveniment	267
A.2.1	Regla de Laplace	267
A.2.2	Llei dels grans nombres	268
A.2.3	Propietats de la probabilitat	268

A.3	Probabilitat condicionada	268
Apèndix B	Àrees i volums	269
B.1	Recordatori d'àrees i volums	269
B.1.1	Definicions geomètriques	269
B.1.2	Àrees de les figures planes més usuals	270
B.1.3	Volums i àrees dels cossos geomètrics més usuals	270
Apèndix C	Solucions	273
	Reconeixement d'obres alienes	274

# 1

## ARITMÈTICA

### 1.1 Nombres enters

#### 1.1.1 Ordenació, valor absolut, oposat

**Exercici 1.** Localitzeu sobre la recta numèrica (figura 1.1) els nombres següents: 2, -5, 4, -3, 8.

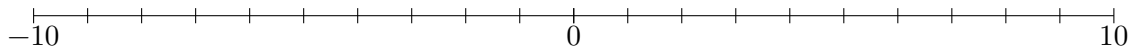


Figura 1.1 Recta numèrica

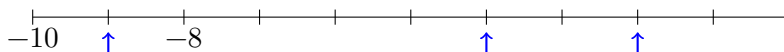
**Exercici 2.** Escriu els nombres compresos entre -71 i -67

**Exercici 3.** Assenyalau quin nombre correspon a cadascun dels punts marcats a la recta:

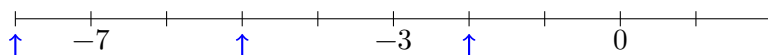
a)



b)



c)



d)



**Exercici 4.** En Caius va nèixer l'any -203 aC. Quin any va morir si va viure 74 anys? Nota: noteu que si hagués nascut el -10, no podríem haver sumat perquè no hi ha any 0.

**Exercici 5.** Un submarí de l'exercit rus està a 800 metres per davall de la mar. I un avió comercial està a 2100 metres. Quina distància els separa?

**Exercici 6.** Ordeneu de menor a major i representeu a la recta numèrica els nombres següents:

$$1, -4, 7, -3, 8, -5, +10, -1, 12, -7$$

**Exercici 7.** Trobeu l'oposat i el valor absolut dels nombres següents:

- |              |             |
|--------------|-------------|
| a) $Op(-10)$ | e) $Op(+5)$ |
| b) $ -10 $   | f) $ +5 $   |
| c) $Op(8)$   | g) $Op(0)$  |
| d) $ 8 $     | h) $ 0 $    |

**Exercici 8.** En una habitació, el termòmetre assenyala 22 graus centígrads, mentre que a fora estan a una temperatura de -5 graus. Quina és la diferència de temperatures?

**Exercici 9.** El matemàtic Euclides va morir l'any 265 aC. Si va viure 60 anys, a quin any va nèixer?

**Exercici 10.** Ordeneu de menor a major i representa a la recta numèrica els nombres següents:

$$10, -3, 7, -4, 8, -5, 0, -10, -1, -2, -7$$

**Exercici 11.** Trobeu l'oposat i el valor absolut dels nombres següents:

- |              |              |
|--------------|--------------|
| a) $Op(-12)$ | e) $Op(+50)$ |
| b) $ -12 $   | f) $ +44 $   |
| c) $Op(80)$  | g) $Op(-1)$  |
| d) $ 44 $    | h) $ 0 $     |



## 1.1.2 Suma i resta

### 1.1.2.1 Sense parèntesis

**Exercici 12.** Calculeu

- |             |             |             |              |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| a) $9 - 4$  | d) $8 - 9$  | g) $5 - 11$ | j) $10 - 12$ |
| b) $4 - 9$  | e) $11 - 7$ | h) $3 - 7$  | k) $10 - 15$ |
| c) $10 - 8$ | f) $7 - 11$ | i) $1 - 6$  | l) $14 - 21$ |

**Exercici 13.** Trobeu el valor de les expressions següents:

- |             |             |              |               |
|-------------|-------------|--------------|---------------|
| a) $-2 + 6$ | c) $-1 + 9$ | e) $-8 + 2$  | g) $-12 + 5$  |
| b) $-4 + 7$ | d) $-7 + 2$ | f) $-10 + 8$ | h) $-15 + 25$ |

**Exercici 14.** Opereu:

- |             |             |                 |                    |
|-------------|-------------|-----------------|--------------------|
| a) $-1 - 1$ | d) $-2 - 5$ | g) $-6 - 6$     | j) $5 - 2 + 3$     |
| b) $-1 - 2$ | e) $-4 - 3$ | h) $-10 - 2$    | k) $-10 + 2 - 20$  |
| c) $-2 - 3$ | f) $-7 - 1$ | i) $10 - 4 + 2$ | l) $10 - 200 - 12$ |

**Exercici 15.** Calculeu:

- |                     |                               |
|---------------------|-------------------------------|
| a) $+2 - 7 + 5$     | d) $6 - 8 - 6 + 5 + 4 - 6$    |
| b) $+12 - 5 - 8$    | e) $-3 - 5 + 2 - 1 - 7 + 4$   |
| c) $13 - 9 + 5 - 7$ | f) $-8 - 7 + 2 + 9 - 10 + 18$ |

**Exercici 16.** Calculeu:

- a)  $-4 + 3 - 7 - 11 + 23$
- b)  $-456 + 23 - 10 + 12 - 788$
- c)  $-70 - 80 + 12 - 14$
- d)  $-67 + 29 - 23 - 23 + 34 - 44$
- e)  $90 - 900 + 89 - 76 - 97 - 76 + 243 - 78$
- f)  $898 - 87 + 234 - 1011 - 1223$
- g)  $898 - 86 - 233 + 2323 - 9800$

**Exercici 17.** Calculeu:

- |                                         |                                          |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| a) $-3 - 2 - 1 + 5 + 7 + 4$             | h) $-3 + 5 + 4 - 8 + 3 + 8 - 2 - 7 - 9$  |
| b) $+3 + 5 + 2 + 1 - 8 - 4 - 9 - 5$     | i) $+4 - 7 + 4 - 5 + 7 - 2 + 4 - 5 + 5$  |
| c) $+4 + 7 + 2 + 9 - 3 + 4 - 3 - 2$     | j) $+2 - 4 + 5 - 6 + 7 - 3 + 5 - 6 + 7$  |
| d) $-5 + 6 - 3 + 6 + 3 - 5 - 2 + 1$     | k) $-3 - 4 - 6 - 7 + 34 - 5 + 6 - 7 + 5$ |
| e) $8 - 3 - 9 + 4 + 2 + 9 - 4 - 6 + 8$  | l) $+3 - 5 + 6 - 7 + 3 - 7 + 4 - 5 - 9$  |
| f) $-5 - 3 - 4 + 7 + 2 + 3 - 6 - 4 + 6$ | m) $+3 - 5 + 4 - 6 + 7 - 8 + 4 + 5 + 6$  |
| g) $-2 - 4 + 8 + 4 - 6 + 7 - 2 + 9 - 5$ | n) $-4 + 5 - 6 + 7 - 3 + 6 - 9 + 4 - 5$  |

- o)  $-2 - 8 - 5 - 9 + 4 + 6 + 3 + 7 - 2$       q)  $-3 - 7 + 2 + 9 - 5 + 7 - 4 - 5 + 9 + 6$   
 p)  $+1 - 8 + 6 - 4 + 9 - 5 - 6 - 4 + 7 + 1$

**Exercici 18.** Opereu:

- a)  $-6 - 20 - 80 - 1$       c)  $-12 - 10 + 25 - 5 - 2$   
 b)  $-10 + 80 - 7 + 8$       d)  $-5 - 8 + 90 + 41$

**Exercici 19.** Calculeu:

- a)  $-40 + 6 - 9 - 28 + 34$   
 b)  $-648 + 402 - 49 + 10 - 78$   
 c)  $-7 - 78 + 28 - 45$   
 d)  $-670 + 30 - 78 - 767 + 87 - 33$   
 e)  $9 - 89 + 9 - 70 - 90 + 80 + 34 - 43$   
 f)  $88 - 77 + 23 + 890 - 23$   
 g)  $89 - 890 + 456 + 2560 - 1000$

**Exercici 20.** Calculeu:

- a)  $+0 + 6 - 5 - 1 + 3$       e)  $90 - 89 + 88 - 6 - 7 + 8 + 7 - 4$   
 b)  $+6 + 42 - 9 - 10 + 7$       f)  $-8 - 7 - 3 + 890 - 56$   
 c)  $-70 - 780 + 20 - 45 - 78$       g)  $9 - 800 + 450 - 256 + 1000$   
 d)  $-80 - 80 + 8 - 77 + 11 - 33$

**Exercici 21.** Calculeu:

- a)  $12 - 8 + 4 - 9 - 3 + 10$       c)  $-1 - 3 + 5 - 8 - 4 - 3 + 2$   
 b)  $5 - 9 + 7 - 4 - 6 + 8$       d)  $-6 - 9 + 4 + 12 - 15 + 21$

**Exercici 22.** Calculeu:

- a)  $17 + 20 + 92 - 93 + 47 + 54$       g)  $-26 + 96 - 1 + 5 - 16 - 3$   
 b)  $95 + 50 - 37 + 94 - 3 + 29$       h)  $72 + 35 + 69 + 13 + 72 - 9$   
 c)  $-48 + 61 + 55 + 42 + 5 - 84$       i)  $98 + 45 - 82 - 51 - 63 - 95$   
 d)  $75 - 12 + 89 - 9 + 66 - 70$       j)  $28 - 74 + 92 - 86 + 8 + 16$   
 e)  $34 - 43 + 5 - 27 + 18 + 10$       k)  $-24 - 15 + 22 - 77 - 71 - 60$   
 f)  $73 - 24 - 38 - 96 - 80 - 35$       l)  $-35 + 32 - 96 + 14 - 91 - 59$

**Exercici 23.** Opereu:

- a)  $-5 + 2 - 8 - 12 + 20$       c)  $-120 - 11 + 20 - 5 + 2$   
 b)  $-7 + 8 - 78 + 80 - 90$       d)  $-5 - 8 - 89 + 40$

**Exercici 24.** Opereu:

- a)  $-4 + 5 - 3 + 8 - 10$       c)  $8 - 3 - 13 + 20$   
 b)  $-6 - 3 - 2 + 3 + 5$       d)  $2 + 5 - 2 - 7$

**Exercici 25.** Opereu:

a)  $-5 + 2 - 8 - 12 + 20$   
b)  $-7 + 8 - 78 + 80 - 90$

c)  $-12011 + 20 - 5 + 2$   
d)  $-5 - 8 - 89 + 40$

### 1.1.2.2 Amb parèntesis

**Exercici 26.** Opereu:

a)  $(4) + (8)$   
b)  $(7) + (13)$   
c)  $(-7) + (-8)$

d)  $(-2) + (-5)$   
e)  $(-5) + (8)$   
f)  $(-2) + (10)$

g)  $(-5) + (3)$   
h)  $(-10) + (4)$

**Exercici 27.** Opereu:

a)  $(2) - (4)$   
b)  $(-4) - (-4)$

c)  $(-8) - (-4)$   
d)  $(2) - (-4)$

**Exercici 28.** Calculeu:

a)  $(6) + (3) + (-4)$   
b)  $(8) + (-8) + (-7)$

c)  $(7) + (-6) + (-9)$   
d)  $(2) + (-9) + (3)$

e)  $(5) + (-3) + (-7)$   
f)  $(-5) + (3) + (-7)$

**Exercici 29.** Efectueu les operacions següents:

a)  $(7) + (8) - (-7)$   
b)  $(2) + (3) - (4)$   
c)  $(8) + (-2) - (8)$

d)  $(8) + (-2) - (-8)$   
e)  $(-7) + (-2) - (6)$   
f)  $(-7) + (2) - (-6)$

g)  $(-14) + (4) + (8)$   
h)  $(8) - (4) + (6)$   
i)  $(8) - (4) - (8)$

**Exercici 30.** Calculeu:

a)  $(+2) + (+6)$   
b)  $(-3) + (-1)$   
c)  $(+12) + (+2)$   
d)  $(+6) + (+7)$   
e)  $(+5) + (+1)$   
f)  $(-23) + (-10)$   
g)  $(-1) + (-22)$   
h)  $(-9) + (-4)$   
i)  $(+6) + (+8)$

j)  $(-12) + (-11)$   
k)  $(+7) + (+5)$   
l)  $(-8) + (-8)$   
m)  $(+4) + (-3)$   
n)  $(-6) + (+5)$   
o)  $(+5) + (-15)$   
p)  $(-3) + (+10)$   
q)  $(+1) + (-1)$   
r)  $(-7) + (+3)$

s)  $(-12) + (+4)$   
t)  $(+9) + (-11)$   
u)  $(-12) + (+12)$   
v)  $(+8) + (-9)$   
w)  $(+4) + (+6)$   
x)  $(-2) + (-13)$   
y)  $(-8) + (+1)$   
z)  $(+4) + (-2)$

**Exercici 31.** Calculeu:

a)  $(+4) + (+5)$   
b)  $(-2) + (-2)$   
c)  $(+6) + (-9)$   
d)  $(-8) + (+4)$

e)  $(+5) + (-5)$   
f)  $(+7) + (-3)$   
g)  $(-6) + (-12)$   
h)  $(-10) + (-2)$

i)  $(-4) + (+14)$   
j)  $(+17) + (+3)$   
k)  $(-3) + (+3)$   
l)  $(+44) + (-33)$

- |                    |                   |                    |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| m) $(-7) + (-5)$   | r) $(-4) + (-4)$  | w) $(-50) + (+60)$ |
| n) $(+1) + (-7)$   | s) $(+5) + (-16)$ | x) $(-32) + (-33)$ |
| o) $(-9) + (+10)$  | t) $(-4) + (-1)$  | y) $(+18) + (-21)$ |
| p) $(-13) + (+11)$ | u) $(+5) + (-9)$  | z) $(-14) + (+14)$ |
| q) $(+23) + (+7)$  | v) $(+3) + (+15)$ |                    |

**Exercici 32.** Calculeu:

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $(+2) + (+8) + (+3)$  | n) $(-6) + (+3) + (-1)$  |
| b) $(-4) + (-2) + (+9)$  | o) $(-13) + (-7) + (-5)$ |
| c) $(-10) + (+4) + (-3)$ | p) $(-4) + (+2) + (+2)$  |
| d) $(+6) + (-7) + (-1)$  | q) $(-2) + (-2) + (+6)$  |
| e) $(-12) + 0 + (-5)$    | r) $(-14) + 0 + (+29)$   |
| f) $(+7) + (-8) + (+1)$  | s) $(-3) + (-3) + (-3)$  |
| g) $(-9) + (-2) + (-2)$  | t) $(+5) + (+9) + (-2)$  |
| h) $(-4) + (+7) + (-8)$  | u) $(-3) + (-6) + (+5)$  |
| i) $(-5) + (+5) + (+5)$  | v) $(+2) + (-12) + (+7)$ |
| j) $(+1) + (-20) + (-6)$ | w) $(-16) + (-5) + (+3)$ |
| k) $(+31) + (-7) + (-4)$ | x) $(+4) + (-15) + (-2)$ |
| l) $(-2) + (+1) + (-23)$ | y) $(-6) + (-6) + (+8)$  |
| m) $(+5) + (-15) + (-4)$ | z) $(+3) + 0 + (-5) + 0$ |

### 1.1.2.3 Amb i sense parèntesis

**Exercici 33.** Opereu:

- |                |                       |                       |
|----------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $7 - 8 + 3$ | d) $2 - 9 + 3$        | g) $50 - (2 + 3 - 4)$ |
| b) $6 - 8 + 5$ | e) $5 - 3 + 7$        | h) $10 + (4 + 9 - 8)$ |
| c) $7 - 1 + 8$ | f) $10 - 5 + 96 - 24$ | i) $5 + (-6 + 2 - 1)$ |

**Exercici 34.** Lleveu els parèntesis i després opereu:

- a)  $-(+12) - 2 - (-20) - 19 + (-2)$   
 b)  $90 + (+90) - (-18) - 7 - (+8)$   
 c)  $-(-12) - 10 + (-28) - (-15)$   
 d)  $-135 - (-82) - (-70) + (-40) - (-2) + 0$

**Exercici 35.** Lleveu els parèntesis i després opereu:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) $-(-10) + 2 - (+25) - 11 + (-20)$ | c) $-(-121) - 11 + (-278) - (-15)$ |
| b) $7 + (+90) - (-8) - 78 - (+81)$   | d) $135 - (-8) - (-78) + (-40)$    |

**Exercici 36.** Lleveu els parèntesis i després opereu:

- a)  $-(-5) + (-3) + (+2)$
- b)  $(+5) - (+9) - (-1) + (-10)$
- c)  $+(+5) - (-3) - (-84) + (-24)$
- d)  $-4 + 5 - 3 + 8 - 10$
- e)  $-6 - 3 - 2 + 3 + 5$
- f)  $8 - 3 - 13 + 20$

**Exercici 37.** Primer treieu els parèntesis, i després, calculeu:

- |                                           |                                        |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|
| a) $(+3) - (+9) + (+10) - 3$              | h) $6 + (-14) + (+3) - (-5) - 1$       |
| b) $4 - (-14) - (-2) - (+15)$             | i) $-3 + 7 - 10 - 5 - 0 + (+1) - (+3)$ |
| c) $-3 + (-1) - (+14) - 3$                | j) $-12 + (+11) - (-12) - (-16)$       |
| d) $-(-5) - (+6) - 0 + 7 - (-1)$          | k) $+4 - 8 + 3 - 12 + (-1) + (-1)$     |
| e) $10 - 15 - (-19) + 10 - (-15) + (-13)$ | l) $-2 + 0 - 2 + (+6) - (-7) - 0 - 3$  |
| f) $-4 + (+7) - 3 - 7 + (-8) - (-8)$      | m) $-5 - (+5) + (-5) + 5 + (-5)$       |
| g) $9 - 11 + (-9) - (-2) - (-2)$          | n) $-(-6) - (+13) - (-12) + 4 - 7$     |

**Exercici 38.** Primer treieu els parèntesis, i després, calculeu:

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $+(+3) - 6 - (+9) - 0 + (+2)$      | j) $- (+8) - 5 + (+1) - (-9) - (-4)$  |
| b) $24 - (-14) - (-5) - (+5)$         | k) $+3 - 7 + 3 - 2 + (-10) + (-11)$   |
| c) $-7 - 13 + (-11) - (+4) - 1$       | l) $-(-5) - 2 + 0 - 2 - (-2) - 0 - 1$ |
| d) $6 - (-3) - (+6) - 0 + 4 - (-10)$  | m) $-15 - (+15) + (-5) + 5 + (-15)$   |
| e) $-3 - 1 - 5 - (-9) + 7 - 0 - (-6)$ | n) $-(-5) - (+3) - (-2) + 10 - 17$    |
| f) $(-4) - (+3) - 13 - (+20) - (-8)$  | o) $-(-12) + (+13) - 14 - (-15)$      |
| g) $4 - 8 + (-8) - (-4) - (-4)$       | p) $3 - 7 + 12 - 16 + (+10)$          |
| h) $16 + (-13) + (+13) - (-15)$       | q) $-(-4) - 7 - (+12) - 1 - 1$        |
| i) $-(-5) - 3 + 9 - (+5) - (+7)$      |                                       |

**Exercici 39.** Opereu prèviament llevant parèntesis:

- a)  $-(-10) + 2 - (+25) - 11 + (-20)$
- b)  $7 + (+90) - (-8) - 78 - (+81)$
- c)  $-(-121) - 11 + (-278) - (-15)$
- d)  $135 - (-8) - (-78) + (-40)$

**Exercici 40.** Feis aquestes restes de nombres enters:

- |                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| a) $(-6) - (+9)$   | e) $40 - (-65)$ |
| b) $6 - (+9)$      | f) $40 - (+65)$ |
| c) $(-15) - (+25)$ | g) $60 - (-50)$ |
| d) $(-15) - (-25)$ |                 |

**Exercici 41.** Sumeu aquests nombres enters:

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| a) $(-5) + (-3) + (-2)$  | c) $10 + (-4) + (-5) + 7$     |
| b) $(-2) + 3 + 5 + (-6)$ | d) $(-7) + (-15) + 10 + (-2)$ |

- e)  $(-10) + (-6) + 15 + 10$       h)  $12 + 18 + (-13) + (-7)$   
f)  $6 + (-12) - 18 + (-4)$       i)  $(-9) + 14 + (-5) + 16$   
g)  $(-20) + (-10) + 15 + (-5)$

**Exercici 42.** Calculeu:

- a)  $(-5) + (-3) - (+4)$   
b)  $-(+2) - (+3) + (-10) + (+22)$   
c)  $(-10) - (-42) - (+23) + (+12) - 54$   
d)  $10 - 54 - (+34) + (-5) - (-2)$

**Exercici 43.** Efectueu les operacions següents:

- a)  $(-10) - (+9)$       b)  $+3 - (+9)$       c)  $(-10) - (+20)$

**Exercici 44.** Calculeu:

- a)  $-50 + 2 - 8 - 12 + 20$       c)  $-12 - 11 + 2 - 5 + 2$   
b)  $-7 + 18 - 70 + 80 - 90$       d)  $+9 - 80 - 89 + 40$

**Exercici 45.** Lleveu els parèntesis i després opereu:

- a)  $-(-10) + 2 - (+25) - 11 + (-20)$       b)  $7 + (+90) - (-8) - 78 - (+81)$

**Exercici 46.** Opereu:

- a)  $+(+4) - (-7) + 5 - 8$       j)  $-(-2) - (+4) - (+4) - 2 + 9 - 5$   
b)  $-2 + (+6) - (-4) + 7$       k)  $-(+5) - (-8) + 3 - (-7) + (-9)$   
c)  $-(-4) - 8 - (-6) - 9 + (+4) + 5 - 2$       l)  $-(-7) + (-4) - 5 - 2 + 4 - 5 + 5$   
d)  $-3 - (2) - 1 + (+5) + 7 + 4$       m)  $+(-2) - (+4) + 53 + 5 - 6 + 7$   
e)  $+3 + (-5) + (-2) - 8 - 4 - 9 - 5$       n)  $-(+3) - (-6) - (+7) - 7 + 5$   
f)  $+(+7) - (+2) + 9 - 3 + 4 - 3 - 2$       o)  $+(-3) - (+5) + (-6) - (-7)$   
g)  $-5 - (+6) + (-3) - 5 - 2 + 1$       p)  $+(-5) + (-4) - (-6) + (-7) - (+8)$   
h)  $-(-3) + (-4) + (+9) - 6 + 8$       q)  $-(+4) + (-5) - (+6) + (-7)$   
i)  $-5 - (-4) + 7 + (+2) - 4 + 6$

**Exercici 47.** Calculeu:

- a)  $(+2) + (+8) + (+3)$       k)  $(+31) + (-7) + (-4)$   
b)  $(-4) + (-2) + (+9)$       l)  $(-2) + (+1) + (-23)$   
c)  $(-10) + (+4) + (-3)$       m)  $(+5) + (-15) + (-4)$   
d)  $(+6) + (-7) + (-1)$       n)  $(-6) + (+3) + (-1)$   
e)  $(-12) + 0 + (-5)$       o)  $(-13) + (-7) + (-5)$   
f)  $(+7) + (-8) + (+1)$       p)  $(-4) + (+2) + (+2)$   
g)  $(-9) + (-2) + (-2)$       q)  $(-2) + (-2) + (+6)$   
h)  $(-4) + (+7) + (-8)$       r)  $(-14) + 0 + (+29)$   
i)  $(-5) + (+5) + (+5)$       s)  $(-3) + (-3) + (-3)$   
j)  $(+1) + (-20) + (-6)$       t)  $(+5) + (+9) + (-2)$

- u)  $(-3) + (-6) + (+5)$   
 v)  $(+2) + (-12) + (+7)$   
 w)  $(-16) + (-5) + (+3)$

- x)  $(+4) + (-15) + (-2)$   
 y)  $(-6) + (-6) + (+8)$   
 z)  $(+3) + 0 + (-5) + 0$

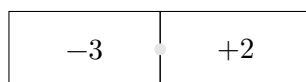
**Exercici 48.** Opereu:

- a)  $-5 + 2 - 8 - 12 + 20$   
 b)  $-7 + 8 - 78 + 80 - 90$

- c)  $-120 - 11 + 20 - 5 + 2$   
 d)  $-5 - 8 - 89 + 40$

#### 1.1.2.4 Problemes

**Exercici 49.** Considereu el conjunt de fitxes de dòmino format per fitxes que tenen com a extrems nombres sencers de  $-6$  a  $+6$  (teniu un exemple de fitxa a la figura 1.2).



**Figura 1.2** Exemple de fitxa de dòmino

D'aquest conjunt, agafeu com a màxim set fitxes de manera que:

- Estiguin en contacte nombres oposats
- La suma dels extrems sigui 1
- Els extrems estiguin a distància 2
- En tots els casos anteriors, quina seria la suma de tots els nombres de les fitxes?
- Podeu trobar una seqüència de tres fitxes que els seus nombres sumin  $-6$ ?

**Exercici 50.** Aquestes són els moviments de diners d'una persona durant una setmana

- Fer la compra al supermercat per 60€
- Cobrar la nòmina de 1.200€
- Fer-li un regal a sa tia per valor de 50€
- Comprar uns calçons per 20€
- Apuntar-se al CEPA Sud (15 €) fent una transferència (comissió de 1,5€)
- Retornar els calçons i comprar-se'uns altres per 30 €
- Fer una *feineta* de pintor i cobrar 200€

- Ordeneu els moviments segons siguin despeses o guanys
- Representeu cada moviment amb un nombre sencer
- Quantes despeses ha tengut aquesta persona?
- Quants de guanys?
- Quin és el balanç a final de setmana?

1. Exercici 26: (a.) 12 (b.) 20 (c.) -15 (d.) -7 (e.) 3 (f.) 8 (g.) -2 (h.) -6
  2. Exercici 27: (a.) -2 (b.) 0 (c.) -4 (d.) 6
  3. Exercici 28: (a.) 5 (b.) -7 (c.) -8 (d.) -4 (e.) -5 (f.) -9
  4. Exercici 29: (a.) 22 (b.) 1 (c.) -2 (d.) 14 (e.) -15 (f.) 1 (g.) 18 (h.) 10 (i.) -4
  5. Exercici 33: (a.) 2 (b.) 3 (c.) 14 (d.) -4 (e.) 9 (f.) 77 (g.) 49 (h.) 15 (i.) 0
  6. Exercici 34: (a.) -15 (b.) 183 (c.) -11 (d.) -21
  7. Exercici 35: (a.) -44 (b.) -54 (c.) -118 (d.) 181
  8. Exercici 36: (a.) 4 (b.) -13 (c.) 68 (d.) -4 (e.) -2 (f.) +12
  9. Exercici 37: (a.) 1 (b.) 5 (c.) -21 (d.) 7 (e.) -16 (f.) -7 (g.) -7 (h.) -1 (i.) -13 (j.) 27 (k.) -15 (l.) +6 (m.) -15 (n.) 2
  10. Exercici 41: (a.) -10 (b.) 0 (c.) +8 (d.) -14 (e.) +9 (f.) -28 (g.) -20 (h.) 10 (i.) 16
-

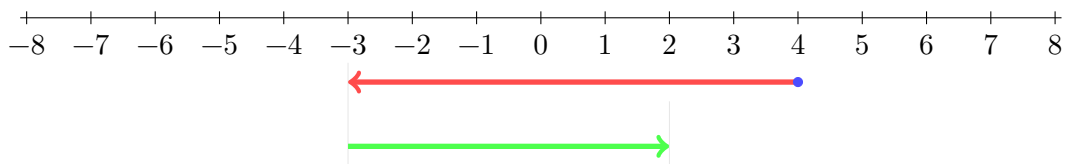


### 1.1.2.5 Suma i resta gràficament

**Exemple 1.** Volem fer la suma  $4 - 7 + 5$  gràficament. Apliquem aquestes regles:

- Partim del primer nombre
- Si sumem, anem cap a la dreta
- Si restem, anem cap a l'esquerra
- La longitud cap a la dreta o cap a l'esquerra és el valor absolut del nombre que sumem o restem

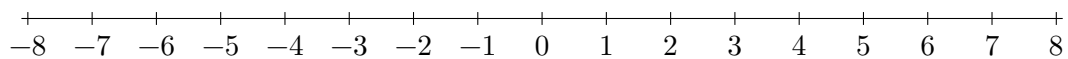
D'aquesta manera:



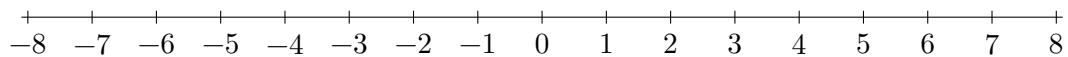
- Partim del nombre 4
- Anem cap a l'esquerra (signe  $-$ ) 7 unitats
- Anem cap a la dreta (signa  $+$ ) 5 unitats
- El resultat és 2

**Exercici 51.** Realitza les següents operacions com a l'exemple anterior:

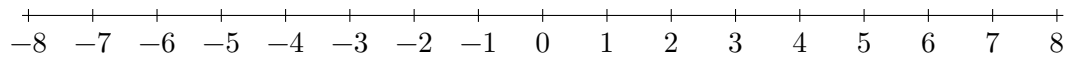
a)  $3 - 4 + 9 =$



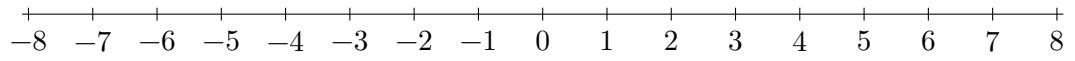
b)  $6 - 8 + 5 =$



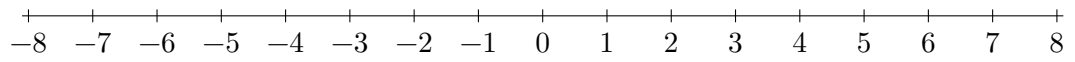
c)  $3 - 5 + 7 =$



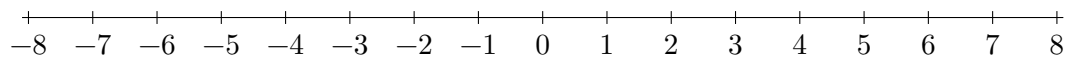
d)  $-7 + 9 - 2 =$



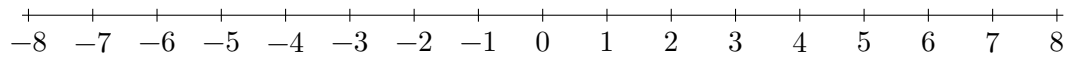
e)  $-4 - 3 + 5 =$



f)  $+5 - 8 - 4 =$



g)  $-6 + 9 + 2 =$



### 1.1.3 Producte i divisió

**Exercici 52.** Calculeu:

- |                        |                        |                    |
|------------------------|------------------------|--------------------|
| a) $(+2) \cdot (+6)$   | j) $(-11) \cdot (-11)$ | s) $(-12) : (+4)$  |
| b) $(-3) \cdot (-10)$  | k) $(+7) \cdot (+5)$   | t) $(+99) : (-11)$ |
| c) $(+12) \cdot (+12)$ | l) $(-8) \cdot (-8)$   | u) $(-120) : (+4)$ |
| d) $(+6) \cdot (+7)$   | m) $(+4) \cdot (-3)$   | v) $(+80) : (-20)$ |
| e) $(+5) \cdot (-4)$   | n) $(-6) : (+3)$       | w) $(+36) : (+6)$  |
| f) $(-23) \cdot (-10)$ | o) $(+15) : (-5)$      | x) $(-26) : (-13)$ |
| g) $(-30) \cdot (-20)$ | p) $(-3) : (+1)$       | y) $(-18) : (+6)$  |
| h) $(-9) \cdot (-4)$   | q) $(+200) : (-10)$    | z) $(+4) : (-2)$   |
| i) $(+6) \cdot (+8)$   | r) $(-7) : (+7)$       |                    |

**Exercici 53.** Calculeu:

- |                        |                       |                         |
|------------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $(+14) \cdot (+2)$  | j) $(+7) \cdot (+7)$  | s) $(+5) \cdot (-25)$   |
| b) $(-20) \cdot (-20)$ | k) $(-3) : (+3)$      | t) $(-36) : (-12)$      |
| c) $(+6) \cdot (-9)$   | l) $(+111) : (-3)$    | u) $(+810) : (-9)$      |
| d) $(-8) : (+4)$       | m) $(-35) : (-5)$     | v) $(+45) : (+15)$      |
| e) $(+5) : (-5)$       | n) $(+10) \cdot (-7)$ | w) $(-24) \cdot (+2)$   |
| f) $(+900) : (-30)$    | o) $(-880) : (+11)$   | x) $(-11) \cdot (-5)$   |
| g) $(-4) \cdot (-12)$  | p) $(-130) : (-13)$   | y) $(+18) : (-6)$       |
| h) $(-10) : (-2)$      | q) $(+7) \cdot (+8)$  | z) $(-300) \cdot (+20)$ |
| i) $(-4) : (+8)$       | r) $(-6) \cdot (-4)$  |                         |

**Exercici 54.** Calculeu:

- |                                         |                                            |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------|
| a) $(-30) \cdot (-2) : (-5)$            | e) $-900 \cdot (-7) : (+5) : (-2) : (-10)$ |
| b) $(-50) : (-5) : (-2) \cdot (+10)$    | f) $-50 \cdot (-10) \cdot (-5) : (+2)$     |
| c) $10 \cdot (-2) : (+5) \cdot (-20)$   | g) $4 \cdot 20 \cdot (-15) : (-2)$         |
| d) $+400 \cdot (-20) \cdot (-5) : (-4)$ | h) $-7 \cdot (-8) \cdot (+10) : (-4)$      |

**Exercici 55.** Completeu aquests quadres:

:	+3	-2	-6	-30
+60				
-600				
+90				

·	+3	-20	5	-81
+8				
-3				
+4				

**Exercici 56.** Opereu:

- a)  $(-4) \cdot (+5)$
- b)  $(-4) \cdot (-9)$
- c)  $(+3) \cdot (-2) \cdot (-4)$

- d)  $(-9) \cdot (-3) \cdot (-1)$
- e)  $3 \cdot (-4) \cdot (+1)$

**Exercici 57.** Calculeu:

- a)  $(+3) \cdot (+6) : (-2)$
- b)  $(-30) : (-5) \cdot (+200)$
- c)  $(+12) : (+2) : (-3)$
- d)  $(+60) : (+3) \cdot (-4)$
- e)  $(+1) \cdot (-1) : (-1) \cdot (-1)$
- f)  $-(-7) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-2)$
- g)  $(-100) : (-2) : (-5)$

- h)  $-(-18) : (-9) \cdot (+3)$
- i)  $+(+6) : (+2) \cdot (+6) \cdot (-10)$
- j)  $(-121) : (-11) \cdot (-3)$
- k)  $(+7) \cdot (+17) \cdot 0 \cdot (+5)$
- l)  $-(-8) \cdot (-8) : (+4) : (+2)$
- m)  $(+14) : 7 \cdot (-3)$
- n)  $(-6) \cdot (+5) : (-3) : (-1)$

**Exercici 58.** Calculeu:

- a)  $(+40) : (+2) : (-2) : (-5)$
- b)  $-(-5) \cdot (-5) \cdot (+20)$
- c)  $4 \cdot (+2) \cdot (-9) : (+3) \cdot (-7)$
- d)  $(+15) : (+3) \cdot (-40) : (-2)$
- e)  $(+22) : (-11) : (-1) \cdot (-11)$
- f)  $-(+14) : (-7) \cdot (-5) : (-2) \cdot (-3)$
- g)  $-(-200) : (-40) : (-5) \cdot (+6)$
- h)  $-(+16) : (-4) \cdot (+6) : (-3)$

- i)  $-(+9) : (+3) \cdot (+7) \cdot (-2)$
- j)  $(-144) : (-6) : (+6) \cdot (-3)$
- k)  $(+23) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot (+25)$
- l)  $-(-81) : (-9) \cdot 0 \cdot (+4)$
- m)  $(+13) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-10)$
- n)  $(-36) : (-9) \cdot (+5) : (-2)$
- o)  $-(-25) : (+5) \cdot (-3) \cdot 10$

**Exercici 59.** Feis aquestes multiplicacions:

- a)  $3 \cdot (-5)$
- b)  $-6 \cdot 8$
- c)  $-4 \cdot (-2)$
- d)  $-15 \cdot 6$

- e)  $3 \cdot (-3) \cdot (-6)$
- f)  $-3 \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 5$
- g)  $5 \cdot 3 \cdot (-6) \cdot (-4)$
- h)  $3 \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-7)$

**Exercici 60.** Completeu:

- a)  $(+125) : \square = -25$
- b)  $(-144) : \square = 12$

- c)  $(+169) : \square = -13$
- d)  $(-203) : \square = 7$

---

Solucions de “Producte i divisió”

---

1. Exercici 54: (a.)  $-12$  (b.)  $-50$  (c.)  $80$  (d.)  $-10.000$  (e.)  $63$  (f.)  $-1.250$  (g.)  $+600$  (h.)  $-140$
  2. Exercici 58: (a.)  $+2$  (b.)  $-500$  (c.)  $+168$  (d.)  $+100$  (e.)  $+22$  (f.)  $-15$  (g.)  $+6$  (h.)  $-8$  (i.)  $+42$  (j.)  $-12$  (k.)  $0$  (l.)  $0$  (m.)  $+780$  (n.)  $-10$  (o.)  $-150$
-

## 1.1.4 Operacions combinades

**Exercici 61.** Calculeu:

a)  $3 - 5 \cdot (-2) + 4$

b)  $5 \cdot (-3) + 2 \cdot (-7)$

c)  $90 : (-2) \cdot 6 - 2$

d)  $-5 : (-1) - (-2) + (-5)$

e)  $-6 - 3 : (-3) \cdot 6 + 2$

**Exercici 62.** Calculeu:

a)  $-5 - (-4 + 6 - 10) + 2$

b)  $90 : (-5) : (-1 + 2 + 4 - 6) - (-2)$

c)  $-5 : (-1) + (-3 + 4 - 5) : (-2)$

d)  $(-12 : (-3) - 13) : (-9)$

e)  $-500 : (-2 + 4) + (-2) + (-5)$

f)  $-5 + 23 - 70 \cdot (+9 - 1 \cdot (-5))$

**Exercici 63.** Calculeu les operacions següents:

a)  $(-5 - 3 \cdot 12) \cdot 20 + (-5 + 2) \cdot 3$

b)  $-6 + 3 \cdot (-5 \cdot 4 + 12) - 12 : 2$

c)  $-6 : (-2) \cdot (-9 + 1) + 2 \cdot (-2 + 7)$

d)  $-6 : 6 : (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 4 : (-2) \cdot 1 \cdot 6 : (-2)$

e)  $-4 + 5 \cdot (-5) + 7 \cdot (-2 + 2)$

f)  $(-3 + 3 \cdot (-5)) : (-2) + (3 - 4 \cdot 2)$

**Exercici 64.** Calculeu:

a)  $-5 + 10 \cdot (-2)$

b)  $-2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7)$

c)  $50 : (-2) + 6 \cdot (-2)$

d)  $110 : (-2) - (-5) + 2$

e)  $-6 + 30 : (-6) \cdot 4 - (-2)$

**Exercici 65.** Calculeu:

a)  $-20 - (10 - 8 + 2) \cdot 2$

b)  $10 : (-5) \cdot 3 + 2 - 5$

c)  $10 : (-2) + (-2 + 4 \cdot 5) : (-2)$

d)  $4 + (3 - 5 \cdot 2) \cdot (-9)$

e)  $-120 : (-19 + 4 + 5) + (-20) - (-90)$

**Exercici 66.** Opereu:

a)  $5 - 4 \cdot 3$

b)  $-25 : (-5) + 3 : (-1)$

c)  $-15 + (-4 - 80) : (-2)$

d)  $-8 : 2 \cdot (-6) - 10$

e)  $-10 : (-5) + 2 : (-1)$

g)  $-6 : (-2) \cdot 5 - 2$

f)  $-5 + (-4 + 2 - 80) : (-2)$

**Exercici 67.** Opereu, respectant la jerarquia d'operacions:

a)  $-4 + (-5) \cdot (+9) + (-2)$

c)  $-5 \cdot [-3 + (-5) \cdot (-7)] - (-3)$

b)  $-(+15) + (-3) \cdot (-5) \cdot (-1) + (-19)$

d)  $(-4) - (-3 + 4 - 10) - (-3) \cdot (-5)$

**Exercici 68.** Calculeu:

a)  $3 - (5 + 6 - 4)$

r)  $(-2) \cdot [4 - (-3)] + 5$

b)  $-4 - [6 - (5 - 9)]$

s)  $13 - [7 - [5 - 2 \cdot (5 - 9)]]$

c)  $-5 \cdot (-2) - (7 - 4) \cdot (-6)$

t)  $-6 + 2 \cdot [-3 + 2 \cdot (-1 + 3)]$

d)  $5 - 2 \cdot (-4) + 8$

u)  $5 \cdot (-3) + 30 : (-5) - 3 \cdot 2$

e)  $-3 + 7 \cdot 2 - 5 \cdot (-2)$

v)  $7 - 4 \cdot [-2 + (-3) \cdot [5 + 10 : (-2)]]$

f)  $2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2$

w)  $2 - 6 : 3 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) - [(-4) \cdot (-3) - 18 : (-9)]$

g)  $-[-(8 + 6) + (5 - 3)] - 8$

x)  $5 - 4 \cdot (-6) + 10 : 2 - [5 - (4 + 6)]$

h)  $-(8 - 3) - (4 + 2) - (9 - 2) \cdot 3$

y)  $-[-3 - 2 \cdot (-4 + 6 - 3) - 8]$

i)  $5 + [4 \cdot (6 + 7 - 5)]$

z)  $25 + 3 \cdot (-4) + 2 \cdot [5 - (-10)]$

j)  $14 : 7 + 6 \cdot (7 - 5) - 12$

aa)  $4 \cdot (-3) + 18 : (-6) + 2 \cdot 3$

k)  $5 + 3 - (-2)$

ab)  $15 - [12 - 3 \cdot (1 - 4)]$

l)  $8 : (-4) + 5 \cdot 0 - 9$

ac)  $10 - (-3) + 2 \cdot [(-3) \cdot (-4) - (-1)]$

m)  $5 - (-3) \cdot 4 - (-2)$

ad)  $[5 - (-4)] \cdot [10 - (1 - 8)]$

n)  $4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-7)$

ae)  $[13 - 2 \cdot (1 - 3)] + 15 : (-3) + (-5) \cdot (-2)$

o)  $(-4) \cdot (3 - 8) - 25$

af)  $-4 + 2 \cdot (-1) - (-3)$

p)  $5 - 2 \cdot (-3) + 16 : (-4)$

ag)  $136 - 5 \cdot 2 - (-6)$

q)  $-(8 + 3) - [6 - 3 - (12 + 4)]$

$$\text{ah)} -2 - [4 - (-2) \cdot (2 + 1)]$$

$$\text{ai)} 4 - 2 \cdot 3 + 6 : 2$$

$$\text{aj)} -2 \cdot (5 + 7) - (4 \cdot 5 - 2)$$

$$\text{ak)} (15 - 3 \cdot 4) - (4 \cdot 7 + 2)$$

$$\text{al)} 5 + 3 \cdot (-2) - (-4)$$

**Exercici 69.** Calculeu:

$$\text{a)} -(-16) : (-2) - (6 - 10)$$

$$\text{b)} -(-10 - 2) : (-4 - 2)$$

$$\text{c)} -[-(-4 - 3) - (5 - 3 \cdot 0)]$$

$$\text{d)} (-30) : (-2 - 3) - (-3)$$

$$\text{e)} (-1) \cdot (-3 - 3) - (-4 \cdot 3 - 7)$$

$$\text{f)} -[-15 : (-3) - (-10)] : (-5)$$

$$\text{g)} (-24 : 2) : (-22 : 11)$$

$$\text{h)} -[-60 + (-3) \cdot (-20)]$$

$$\text{i)} [-4 \cdot (-6 - 2 \cdot 3)] : (-2 - 6)$$

$$\text{j)} (-2) - [-( -2 + 10) : (-2) \cdot 2]$$

$$\text{k)} -[3 \cdot (-5) \cdot (-15 + 15)] : (-5)$$

$$\text{l)} [-(-2 + 7)] \cdot [-(3 - 8 - 6)]$$

**Exercici 70.** Opereu les operacions combinades següents, escrivint tots els passos :

$$\text{a)} -(-18) : (-2) - (5 - 10)$$

$$\text{b)} -[-(-7 - 3) - (5 - 9 \cdot 0)]$$

$$\text{c)} -[-150 : (-30) - (-10)] : (-5)$$

$$\text{d)} (-36 : 2) : (-33 : 11)$$

$$\text{e)} -[-50 + (-3) \cdot (-40)]$$

$$\text{f)} [-3 \cdot (-6 - 2 \cdot 3)] : (-2 - 5)$$

**Exercici 71.** Calculeu les operacions combinades següents, escrivint tots els passos:

$$\text{a)} -(-16) : (-2) - (6 - 10)$$

$$\text{b)} -[-(-4 - 3) - (5 - 3 \cdot 0)]$$

$$\text{c)} -[-15 : (-3) - (-10)] : (-5)$$

$$\text{d)} (-24 : 2) : (-22 : 11)$$

$$\text{e)} -[-60 + (-3) \cdot (-20)]$$

$$\text{f)} [-4 \cdot (-6 - 2 \cdot 3)] : (-2 - 6)$$

**Exercici 72.** Calculeu:

$$\text{a)} (-5) - (2 - 3) + 4$$

$$\text{b)} -5 - (10 + 2 \cdot (-5)) - (+4)$$

$$\text{c)} -4 - 2 + (-10 + 7) + (-12 : 2)$$

$$\text{d)} 55 + (5 - 2 \cdot 3) - (-1)$$

$$\text{e)} 30 - 4 \cdot (-12) + (-50) \cdot (-2)$$

$$\text{f)} -10 : 2 - 2 \cdot (-4) + 2$$

$$\text{g)} -50 : (-10) \cdot (-2) : 5$$

$$\text{h)} 4 : (-2) \cdot 50 - (5 - 20 + 2 \cdot 4)$$

$$\text{i)} (2 - 4 \cdot 10) : (-2) + 5 \cdot (10 - 12)$$

$$\text{j)} 10 - 4 \cdot (5 - 3) + 4 \cdot (-10 + 5)$$



**Exercici 73.** Calculeu:

- a)  $10 - 6 \cdot (4 - 4 \cdot 10) + (5 - 4 \cdot 2) : (-1)$     j)  $505 + (5 - 2 \cdot 300) - (-1)$   
 b)  $(-5) - (4 - 10) + (+10 - 4) - (-5)$     k)  $70 - 4 \cdot (-24) + (-5) \cdot (-2)$   
 c)  $(-7) + (-10) - (+4)$     l)  $-24 : 2 - 2 \cdot (-3) + 2$   
 d)  $-(+20) - (+9) + (-13) + (+22)$     m)  $-250 : (-1) \cdot (-2) : 5$   
 e)  $(-12) - (-40) - (+21) + (+11) - 54$     n)  $2 : (-1) \cdot 50 - (4 - 20 + 2 \cdot 3)$   
 f)  $10 - 53 - (+30) + (-50) - (-2)$     o)  $(20 - 4 \cdot 10) : (-2) + 5 \cdot (5 - 12)$   
 g)  $(-50) - (2 - 6) + 4$     p)  $12 - 4 \cdot (5 - 30) + 4 \cdot (-15 + 5)$   
 h)  $-5 - (12 - 3 \cdot (+5)) - (+4)$     q)  $12 - 6 \cdot (4 - 4 \cdot 5) + (10 - 4 \cdot 2) : (-1)$   
 i)  $-5 - 4 + (-13 + 7) + (-10 : 5)$     r)  $(-5) - (4 - 18) + (+10 - 40) - (-7)$

**Exercici 74.** Completeu la taula següent:

$a$	$b$	$c$	$a - b$	$(a + b) \cdot c$	$a : (b - c)$	$a + b - c$
-5	2	-3				
1	-4	-2				
-3	-2	-1				
5	10	-10				
-1	5	6				

**Exercici 75.** Calculeu el resultat de les expressions següents:

- a)  $(-5) + (-3) + (-2)$     d)  $(-7) + (-15) + 10 - (+2)$   
 b)  $(-2) + 3 - 5 - (-6)$     e)  $-(-10) + (-6) + 15 + 10$   
 c)  $-10 + (-4) - (-5) + 7$     f)  $6 + (-12) - 18 + (-4)$

g)  $(-20) + (-10) + 15 + (-5)$

i)  $+(-9) + 14 + (-5) + 16$

h)  $12 + 18 + (-13) + (-7)$

1. Exercici 61: (a.) 17, (b.)  $-29$ , (c.)  $-272$ , (d.) 2, (e.) 2
  2. Exercici 62 (a.) 5, (b.)  $-16$ , (c.) 7, (d.)  $+1$ , (e.)  $-257$ , (f.)  $-962$
  3. Exercici 63 (a.)  $-829$ , (b.)  $-36$ , (c.)  $-14$ , (d.)  $+14$ , (e.)  $-29$ , (f.) 4
  4. Exercici 64 (a.)  $-25$ , (b.) 31, (c.)  $-37$ , (d.)  $-48$ , (e.)  $-24$
  5. Exercici 65 (a.)  $-28$ , (b.)  $-9$ , (c.)  $-14$ , (d.) 67, (e.)  $+82$
  6. Exercici 66 (a.)  $-7$ , (b.)  $+2$ , (c.)  $+27$ , (d.)  $+14$ , (e.) 0, (f.) 36, (g.) 13
  7. Exercici 67 (a.)  $-51$ , (b.)  $-49$ , (c.)  $-157$ , (d.)  $-28$
  8. Exercici 68: (a.)  $-2$ , (b.)  $-14$ , (c.) 28, (d.) 21, (e.) 1, (f.)  $-4$ , (g.) 4, (h.)  $-32$ , (i.) 37, (j.) 2, (k.) 10, (l.)  $-41$ , (m.) 17, (n.)  $-47$ , (o.)  $-5$ , (p.) 7, (q.) 2, (r.)  $-9$ , (s.) 19, (t.)  $-4$ , (u.)  $-27$ , (v.) 15, (w.)  $-15$ , (x.) 39, (y.) 9, (z.) 43, (aa.)  $-9$ , (ab.)  $-6$ , (ac.) 39, (ad.) 153, (ae.) 22, (af.)  $-3$ , (ag.) 132, (ah.)  $-12$  (ai.) 1 (aj.)  $-42$  (ak.)  $-27$  (al.) 3
-

## 1.2 Potències de nombres enters

### 1.2.1 Càlcul de potències

**Exercici 76.** Calculeu el valor de les potències següents:

a)  $(-9)^0$

c)  $(-12)^2$

e)  $(-10)^6$

b)  $(-2)^3$

d)  $(-66)^0$

f)  $(-300)^3$

**Exercici 77.** Calculeu el valor de les potències següents

a)  $9^0$

g)  $7^2$

m)  $300^2$

b)  $4^3$

h)  $1^7$

n)  $11^2$

c)  $8^2$

i)  $30^4$

o)  $30^3$

d)  $2^5$

j)  $20^1$

p)  $1^4$

e)  $4^0$

k)  $100^0$

q)  $25^0$

f)  $10^4$

l)  $10^6$

r)  $20^6$

**Exercici 78.** Calculeu:

a)  $5^6 : 5^3 + 5^3$

j)  $2^6 - 2^5 + 2^4$

b)  $12^2 : 2^4$

k)  $14^6 : (-2)^6 \cdot 3^6$

c)  $3^{14} \cdot (2^2)^7 \cdot (4^7)^2$

l)  $-8^0 + (-8)^0 + 8^2$

d)  $7^4 : 7^3 \cdot 7^2 \cdot 7^5 : 7^3$

m)  $2^7 \cdot 2^7 : (-2)^6$

e)  $(2^2)^3 + (2^8)^0$

n)  $10^4 - 10^0 - 10^3 + 10^2$

f)  $3^6 : (3^2)^3 \cdot (3^3)^2$

o)  $(12^2)^3 : (2^2)^2 : 2^1$

g)  $9^{10} : (9^3)^3 - (9^0)^9$

p)  $9^3 : 9^2 \cdot (9^4)^2$

h)  $14^{13} \cdot 14^{12} : 14^{10}$

q)  $(-5)^3 \cdot (-5)^5 + (-5)^2$

i)  $40^7 : 2^7 \cdot 3^7$

r)  $(-2^6)^2 + (-2)^3 - 2^3$

s)  $6^8 : 6^5 \cdot 3^2$

u)  $(3^2)^2 - (2^2)^2$

t)  $[(1^3)^3]^4 + (-1)^{34} - (-1)^{35}$

v)  $(-20)^4 + 20^4 - (-20)^3 - (-20)^0$

**Exercici 79.** Calculeu el valor de les potències següents:

a)  $(-8)^0$

g)  $(+9)^2$

m)  $(-30)^3$

b)  $(+5)^3$

h)  $(-1)^7$

n)  $(+12)^2$

c)  $(-11)^2$

i)  $(+300)^4$

o)  $(-40)^3$

d)  $(-2)^5$

j)  $(-20)^3$

p)  $(-1)^8$

e)  $(-14)^0$

k)  $(-100)^3$

q)  $(-5)^0$

f)  $(+10)^4$

l)  $(+10)^6$

r)  $(+20)^6$

**Exercici 80.** Esbrineu el signe del valor de les potències següents:

a)  $6^3$

f)  $(-8)^5$

k)  $(+8)^5$

p)  $- (+5)^9$

b)  $5^4$

g)  $(-9)^{20}$

l)  $(-7)^8$

q)  $(-15)^0$

c)  $12^4$

h)  $(-14)^5$

m)  $- (-3)^4$

r)  $- (-4)^0$

d)  $15^5$

i)  $(+20)^4$

n)  $- (+2)^6$

s)  $- ((-3)^2)^0$

e)  $(-12)^4$

j)  $(-9)^3$

o)  $- (-6)^7$

**Exercici 81.** Esbrineu el signe del valor de les potències següents:

a)  $(-5)^7$

f)  $- (-3)^5$

k)  $- (+6)^{-17}$

b)  $(-17)^6$

g)  $- (-5)^8$

l)  $- (-1)^0$

c)  $(-14)^{-9}$

h)  $- (+7)^0$

m)  $- (-10)^{10}$

d)  $(+4)^3$

i)  $- (-13)^5$

n)  $- (-4)^{300001}$

e)  $(-13)^6$

j)  $- (-4)^6$

**Exercici 82.** Calculeu:

a)  $(-2)^3 \cdot [-30 - (-6)]$

b)  $- (-8 + 6) : (-2) - (-6 \cdot 2)^0$

- c)  $(-10) \cdot (-4 + 2^2 \cdot 7)$
- d)  $-(-9) \cdot (-5) : (-3) - (-4)^2$
- e)  $(-3^2 + 7) \cdot (-10 : 5 - 1)$
- f)  $30 : (-1 - 1 - 3) - (-4)^2$
- g)  $(-3) + (-4)^2 - (-5)^2$
- h)  $(-3)^4 : (-3)^2 + (-3)^3$
- i)  $-(-10 + 2)^2 : (-4 - 4)$
- j)  $(-2)^4 \cdot [-3 - (-6)]$
- k)  $-(-9 + 6) : (-3) - (-16 \cdot 2)^0$
- l)  $(-50) : (-2 - 3) - (-4)^2$
- m)  $(-2) \cdot (-3 - 5) - (-4 \cdot 7 - 7)^0$
- n)  $(-20) \cdot (-5 + 2^2 \cdot 6)$
- o)  $-(-12) \cdot (-5)^0 : (-3) - (-10)^2$
- p)  $(-8) - [ -(-20 + 4) : (-2)^2 ]$
- q)  $(-4^2 + 1) \cdot (-15 : 5 - 1)$
- r)  $60 : (-1 - 1 - 3) - (-3)^2$
- s)  $-[4 \cdot (-5) \cdot (-25 + 15 + 10)]^7 : (-5)$
- t)  $(-2)^3 + (-3)^2 - (-4)^2$
- u)  $(-5)^4 : (-5)^2 + (-3)^3$
- v)  $[ -(-12 + 7) ]^0 \cdot [ -(3 - 1 - 3) ]^6$
- w)  $-(-10 - 2)^2 : (-4 - 2)$
- x)  $(-2)^3 \cdot [-30 - (-6)]$
- y)  $-(-8 + 6) : (-2) - (-6 \cdot 2)^0$
- z)  $(-30) : (-2 - 3) - (-3)^2$
- aa)  $-(-9) \cdot (-5)^0 : (-3) - (-4)^2$
- ab)  $(-1) \cdot (-3 - 3) - (-4 \cdot 3 - 7)^0$
- ac)  $(-2) - [ -(-2 + 10) : (-2)^2 ]$
- ad)  $(-3^2 + 7) \cdot (-10 : 5 - 1)$
- ae)  $30 : (-1 - 1 - 3) - (-4)^2$
- af)  $-[3 \cdot (-5) \cdot (-15 + 15)]^7 : (-5)$
- ag)  $(-3)^3 + (-4)^2 - (-5)^2$
- ah)  $(-3)^4 : (-3)^2 + (-3)^3$
- ai)  $(-10) \cdot (-4 + 2^2 \cdot 7)$

## 1.2.2 Propietats de les potències

**Exercici 83.** Expresses en forma d'una sola potència:

- a)  $3^3 \cdot 3^2$
- b)  $7^4 \cdot 7^5$
- c)  $9^5 \cdot 9 \cdot 9^2$
- d)  $2^4 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^0$
- e)  $11^2 \cdot 11^7$
- f)  $4^5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4^5$

g)  $10^3 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 10$

i)  $18 \cdot 18^3 \cdot 18 \cdot 18^3$

h)  $6 \cdot 6^0 \cdot 6 \cdot 6^4$

j)  $1^4 \cdot 1^3 \cdot 1$

**Exercici 84.** Expresses en forma d'una sola potència:

a)  $4^5 : 4^2$

f)  $7^8 : 7 : 7 : 7^4$

b)  $3^7 : 3^3$

g)  $2^7 : 2 : 2^2$

c)  $8^5 : 8 : 8^2$

h)  $6^6 : 6^4$

d)  $5^8 : 5^2 : 5^0$

i)  $5^{16} : 5^4 : 5^0 : 5^2$

e)  $13^8 : 13^3$

j)  $3^7 : 3 : 3^2$

**Exercici 85.** Expresses en forma d'una sola potència:

a)  $8^4 \cdot 8^7$

h)  $8^3 : 8 : 8 \cdot 8^3$

b)  $2^8 : 2^5$

i)  $11^4 : 11^4 \cdot 11^3$

c)  $9^4 \cdot 9 : 9^2$

j)  $4^5 : 4 \cdot 4^8$

d)  $7^5 : 7^3 \cdot 7 : 7^0$

k)  $3 \cdot 3^4 : 3 \cdot 3^5$

e)  $5^6 \cdot 5^2 \cdot 5 : 5^8 \cdot 5$

l)  $5^4 : 5^3 \cdot 5^4 \cdot 5$

f)  $3^{15} : 3^5 : 3^0$

m)  $12^8 : 12^3 \cdot 12^2$

g)  $1^6 \cdot 1^9 : 1^4$

n)  $2 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 2^0 : 2^2$

**Exercici 86.** Expresses en forma d'una sola potència:

a)  $(4^5)^4$

d)  $[(6^2)^0]^{11}$

g)  $(3^8)^{40}$

b)  $(2^7)^2$

e)  $[(1^5)^2]^9$

h)  $[(20^3)^4]^3$

c)  $[(7^3)^{10}]^2$

i)  $(9^{13})^0$

f)  $(8^7)^0$

**Exercici 87.** Expresses en forma d'una sola potència:

a)  $[(4^{30})^5]^2$

b)  $8^3 \cdot 8 \cdot 8^5$

c)  $20^5 : 20^2 \cdot 20$

i)  $2^{11} : 2^3 \cdot (2^3)^2$

d)  $(7^6)^2 \cdot 7^5$

j)  $1^7 \cdot 1^9 \cdot 1 \cdot (1^4)^0$

e)  $3^9 : (3^3)^3$

k)  $5^6 \cdot (5^2)^6 \cdot (5^0)^7$

f)  $(4^2)^8 : 4^5 \cdot 4^3$

l)  $9^7 : (9^2)^2 : 9 \cdot 9^5$

g)  $[(3^3)^2]^4 : 3^4$

m)  $(5^3)^0 \cdot (5^0)^5$

h)  $(6^4)^3 : (6^2)^5$

n)  $(7^3)^9 : (7^4)^5$

o)  $3^{12} \cdot (3^6)^2 : (3^6)^3$

**Exercici 88.** Expresses en forma d'una sola potència:

a)  $5^3 \cdot 4^3$

e)  $9^2 \cdot 10^2 \cdot 3^2$

i)  $18^3 : 6^3$

b)  $13^4 \cdot 2^4$

f)  $7^6 \cdot 7^6$

j)  $28^4 : 7^4$

c)  $10^5 \cdot 3^5$

g)  $12^7 : 3^7$

k)  $24^9 : 2^9 : 3^9$

d)  $5^8 \cdot 2^8 \cdot 4^8$

h)  $300^2 : 30^2$

l)  $6^2 : 6^2$

**Exercici 89.** Expresses en forma d'una sola potència:

a)  $14^5 \cdot 2^5$

e)  $4^7 \cdot 5^7 : 2^7$

i)  $18^{50} \cdot 2^{50} : 4^{50}$

b)  $120^6 : 10^6$

f)  $49^6 : 7^6 \cdot 2^6 \cdot 686^2$

j)  $60^6 : 3^6 \cdot 2^6$

c)  $8^3 \cdot 8^3$

g)  $15^4 : 3^4 \cdot 4^4$

k)  $4^7 \cdot 40^7 \cdot 4^7$

d)  $12^9 \cdot 3^9 : 6^9$

h)  $6^{12} : 6^{12}$

l)  $50^8 : 2^8 \cdot 5^8$

**Exercici 90.** Expresses en forma d'una sola potència:

a)  $3^6 : 3^2$

f)  $2^6 : 2^3 \cdot [(2^5)^0]^{20}$

i)  $14^6 : 7^6 \cdot 5^6$

b)  $7^9 \cdot 5^9$

j)  $(13^5)^2 : 13^4$

c)  $(15^2)^0$

g)  $4^{12} : 2^{12} \cdot (3^3)^4$

k)  $36^8 : 2^8 : 3^8$

d)  $9^4 \cdot 9^2 \cdot 9$

h)  $5^6 \cdot 5^3 : 5^2 \cdot 5$

e)  $20^4 : 5^4 : 2^4$



$$\begin{array}{lll}
 \text{l)} & (6^3)^9 : (6^9)^3 & \text{n)} & 10^{10} : 10^0 \cdot [(10^2)^{20}]^0 & \text{p)} & 8^{18} : (2^6)^3 \cdot (4^2)^9 \\
 \text{m)} & 1^6 : 1^6 \cdot [(1^6)^{10}]^2 & \text{o)} & (7^6)^0 \cdot 7^{14} : 7^2 \cdot 7
 \end{array}$$

**Exercici 91.** Si es pot, expresseu aquestes expressions en forma d'una sola potència. En cas contrari, calculeu-ne el valor:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & [(-5)^4]^7 & \text{m)} & [(-5)^6]^{10} : [(-5)^2]^4 \\
 \text{b)} & (-14)^2 \cdot (-14) \cdot (-14)^5 & \text{n)} & (-4)^2 \cdot (-3)^4 \\
 \text{c)} & (-7)^7 : (-7) : (-7) : (-7)^4 & \text{o)} & (-1)^4 + (-1)^5 - (-1)^6 \\
 \text{d)} & (-20)^4 : (-2)^4 & \text{p)} & [(-4)^2]^2 + (-4)^3 \\
 \text{e)} & (-5)^2 - (-5) + (-5)^2 & \text{q)} & (-2)^3 : (-2)^2 \cdot (-2)^6 \\
 \text{f)} & [(-3)^5]^0 & \text{r)} & (-12)^3 \cdot (-12)^7 \cdot (-12) \cdot (-12) \\
 \text{g)} & (-14)^2 \cdot (-14)^5 \cdot (-14) \cdot (-14) & \text{s)} & (-6) \cdot [(-6)^3]^4 \cdot (-6)^2 : (-6)^7 \\
 \text{h)} & (-7) \cdot [(-7)^2]^5 \cdot (-7)^4 : (-7)^4 & \text{t)} & [(-9)^3]^7 \cdot [(-9)^4]^5 \\
 \text{i)} & [(-19)^5]^4 \cdot [(-19^4)]^6 & \text{u)} & (-9)^9 : 3^9 \cdot (5^3)^3 \\
 \text{j)} & (-4)^9 : 2^9 \cdot (5^3)^3 & \text{v)} & (-11)^2 + (-11) + (-11)^0 \\
 \text{k)} & (-12)^2 + (-12) + (-12)^0 & \text{w)} & (-7) \cdot [(-7)^8]^2 : (-7)^5 \\
 \text{l)} & (-9) \cdot [(-9)^3]^6 : (-9)^3
 \end{array}$$

x) $[(-3)^4]^{10} : [(-3)^3]^6$	ag) $4^6 \cdot (4^{11})^2 : 4^{19}$
y) $(-2)^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^2$	ah) $(3^0)^7 + (3^5)^0 - 3 + 3^3$
z) $(-10)^4 + (-10)^5 - (-10)^4$	ai) $(20^2)^{20} : (20^2)^3$
aa) $[(-14)^2]^{22} + (-14)^0$	aj) $(-30)^4 + (-30)^2 - (-30)^3$
ab) $4^2 - 4^0 + 4^3$	ak) $[(-1)^3]^7 + (-1)^{20}$
ac) $9^{11} \cdot (9^7)^0 : (9^2)^4 \cdot 9$	al) $1^3 - 2^3 + 3^3$
ad) $(7^2)^6 : (7^2)^5 \cdot 7$	am) $8^{16} : (8^4)^4 \cdot 8$
ae) $12^2 - (12^2)^4$	an) $(70^4)^6 : (70^4)^5$
af) $17 \cdot (17^3)^3 : (17^1)^2 : 17^3$	ao) $300^2 - 300^2$
	ap) $11^2 \cdot 17^0$

**Exercici 92.** Expresses en forma d'una sola potència:

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^5$	f) $(-6) \cdot (-6)^0 \cdot (-6)^4$
b) $(-9)^5 \cdot (-9) \cdot (-9)^2$	g) $(-18)^3 \cdot (-18) \cdot (-18)^3$
c) $(+11)^2 \cdot (+11)^6$	h) $(-7)^4 \cdot (-7) \cdot (-7)$
d) $(-4)^5 \cdot (-4) \cdot (-4)$	i) $7^3 \cdot 7^2 : 7^0 \cdot 7^5$
e) $10^3 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 10$	j) $(-5)^{30} \cdot ((-5)^6)^2 : (-5)$

**Exercici 93.** Expresses en forma d'una sola potència:

a) $[(-3)^6]^2 \cdot (-3)^5$
b) $(-9)^9 : (3^3)^3$
c) $[(-5)^2]^6 : (-5)^5$
d) $[(-7)^7]^4 : (-7)^2 \cdot (-7)^4$
e) $[(-6)^2]^3 : [(-6)^2]^5 : (-6)^4$

f)  $(-8)^{24} \cdot [(-2)^4]^6 \cdot (+1)^{24} \cdot [(-3)^3]^8$

g)  $[(-5)^2]^4 \cdot [(-5)^0]^7 \cdot [(-5)^3]^2$

h)  $(-2)^7 \cdot [(-2)^2]^2 \cdot (-2)^5 \cdot [(-2)^3]^2$

## 1.3 Potències d'un nombre sencer

### 1.3.1 Càlcul de potències

**Exercici 94.** Calculeu les potències següents:

a.  $5^3$

d.  $\left(\frac{-8}{12}\right)^3$

g.  $(-10)^7$

j.  $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

b.  $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

e.  $(-3)^5$

h.  $0,2^3$

k.  $22^1$

c.  $254^0$

f.  $(-50)^5$

i.  $(-0,22)^4$

l.  $22^0$

**Exercici 95.** Es poden descompondre els nombres següents en forma potencial? En cas afirmatiu, trobeu les seves descomposicions en forma de potència:

a. 64

c. 81

e. 576

b. 16

d. 420

f. 1296

**Exercici 96.** Digueu quines de les expressions següents són iguals:

A. (a.)  $2^3$  (b.)  $-2^3$  (c.)  $(-2)^3$  (d.)  $-(-2)^3$

B. (a.)  $3^0$  (b.)  $-3^4$  (c.)  $(-3)^4$  (d.)  $-(-3)^0$  (e.)  $(-3)^0$

C. (a.)  $9^3$  (b.)  $3^9$  (c.)  $(-3)^3$  (d.)  $-(-3)^3$  (e.)  $-(-9)^3$

**Exercici 97.** Expressen en forma de potència:

a.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$

d.  $3 \cdot b \cdot 3 \cdot b \cdot 3$

e. 16

b.  $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$

f. 100000

c.  $(2 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot (2 \cdot a)$

**Exercici 98.** Calculeu les potències següents i digueu quantes operacions feim:

a.  $4^3$

b.  $5^6$

d.  $10^6$

c.  $2^3$

### 1.3.2 Signe d'una potència

**Exercici 99.** Ordeneu de menor a major els nombres següents: (a.)  $-2^3$  (b.)  $2^3$  (c.)  $3^2$  (d.)  $-3^2$  (e.)  $(-3)^2$

**Exercici 100.** Esbrineu el signe de les potències següents:

- |                          |                      |                        |
|--------------------------|----------------------|------------------------|
| a. $(-7)^3$              | d. $(-0.9)^4$        | g. $(-6)^0$            |
| b. $(-12)^5$             | e. $(-\pi)^4$        | h. $(\frac{-4}{12})^3$ |
| c. $(\frac{2}{-5})^{20}$ | f. $(-16 \cdot 5)^5$ | i. $a^{10}$            |

**Exercici 101.** Ordeneu de menor a major les expressions següents, utilitzant els símbols  $<$  i  $=$  segons convengui

- A. (a.)  $10^4$  (b.)  $-10^4$  (c.)  $10^0$  (d.)  $0, 1^{10}$
- B. (a.)  $(\frac{1}{2})^2$  (b.)  $(\frac{-3}{4})^4$  (c.)  $(\frac{-4}{-6})^2$  (d.)  $5^1$  (e.)  $\frac{2^2}{3}$
- C. (a.)  $3^2$  (b.)  $(-5)^2$  (c.)  $-5^2$  (d.)  $(-3)^3$  (e.)  $(\frac{1}{3})^3$

### 1.3.3 Potències d'exponent negatiu

**Exercici 102.** Calculeu:

- |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a. $2^{-3}$             | e. $5^{-4}$             | i. $100^{-2}$           |
| b. $(\frac{2}{3})^{-3}$ | f. $(\frac{2}{5})^{-4}$ | j. $(\frac{1}{2})^{-4}$ |
| c. $(0, 1)^{-3}$        | g. $5^{-2}$             | k. $(-3)^{-2}$          |
| d. $(\frac{-4}{6})^2$   | h. $(\frac{5}{3})^{-3}$ | l. $10^{-4}$            |

**Exercici 103.** Esbrineu el signe de les expressions numèriques següents:

- |                |                 |                 |
|----------------|-----------------|-----------------|
| a. $(-6)^{-4}$ | b. $-(+9)^{-8}$ | c. $(-15)^{-9}$ |
|----------------|-----------------|-----------------|

d.  $-11^{-5}$

g.  $-4^{-17}$

e.  $(-11)^{-5}$

h.  $-(-0,11)^{-2}$

f.  $(\frac{2}{14})^{-6}$

i.  $(-\frac{2}{7})^{-2}$

**Exercici 104.** Expressen aquestes fraccions com a potències:

a.  $\frac{1}{100}$

c.  $\frac{1}{2^4}$

e.  $\frac{125}{27}$

b.  $\frac{1}{8}$

d.  $\frac{1}{a^5}$

f.  $\frac{16}{32}$

## Exercicis de reforç

**Exercici 105.** Ordeneu els nombres següents, una vegada calculats:

- a.  $2^3$                       c.  $3^2$                       e.  $(-3)^2$                       g.  $(5-2)^0$   
b.  $2^{-3}$                       d.  $-3^2$                       f.  $2^{-1}$                       h.  $-1$

**Exercici 106.** Calculeu aquestes potències:

- a.  $5^1$                       c.  $(\frac{5}{3})^{-2}$                       e.  $(\frac{3}{5})^{-2}$                       g.  $-(\frac{5}{3})^3$   
b.  $(\frac{5}{3})^2$                       d.  $(\frac{3}{5})^2$                       f.  $(\frac{-5}{3})^3$                       h.  $(\frac{-6}{5})^{-4}$

**Exercici 107.** Esbrineu el signe de les expressions següents. Raoneu la resposta.

- a.  $(-4)^{30}$                       d.  $0^{100}$                       g.  $(\frac{-3}{10})^4$   
b.  $(-4)^{-10}$                       e.  $(-1)^{-23}$   
c.  $3^{13}$                       f.  $(\frac{-2}{7})^{-3}$                       h.  $-(\frac{1}{7})^3$

**Exercici 108.** Expressen aquestes potències com a potències d'exponent negatiu:

- a.  $\frac{1}{1000}$                       d.  $\frac{1}{3^{20}}$                       g.  $\frac{a^2}{b^2}$   
b.  $\frac{16}{25}$                       e.  $\frac{100}{25}$                       h.  $5^2$   
c.  $0,5^3$                       f.  $0,1^2$                       i.  $\frac{1}{3 \cdot 3}$

**Exercici 109.** Digueu quines de les expressions següents són iguals:

A.

- a.  $3^2$                       b.  $-3^2$                       c.  $3^{-2}$

d.  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

e.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

f.  $(-3)^{-2}$

B.

a.  $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

c.  $\frac{9}{4}$

e.  $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$

b.  $\frac{4}{9}$

d.  $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

f.  $-\left(\frac{2}{3}\right)^0$

C.

a.  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

c.  $2^3$

d.  $(-2)^{-3}$

b.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

e.  $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$



1. Exercici 94: (a.) 125, (b.) 16/81, (c.) 1, (d.)  $-512/1728 = 8/27$ , (e.)  $-243$ , (f.)  $-3125 \cdot 10^5$ , (g.)  $-10^7$ , (h.) 0,008, (i.) 0,00234256, (j.) 81/16, (k.) 22, (l.) 1
2. Exercici 95: (a.)  $2^6$ , (b.)  $2^4$ , (c.)  $3^4, 9^2$ , (d.) No es pot posar en forma potencial ( $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ), (e.) Factoritzant en nombres primers, tenim que  $520 = 2^6 \cdot 3^2 = (2^3)^2 \cdot 3^2 = (2^3 \cdot 3)^2 = 24^2$ , (f.) Factoritzant en nombres primers, obtenim  $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$
3. Exercici 96: (a.)  $a = d, b = c$ , (b.)  $a = e$ , (c.)  $a = e$
4. Exercici 97: (a.)  $(\frac{3}{5})^3$ , (b.)  $2^3 \cdot 3^3$ , (c.)  $(2 \cdot a)^3$ , (d.)  $3^3 \cdot b^2$ , (e.)  $2^4, 4^2$ , (f.)  $10^5$
5. Exercici 98: (a.) 2 operacions:  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ , (b.) 4 operacions:  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5) = (25 \cdot 5)(25 \cdot 5) = (125)(125) = 15.625$  (c.) 2 operacions:  $(2 \cdot 2) \cdot = 4 \cdot 2 = 8$  (d.) 4 operacions
6. Exercici 99: (a.)  $-2^3 = -8$ , (b.)  $2^3 = 8$ , (c.)  $3^2 = 9$ , (d.)  $-3^2 = -9$ , (e.)  $(-3)^2 = +9$ . Per tant,  $d < a < b < c = e$
7. Exercici 100: (a.)  $-$ , (b.)  $-$ , (c.)  $+$ , (d.)  $+$ , (e.)  $+$ , (f.)  $-$ , (g.)  $+$ , (h.)  $-$ , (i.)  $+$
8. Exercici 101:
  - A.  $b < d < c < a$ ,
  - B.  $a < c < e < d < b$ , ja que (a.)  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$  (b.)  $(\frac{-3}{4})^4 = \frac{81}{4} = 20,25$   
 (c.)  $(\frac{-4}{-6})^2 = \frac{4}{9} \simeq 0,4$  (d.)  $5^1 = 5$  (e.)  $\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$
  - C.  $d < c < e < a < b$ , ja que (a.)  $3^2 = 9$ , (b.)  $(-5)^2 = 25$ , (c.)  $-5^2 = -25$ ,  
 (d.)  $(-3)^2 = -27$ , (e.)  $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$

## 1.4 Propietats de les potències

**Activitat 110.** D'aquestes expressions, (a.) agrupeu aquelles que cregueu que són semblants (b.) treballeu en grups per a escriure una regla que permeti simplificar les expressions a cada grup (c.) mostreu de forma clara com s'aplica cada regla per a simplificar les expressions .

$$7^3 \cdot 7^2$$

$$a^3 \cdot a^n$$

$$(a^{2x})^5$$

$$\frac{p^5}{p^m}$$

$$\frac{b^{10}}{b^7}$$

$$a^4 \cdot a$$

$$b^7 \cdot b^m$$

$$b^{2x} : b$$

$$(5^3)^5$$

$$(2^4)^7$$

$$(3^2)^4$$

$$\frac{11^{13}}{11^9}$$

$$a^7 \cdot a^2$$

$$\frac{5^9}{5^2}$$

$$m^4 \cdot m^2 \cdot m^3$$

$$7^7 : 7^4$$

$$b^8 \cdot b^5$$

$$(b^5)^n$$

$$(x^y)^3$$

$$(a^5)^2$$

$$5^4 \cdot 5^3$$

$$(p^4)^n$$

$$\frac{a^6}{a^2}$$

**Exercici 111.** Completeu:

a.  $\frac{8^{-3}}{8^{-10}} = 8^{\square}$

d.  $\frac{4^{-6}}{4^7} = 2^{\square}$

b.  $(8^4)^8 = 8^{\square} = 2^{\square}$

e.  $(5^8 \cdot 4^{-8})^{-11} = 5^{\square} \cdot 4^{\square}$

c.  $5^3 \cdot 5^{-5} = 5^{\square}$

f.  $(7^{-4} \cdot 9^4)^{-10} = \left(\frac{9}{7}\right)^{\square}$

**Exercici 112.** Expressiu com una sola potència:

a.  $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^7$

d.  $6^4 \cdot 6^2 : 6^3$

g.  $3^{10} : 3^5 : 3^2$

b.  $7^4 \cdot 7^{-2} \cdot 7^3$

e.  $8^2 \cdot 8^{-1} : 8^5$

h.  $5^{-3} : 5^4 \cdot 5^8$

c.  $4^2 \cdot 4^{-4} \cdot 4^{-1}$

f.  $3^{-4} \cdot 3^5 \cdot 3^7$

i.  $9^2 : 9^{-4} : 9^5$

**Exercici 113.** Opereu aquestes potències i deixeu el resultat en forma de potència:

- a.  $5^2 \cdot 3^2$                       c.  $7^6 \cdot 3^6$                       e.  $25^7 : 5^7$   
 b.  $4^{14} \cdot 2^{14}$                       d.  $45^2 : 9^2$                       f.  $63^3 : 7^3$

**Exercici 114.** Expressiu com una sola potència:

- a.  $(4^3)^4$                       c.  $(21^5)^8$                       e.  $(6^{-4})^7$   
 b.  $(5^7)^2$                       d.  $(5^2)^{-3}$                       f.  $(3^{-1})^{-2}$

**Exercici 115.** Reduïu a una sola potència:

- a.  $(5 \cdot 5^3)^2 : 5^{-2}$                       f.  $3 \cdot (3^2)^2 \cdot (3^3)^3 \cdot (3^4)^4$   
 b.  $2^3 \cdot (2^{-3} : 2 \cdot 2^7)^3 \cdot (2^{11} : 2^4 : 2^3)^{-4}$                       g.  $3^5 : ((3^{23} : 3^{17})^2 \cdot 3^7)$   
 c.  $(-3)^4 : (-3)^{-3} \cdot ((-3)^9)^{-2}$                       h.  $5^3 \cdot 5^{-6} : 5^{-9}$   
 d.  $(((-2)^3)^5)^0$                       i.  $(\frac{2}{3})^{-3} \cdot 2^3 : 3^5$   
 e.  $(a^5 : a^3)^2 \cdot (a^{-7} : a^{-2})^4$                       j.  $(-2)^4 \cdot 4^2 : (-8)^2$

**Exercici 116.** Reduïu a una sola potència:

a.

$$\frac{(5^3 \cdot 5^2)^3}{5^4 : 5^2}$$

b.

$$\frac{4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^7}{4^9 \cdot 4^{-11} : 4^{15}} \cdot 4^3$$

c.

$$\frac{(4^3)^2 \cdot (-4)^5}{4^2 \cdot 4} \cdot \frac{4^8 : (-4)^2}{4^9 : (4^4)^2}$$

d.

$$\frac{(4^{23} \cdot 4^{14})^2}{4^{25} : 4^{23}}$$

e.

$$\left(\frac{2^3 \cdot 2^5}{2}\right)^3 \cdot 2^{-5} : 2^3 \cdot 2$$

f.

$$\left(\frac{2^{15} : (2^{10} : 2^7)^3}{2^3 : 2 \cdot 2^2}\right)^3 \cdot 2^{-8} : \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^6 : 2^3}$$

**Exercici 117.** Completeu:

a.  $(3^6 \cdot 3^{-4})^3 \cdot 3^{\square} = 3^{17}$

d.  $(3^{\square})^{-3} \cdot 3^3 \cdot 3 = 3^{-31}$

b.  $(3^6 \cdot (3^2)^3)^4 \cdot 3^{40} \cdot 3^{\square} = 3^{-10}$

e.  $(3^8 \cdot 3^3)^{\square} : 3^{-2} = 3^{13}$

c.  $(2^{\square})^{-2} \cdot 2^6 = 2^{34}$

f.  $(5^2 \cdot 5^3)^{\square} \cdot (5^2)^3 = 5^{105}$

**Exercici 118.** Calculeu:

a.

$$(2^3 \cdot 2 \cdot 2^{11})^{-3} : (2^{-15} \cdot 2^{11})$$

e.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{-2}{5}\right)^5$$

b.

$$\left(6^7 \cdot \frac{6^3 \cdot 6^8}{6^{-3}}\right)^{-2} \cdot 6^2$$

f.

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-4} : 5^{-6} \cdot 3^4$$

c.

$$(0,5^2)^3 \cdot 0,5^3 : (0,5^8 : 0,5^4)$$

g.

d.

$$(2^{-3} \cdot 2^{-8} \cdot 2^{10}) ((2^3)^6 : 2)$$

$$(-3)^2 (-3)^4 3^8 : (3^8 3^2 : 3^{-5})^0$$

**Exercici 119.** Simplifiqueu fins a obtenir una sola potència:

a.

$$\frac{2^{-6} \cdot (2^2)^{-4}}{2^{10} \cdot 2^{-3}}$$

b.

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{10} : (5^{-2} \cdot (-5)^2)}{5^2 \cdot 5^7}$$

c.

$$\frac{(x^8 \cdot x^3 : x)^3}{(x^{10} : x^2)^3}$$

d.

$$\frac{5^3 \cdot (5^3)^{-2} \cdot 5^2}{(5^2)^4 \cdot 5^3 \cdot 5^{20}}$$

**Exercici 120.** Simplifiqueu (potser sigui convenient factoritzar els nombres més grans):

a.  $5^{-3} : 5^4$

c.  $\frac{(-4)^2 \cdot 2^3}{2^{-2}}$

b.  $(2^3)^{-2} \cdot 2^{-3}$

d.  $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4$

i.  $\frac{4^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{-1}}{2^{-3} \cdot 8}$

e.  $(-2)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

j.  $\frac{2^3 \cdot (-2^4)^2}{2^{-5}} \cdot (-2)^3$

f.  $\left(\frac{5^{-3}}{2^{-3}}\right)^2$

k.  $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^{-4}}{2^5}$

g.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

l.  $\left(\left(\frac{1}{-16}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-2}{16}\right)^3\right)^{-3}$

h.  $\frac{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$

m.  $\frac{8^3 \cdot 2^3}{4^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

---

Solucions de “Propietats de les potències”

---

- Exercici 115 (a.)  $5^{10}$  (b.)  $2^{-4}$  (c.)  $(-3)^{-11}$  (d.) 1 (e.)  $a^{-16}$  (f.)  $3^{30}$  (g.) 1 (h.)  $5^6$   
(i.)  $2^{-1} \cdot 3^{-2}$  (j.)  $-2^2$
  - Exercici 116 (a.)  $5^{13}$  (b.)  $4^{33}$  (c.)  $-4^{13}$  (d.)  $4^{72}$  (e.)  $2^{-16}$  (f.)  $2^{-9}$
  - Exercici 117 (a.)  $-13$  (b.)  $-18$  (c.)  $-20$  (d.) 11 (e.) 1 (f.) 20
  - Exercici 118 (a.)  $2^{47}$  (b.)  $6^{-40}$  (c.)  $0,5^5$  (d.)  $2^{-4}$  (e.)  $-\left(\frac{2}{5}\right)^2$  (f.)  $5^{-10} \cdot 3^8$  (g.)  $3^{14}$
  - Exercici 119 (a.)  $2^{-27}$  (b.)  $5^{-19}$  (c.)  $x^6$  (d.)  $5^{-32}$
  - Exercici 120 (a.)  $5^{-7}$  (b.)  $2^{-9}$  (c.)  $2^9$  (d.)  $\left(\frac{2}{5}\right)^7$  (e.)  $-1$  (f.)  $\left(\frac{5}{2}\right)^{-6}$  (g.)  $2^2$  (h.)  $\left(\frac{5}{2}\right)^3$   
(i.)  $2^8$  (j.)  $-2^{19}$  (k.)  $-2^{-6}$  (l.)  $-2^{-51}$  (m.)  $2^{13}$
-

## 1.5 Potències de base 10. Notació científica

**Exercici 121.** Escriviu en notació científica els nombres següents:

- |                           |                               |                          |
|---------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| a. $42,5 \cdot 10^{-3}$   | f. $5345,3 \cdot 10^{-4}$     | k. $6,023 \cdot 10^{23}$ |
| b. $0,505 \cdot 10^4$     | g. 0,5                        | l. 13700 milions         |
| c. $0,0055 \cdot 10^{-3}$ | h. $-235,58$                  | m. $10^{-35}$            |
| d. 59809,2                | i. 0,00000257                 | n. $52 \cdot 10^3$       |
| e. $498,93 \cdot 10^2$    | j. $0,0000453 \cdot 10^{-13}$ | o. $45 \cdot 10^4$       |

**Exercici 122.** Escriviu amb totes les xifres els nombres que corresponen a les notacions següents i indiqueu si es tracte de notacions científiques o no:

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| a. $2,3 \cdot 10^3$      | g. $8 \cdot 10^9$         |
| b. $0,3 \cdot 10^{-4}$   | h. $10^4$                 |
| c. $5,456 \cdot 10^{-4}$ | i. $-1,3 \cdot 10^{10}$   |
| d. $54,2 \cdot 10^3$     | j. 5                      |
| e. $10^{-43}$            | k. $5,6 \cdot 10^{-36}$   |
| f. $1^3$                 | l. $780,89 \cdot 10^{-4}$ |

**Exercici 123.** Calculeu:

- |                                           |                                                 |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a. $2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3$      | e. $8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^2$ |
| b. $6 \cdot 10^4 : (2 \cdot 10^3)$        | f. $(4 \cdot 10^2) : (3 \cdot 10^2)^2$          |
| c. $(5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2) : 10^2$ | g. $8 \cdot 10^4 : (2 \cdot 10^3)$              |
| d. $(3 \cdot 10^4)^2$                     |                                                 |

**Exercici 124.** Expressen en notació científica i calculeu el resultat:

a.

$$\frac{0,00054 \cdot 12.000.000}{250.000 \cdot 0,00002}$$

b.

$$\frac{1.320.000 \cdot 25.000}{0,000002 \cdot 0,0001}$$

c.

$$\frac{0,00005 : 0,000004}{125.000 \cdot 800.000}$$

d.

$$0,00005 \cdot \frac{124.000 \cdot 40.000}{60.000 \cdot 0,00003} : 0,000002$$

**Exercici 125.** Compareu el diàmetre del Sol amb la longitud d'una formiga. Quantes formigues cabrien en línia a l'equador del Sol?

Dades: (a.) Diàmetre del Sol: 1.392.000 km (b.) Longitud d'una formiga: entre 2 i 25 mm

**Exercici 126.** Compareu el pes d'un portavions amb el pes un foli DIN A4. Aproximadament, quants folis fan falta per igualar el pes d'un portavions?

Dades:

- L'USS Franklin pesa 27.100 tones
- Les dimensions d'un DIN A4 són  $210 \times 297$  mm
- Hi ha  $2^4$  DIN A4 a una foli DIN A0
- Un DIN A0 té una superfície de  $999949 \text{ mm}^2$
- Freqüentment el gramatge dels folis és de  $80 \text{ g/m}^2$

**Exercici 127.** Trobeu quantes vegades és més gran una balena en relació a una puça.

Dades: (a.) la balena blava té 32,9 m de llargària com a màxim i és l'animal més gran que ha existit mai. (b.) Una puça fa com a màxim 3,3 mm de llarg

**Exercici 128.** Quant més alt és l'Empire State Building que una persona

Dades: l'Empire State Building fa 443,2 m i podeu estimar l'alçada d'una persona entre 1,5 m i 2 m.

**Exercici 129.** La dita "És més difícil que trobar una agulla en un paller", indica la dificultat extrema de trobar una agulla en un paller. Trobeu quantes agulles caben en un paller.

Dades: una agulla de cosir té entre 0,25 mm i 0,70 mm de diàmetre i 38 mm de llarg. El graner el podeu suposar de  $10 \times 10 \times 4$  m. Nota: compareu els volums

**Exercici 130.** Expresses en notació científica les mesures d'aquesta taula (figura 1.3) i compareu-les.

Esdeveniment	Mesura (m)
Distància mitjana Terra-Lluna	150.000.000.000
Diàmetre mitjà terrestre	12.800.000
Distància Palma-Alcúdia	75.000
Diàmetre mitjà de Júpiter	140.000.000
L'altura d'una persona	1,75
La distància mitjana entre el Sol i Alfa-Centauri	40.790.494.000.000.000

Figura 1.3 Diverses mesures

**Exercici 131.** L'àlbum *Thriller* d'en Michael Jackson és el disc de vinil **més venut**, amb un total de 42,4 milions de còpies venudes arreu del món. Es diu que si apilèssim tots els LP junts aniríem i tornariem a la Lluna. És certa aquesta afirmació?



Dades: Gruixa d'un disc de vinil (amb la funda): 2 mm. La distància de la Terra a la Lluna és de 150.000.000 km (figura 1.3).

**Exercici 132.** Aproximadament, quant més gran és la Terra en relació a un àtom? (preneu com a referència el radi mitjà de l'Urani, que és de 156 picòmetres). Un picòmetre és la mil milionèsima part d'un mil · límetre.

**Exercici 133.** Calculeu els volums dels cossos del sistema solar (figura 1.4) i passeu-los a notació científica. Utilitzeu aquesta informació per a comparar-los (feis servir el tamany de la Terra com a patró).

Cos	Radi mitjà (m)	Lluna major
El Sol	696.342.000	cap
Mercuri	2.439.700	cap
Venus	6.051.800	cap
La Terra	6.371.000	la Lluna ( $\varnothing$ 3.474.200 m)
Mart	3.390.000	Fobos ( $\varnothing$ 22.200 m)
Júpiter	69.911.000	Ganímedes ( $\varnothing$ 5.262.400 m)
Saturn	58.232.000	Tità ( $\varnothing$ 5.150.000 m)
Urà	25.362.000	Titania ( $\varnothing$ 1.576.800 m)
Neptú	24.622.000	Tritó ( $\varnothing$ 2.705.200 m)
Plutó	1.161.000	Caronte ( $\varnothing$ 1.207.000 m)

Figura 1.4 Cossos del sistema solar

**Exercici 134.** Quin planeta del sistema solar té la lluna més gran (vegeu la figura 1.4)? Quantes vegades hi cap la Lluna?

**Exercici 135.** Quant de temps tardaríem a arribar al Sol des de la Terra anant en cotxe? (podeu suposar que aniríem a 100 km/h). La distància orbital de la Terra oscil·la entre 147.098.290 i 152.098.232 km.

**Exercici 136.** Passeu aquestes mesures a la unitat estàndard corresponent i esbrineu quantes vegades cabria, aproximadament, un objecte que tingué la mesura menor dins un objecte que tingué la mesura major.

- |                                      |                                                |
|--------------------------------------|------------------------------------------------|
| a. 40 quilòmetres i 3 mil · límetres | c. $10^{-6}$ mil · límetres i 0,45 quilòmetres |
| b. 54,56 dam i 3 centímetres         | d. 48000 quilòmetres i 0,0002 mm               |

**Exercici 137.** La Via Làctia té un radi aproximat de 50.000 anys llum. Què tardaríem a creuar de punta a punta la Via Làctia en cotxe? I si anàssim amb un coet espacial? Passeu els resultats a anys.

Dades necessàries: Un any llum és la distància que recorre la llum en un any (a.) La velocitat de la llum és de 300.000 km/s, aproximadament (b.) Podeu suposar que tenim

un fórmula 1, amb una velocitat mitjana de 370 km/h (c.) Podeu **suposar** que el coet va a 30.000 km/h

**Exercici 138.** Feis una línia del temps dels esdeveniments següents (figura 1.5). L'abreviatura "ma" significa milions d'anys.

Esdeveniment	Ocurrència (des de l'actualitat)
Big Bang	15.000 ma
Formació de les galàxies	13.000 ma
Formació de la Via Làctia	10.000 ma
Formació del Sol	5.000 ma
Formació de la Terra	4.500 ma
Aparició de la vida procariòtica	3.500 ma
Aparició de la vida eucariòtica	1.500 ma
Aparició dels primers peixos	490 ma
Aparició dels primers animals terrestres	415 ma
Pangea	280 ma
Extinció dels dinosaures	65 ma
Aparició dels primers primats	50 ma
Homo erectus	2 ma
Homo sapiens	200.000 anys
Naixement de Crist	2013 anys
Naixement de Einstein	134 anys

**Figura 1.5** Alguns esdeveniments *rellevants* en la història de l'univers

Abans de fer-ho, passeu el temps a notació científica i distribuir-los en un segment d'acord amb l'exponent de la base 10.

**Exercici 139.** Quantes gotes d'aigua caben a una piscina?

Dades necessàries: (a.) Mesures d'una piscina olímpica:  $50 \times 25 \times 2$  m (b.) 20 mil gotes és un litre

## 2

# PROPORCIONALITAT NUMÈRICA

## 2.1 Relacions entre magnituds

**Exercici 140.** Digues quina relació hi ha entre les magnituds següents:

- a) kg de farina i número d'ous per fer una coca de xocolata
- b) Número de persones i temps que tarden a cavar un pou
- c) La velocitat a la que caminem i les hores que tardem en arribar al nostre destí
- d) Els doblers que guanyam i el nombre de fills que tenim

**Exercici 141.** En cada cas, digues quina relació hi ha entre les dues magnituds:

- a) El nombre d'astronautes a una nau espacial i els kg de menjar que mengen
- b) El nombre d'obrers a una obra i el temps que tarden a acabar-la
- c) El temps que passa i la longitud d'una estalactita
- d) Les hores de temps lliure que tenim i les hores que miram la televisió
- e) La longitud del costat d'un triangle equilàter i el seu perímetre
- f) Hores que tenim encesa la televisió i la despesa d'energia que provoca
- g) El número de sabata d'una persona i la seva edat
- h) El volum d'una bolla i el temps que tarda per arribar a enterra si la deixem anar
- i) El perímetre d'un pentàgon regular i la longitud del seu costat

**Exercici 142.** En cada cas, digues quina relació hi ha entre les dues magnituds:

- a) La longitud del costat d'un cub i l'aire que conté
- b) El perímetre d'un quadrat i el seu costat
- c) Els doblers que guanyam i els doblers que gastam en el mes
- d) El temps que tardem en anar del punt  $A$  al punt  $B$  i la distància entre  $A$  i  $B$

**Exercici 143.** Entre aquestes magnituds, digues quines tenen una relació de proporcionalitat directa, de proporcionalitat inversa o bé no tenen cap relació:

- a) Litres d'aigua i quilograms de farina per fer la massa del pa
- b) L'alçada d'una persona i la seva edat

- c) El tamany de la roda d'un cotxe i la velocitat a la que va
- d) El radi d'una circumferència i la seva longitud
- e) L'àrea d'un quadrat i la longitud el seu costat
- f) L'àrea d'un quadrat i la longitud de la seva diagonal
- g) L'àrea d'un quadrat i el seu perímetre

**Exercici 144.** Digues quina relació hi ha entre les magnituds següents (“relació de proporcionalitat directa”, “relació de proporcionalitat inversa” o “no hi ha relació”):

- a) El nombre de quilograms comprats de taronges i els euros que ens costen
- b) La altura d'un individu i la longitud del seu dit polsa
- c) Hores de feina i sou apercibut, en un treballador que treballa per hores
- d) Els doblers que demanam al banc i els interessos que tornam
- e) El nombre de columnes d'un edifici i el pes que suporta cadascuna

page[yes]

---

— Solucions de “Relacions entre magnituds” —

1. Exercici 141: (a.) D, (b.) I, (c.) D, (d.) No té relació, (e.) D, (f.) D, (g.) No té relació, (h.) No té relació, (i.) D.
  2. Exercici 142: (a.) Relació cúbica, (b.) Directa, (c.) Hi ha relació però no és directa, (d.) Directa
-

## 2.2 Proporcionalitat directa

### Reducció a la unitat

Resolem un problema:

*Quatre capsas iguals de bombons pesen 2,5 kg. Quant pesen set capsas iguals a les anteriors?*

Per resoldre aquest problema, hem de saber quan pesa una sola capsa de bombons (això es diu reduir a la unitat). Per fer-ho simplement hem de dividir entre quatre:  $2,5 : 4 = 0,625$ . Això vol dir que cada capsa pesa 0,625 kg. Aleshores set capsas pesen  $7 \times 0,625 = 4,375$  kg.

**Exercici 145.** Si fent 25 hores de feina, na Marta cobra 625 euros, quant cobrarà fent 60 hores? Quantes hores hauria de fer na Marta per cobrar exactament 1200 euros?

**Exercici 146.** Quatre astronautes mengen 20 kg de menjar en una setmana.

- Quants quilograms menjaran 7 astronautes?
- Si tenim 125 kg de menjar, per quants d'astronautes bastarà?

**Exercici 147.** Si cada dues hores plou 70 litres. Quant haurà plogut en un dia?

**Exercici 148.** Durant l'estiu, dues-centes persones consumeixen 500 litres per dia. Quants litres per dia consumiran 60 persones?

**Exercici 149.** El meu cotxe consumeix 22 litres cada cent quilòmetres. (a.) Quants litres consumiria si fes 56 km? (b.) Si tenc només 7 litres al dipòsit, quin recorregut podria fer?

**Exercici 150.** Per anar de Palma a Binissalem (que està a 22 km) tard 35 minuts. Quant tardaré per anar a Inca (que està a 30 km)? Quan dugui 10 minuts després de partir, a quina distància estaré?

**Exercici 151.** Un periquito menja 24 grams de pinso en 3 dies. Quants grams menjarà en 8 dies?

**Exercici 152.** Quatre cavalls mengen 100 quilograms de palla al mes. Quants quilograms menjaran 10 cavalls?

**Exercici 153.** Una bombeta encesa durant 5 hores consumeix 12 kWh. Quants en consumirà si està encesa 2 dies?

**Exercici 154.** Na Carme es pot rentar els cabells durant 48 dies amb un pot de xampú de 150 ml. Què necessita per rentar-se'ls durant 3 mesos?

Nota: per simplificar, podeu suposar que un mes té 30 dies. Ara bé, en realitat s'hauria de calcular quants de dies hi ha en tres mesos (en promig).

**Exercici 155.** Per fer una ensalada de fruites, necessitam tallar a bocinets 4 taronges per a cada 10 plàtans. Quantes taronges hem de tallar a bocinets si disposem de 4 plàtans?

**Exercici 156.** En Pau Gasol fa 24 punts en 3 quarts. Quants punts fa en tot el partit?

**Exercici 157.** Pintar 50 m<sup>2</sup> de paret costa 500 euros. Quant costa pintar 420 m<sup>2</sup>? Quants metres podem pintar si només tenim 264 euros?

**Exercici 158.** Un enginyer tècnic ha rebut un salari de 1000 euros per dues setmanes de feina. Quants en rebrà per tres setmanes i mitja?

**Exercici 159.** Per fer 2 litres de llet preparada necessitam 200 grams de canyella. Quants en necessitem per fer 5 litres?

**Exercici 160.** Segons les estadístiques, 2 de cada 3 persones tenen càries. Si són 360 les persones enquestades, quantes tenen càries?

**Exercici 161.** Tres retoladors costen 4,80 euros. Quant costaran 5 retoladors?

**Exercici 162.** Necessitam 4 metres de tela per fer una cortina. Si 2,5 m de tela costen 48 euros, quant haurem de pagar per la tela?

**Exercici 163.** Quatre persones mengen 22 quilograms de menjar en un mes. Quants quilos menjaran 3 persones?

**Exercici 164.** Si un cotxe consumeix 20 litres de benzina fent 120 quilòmetres, quan consumirà si fa 80 km?

**Exercici 165.** Un rellotge s'ha endarrerit 18 minuts en 6 dies. Quants minuts s'haurà endarrerit d'aquí a 9 dies? Quants dies han de passar per a que s'endarrereixi tres quarts d'hora?

**Exercici 166.** Per a l'aniversari, em regalen una capsa de bombons. Ja me he menjat les 3/4 parts de la capsa. Si la capsa contenia 40 bombons, quants en queden?

**Exercici 167.** Una capsa de 10 llapis de colors costa 8 €. Quant val una capsa de 12 llapis?

**Exercici 168.** Si un tren recorre 430 km en sis hores, llavors quants de quilòmetres recorrerà en nou hores?

**Exercici 169.** La Laia treballa de dependenta durant les vacances de Nadal. Per 5 dies de feina cobra 250 €. Si ha treballat 14 dies, quant cobrarà?

**Exercici 170.** Un arbre als 12 mesos mesura 1,54 m d'altura. Si creixés al mateix ritme tot el temps, quant mesuraria als 24 mesos?

**Exercici 171.** (Comparació de camises) En una botiga tenen dues ofertes: 3 camises a 57 € o bé 5 camises a 92 €. Quina és millor?

**Exercici 172.** Les despeses de la comunitat de veïns es paguen cada trimestre i pugen a 270 €. Quant s'haurà de pagar al finalitzar l'any?

**Exercici 173.** Tres màquines imprimeixen 1500 llibres cada una al mes. Si un empresari compràs 5 màquines més, quants llibres podrà imprimir al cap del mes?

**Exercici 174.** En un llibre de cuina hi ha els ingredients per fer 15 galetes:

- 225 g de farina
- 50 g de sucre
- 60 ml de llet
- 100 g de panses
- 75 g de mantega
- 1 ou

Si vull fer 60 galetes, quina quantitat de cada ingredient necessit? I si en volgués fer 20? I si en volgués fer 45?

**Exercici 175.** Un volant de cotxe fa 1150 voltes en 15 minuts. Quantes voltes farà en 50 minuts?

**Exercici 176.** Per enrajolar una habitació s'han fet servir 70 rajoles de  $400 \text{ cm}^2$ . Quantes rajoles de  $350 \text{ cm}^2$  necessitaríem per enrajolar la mateixa habitació?

**Exercici 177.** Una bossa de taronges de 3 kg costa 3,6 €. Calculeu quant costarà una bossa de 5 kg.

**Exercici 178.** Si 45 litres d'oli pesen 41,22 kg, quant pesaran 120 litres?

**Exercici 179.** Un cotxe fa 40 km en 35 minuts. Quants minuts trigarà en fer 100 km?

**Exercici 180.** Una llibreta de 50 pàgines costa 1,10 €. Si el preu anàs en funció de les pàgines que té, quants diners costaria una llibreta de 75 pàgines? I de 320 pàgines?

**Exercici 181.** Tres quilograms de patates valen 5,55 €. Què costarien 10 kg? I 5 kg?

**Exercici 182.** Si un euro val 1,45 dòlars, quan valen set euros i mig?

**Exercici 183.** Na Júlia ha contestat bé 14 de les 18 preguntes d'un examen. Quina nota tindrà?

**Exercici 184.** Si per fer un pastís per a 5 persones necessito 3 ous, entre altres ingredients, quants en necessitaré per fer el mateix pastís per a 7 persones?

**Exercici 185.** Un practicant posa a la setmana 315 injeccions. Si anàs al mateix ritme, quantes injeccions posa al cap d'un mes? I al cap d'un any?

**Exercici 186.** Un jugador de futbol fa dos gols cada 12 llançaments a porta. Si sempre manté la mateixa eficàcia, quants llançaments haurà fet per a marcar 7 gols?

**Exercici 187.** (Dieta recomanada) A un pot de iogurt de 125 g. hi ha una inscripció que posa: "Contingut en calci 104 mg. (26% del consum diari recomanat)".

- a. Quants mil·ligrams de calci hauria de prendre (per a arribar al 100% de la quantitat de calci recomanada)?
- b. Per tant, quants iogurts hauria de prendre, si només s'alimentàs de iogurts?

**Exercici 188.** A cinc caixes caben 24 llibres de 5 cm. d'amplària. Quants llibres cabrien a deu caixes? I a 21?

**Exercici 189.** Si en quatre sacs hi caben 10 quilos de patates, si volem emmagatzemar 25 quilos, quants sacs ens fan falta?

**Exercici 190.** Quatre bolígrafs costen 1,20 €. Completeu aquesta taula:

Bolígrafs	1	2	3	4	5	10	15	20	30	50
€										

**Exercici 191.** Tres-cents grams de formatge costen 6€ Què podré comprar amb 4,50€?

**Exercici 192.** Una màquina embotelladora ha omplert 45 ampolles en 5 minuts. Quant tardarà en omplir 180 ampolles? Empleneu la taula següent:

Ampolles	1	2	3	10	20	90	180	200	300	500
Temps										

**Exercici 193.** Si 15 kg de taronges valen 22,5 euros, quant valdran 35 kg de taronges?

**Exercici 194.** (Rajoles de xocolata) Quina rajola surt més bé de preu?

name: arxius/ material-apunts- ESPA2-Proporcionalitat- numerica-figs-xocolata.jpeg file: arxius/ material-apunts-
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Figura 2.1** Ofertes de xocolata

**Exercici 195.** Si 900 grams d'un aliment contenen 1300 kCal, quantes quilocalories contendran només 150?

**Exercici 196.** (L'estadi de futbol) A un estadi de futbol hi ha dues classes d'entrades: adult i infantil. Si en un partit de futbol hi assisteixen 500 adults i 200 infants, la recaptació puja a 20.000 euros. Quants d'adults i infants han assistit al partit si s'han recaptat 12.000 euros? Nota: suposeu que la proporció d'adults i infants es mantindrà en el partit següent.



---

Solucions de “Proporcionalitat directa”

---

1. Exercici 148: 150 litres
  2. Exercici 152: 250 kg
  3. Exercici 153: 115,2 kWh
  4. Exercici 154: 281,25 ml
  5. Exercici 159: 500 g
  6. Exercici 162: 76,8 euros
  7. Exercici 184: 4,2 ous
  8. Exercici 186: 42 tirs
  9. Exercici 188: (a.) 48 llibres, (b.) 100,8 llibres
  10. Exercici 190: Un sol bolígraf costa 0,30 €
  11. Exercici 193: 52,5 €
  12. Exercici 194: La Nyam-Nyam (400 grams costen 1,20 €)
  13. Exercici 195: 217,77 kCal
  14. Exercici 196: Després de fer dues regles de tres simples (persones-recaptació i persones-adults), tenim que per a 12.000 €, assistiran 420 persones; de les quals 300 són adults i 120 són infants
-

## 2.3 Proporcionalitat inversa

**Exercici 197.** Es sap que vint persones tarden 24 dies a fer una caseta. Quant tardaran 5 persones?

**Exercici 198.** Un dipòsit és ple en 12 hores utilitzant una boca d'aigua que expulsa 180 litres d'aigua per minut. Calculeu:

- El temps que tardaria a omplir-se si la boca d'aigua llancés 90 litres per minut
- La quantitat d'aigua per minut que seria necessària que sortís per la boca d'aigua per omplir el dipòsit en 36 hores

**Exercici 199.** Cinc persones tarden 1 hora (60 minuts) a resoldre un puzzle. Quantes hores tardaran set persones?

**Exercici 200.** Sis obrers tarden dues hores en fer una paret. Quant tardaran 4 obrers?

**Exercici 201.** Tres persones són capaces d'escriure un conte en 6 hores. Quant tardaria una sola persona a escriure el mateix conte?

**Exercici 202.** Tenim un dipòsit i 4 aixetes damunt seu que estan totes tancades. Si obrim 3 de les 4 aixetes, tardam 39 minuts. Quant tardaríem en omplir el dipòsit amb les 4 aixetes obertes?

**Exercici 203.** Quatre obrers tarden 3 hores per pintar una paret. (a.) Quantes hores tardaran 6 obrers? (b.) Quants d'obrers fan falta per pintar la paret en 4 hores?

**Exercici 204.** Una colla de 5 amics formen un grup de rock. Volen llogar els instruments i els toca pagar 60 € a cadascun. Ho troben una mica car i demanen la col·laboració d'un altre amic. Quant haurà de pagar ara cadascun?

**Exercici 205.** El professor de Llengua ha donat a fer a 4 alumnes un treball de 60 pàgines en total, fent 15 pàgines cadascun. Si un d'ells s'ha posat malalt i els altres han d'acabar el treball, quantes pàgines de més han de fer cadascun?

**Exercici 206.** Si un cotxe tarda 2h 20 min en arribar al seu destí anant a 80 km/h. Quant tardarà si va a 100 km/h?

**Exercici 207.** Si deu excavadores tarden 30 dies en fer un túnel pel metro de Palma, què tardarien 4 excavadores?

**Exercici 208.** Quatre aixetes tarden 6 hores per omplir un dipòsit. Què tardaran vint-i-dues aixetes? Expressa-ho en minuts.

---

Solucions de “Proporcionalitat inversa”

---

1. Exercici 197: 96 dies
  2. Exercici 198: (a.) 24 h, (b.) 60 l/min.
  3. Exercici 199: 42,85 minuts
  4. Exercici 203: (a.) 2h, (b.) 3 obrers
-

## 2.4 Percentatges

**Exercici 209.** Calculeu els tants per cent següents:

- a. 24% de 90
- b. 79% de 60
- c. 82% de 30
- d. 0,3% de 3590

**Exercici 210.** Anam a una tenda i elegim uns calçons de 20 euros, sense IVA. Què ens costaran els calçons després d'afegir-los l'IVA?

**Exercici 211.** Al banc ens diuen que si demanam una crèdit ens faran un interès del 8%. Si demanàssim 2.000 euros, què hauríem de pagar d'interès? I en total?

**Exercici 212.** A una classe de 80 alumnes, el 35% ha suspès Català. Quants d'alumnes han suspès Català?

**Exercici 213.** De tots els partits que ha jugat, el nostre equip de futbol ha guanyat un 46% del total. Si en total s'han celebrat 50 partits, quants n'ha guanyat?

**Exercici 214.** Anam a una tenda i compram una joia per valor de 110 euros sense IVA (del 21%). (a.) Què ens costaria la joia? (b.) A l'hora de pagar, queiem bé el venedor i ens diu que ens farà un 12% de descompte. Què pagarem finalment?

**Exercici 215.** Dels 250 alumnes d'un centre d'adults, el 32% són homes. D'aquests, el 25% té moto. I d'aquests el 10% té una casa pròpia. Quants homes amb moto i amb pis hi ha al centre d'adults?

**Exercici 216.** Dels 20.500 vots de les eleccions a la batlia només concorren tres partits: *A*, *B* i *C*. El partit *A* ha tret el 35% dels vots vàlids no blancs i el partit *B*, un 29%.

- a. Quin tant per cent ha tret el partit *C*?
- b. Quants vots ha tret cada partit?

**Exercici 217.** A l'hora de pagar un cotxe de 12.000 euros ens apliquen un recàrrec del 21% però ens hi apliquen una bonificació del 14% per ser família nombrosa. (a.) Què ens costarà el cotxe? (b.) Pagariem el mateix si només ens fessin un recàrrec del 2% (sense bonificació)?

**Exercici 218.** En un país, el 12,5% de la població de viu a la seva capital. Si viuen 200.000 persones a la capital, quantes persones té el país?

**Exercici 219.** En una empresa, el departament de personal, el qual té 70 persones, suposa el 28% del total d'empleats de l'empresa. Quants empleats té l'empresa en total?

**Exercici 220.** En una empresa, el 22% de beneficis han estat deguts a vendes. Si l'empresa ha venut per un total de 25.000 €, quins beneficis ha tengut l'empresa?

**Exercici 221.** El 4% del meu temps lliure setmanal me'l pas mirant la televisió. Si veig 2 hores la televisió:

- a. Quant de temps lliure tenc al llarg de la setmana?
- b. Quin tant per cent suposen les hores de temps lliure en relació al total d'hores setmanals?

**Exercici 222.** Aquest any, un 5% de les dones d'Espanya que han donat a llum han tengut tres fills durant el part. (a.) Si suposen 100.000 persones, quantes dones han donat a llum aquest any a Espanya? (b.) Si a Espanya hi ha 20 milions de dones, quin tant per cent suposen les dones que han donat a llum?

**Exercici 223.** Els 28% dels espanyols té carnet de moto. Si a Espanya hi ha 42.000.000 persones, ¿quants espanyols tenen carnet de moto?

**Exercici 224.** A una ciutat, el 40% de la població té cotxe. D'aquests, el 20% té un tot-terreny. I d'aquests un 10% s'ha comprat el cotxe en aquest darrer any. Si a la ciutat hi ha 20.000 persones, quanta gent s'ha comprat un tot-terreny enguany?

**Exercici 225.** A un gimnàs, que té 250 socis, el 20% dels socis van a la classe d'aeròbic, el 30% fan peses i la resta fa *spinning*. Quanta gent hi ha a cada classe?

**Exercici 226.** Dins una empresa que te 280 empleats, hi ha 10 càrrecs directius, 54 vice-directors i la resta és personal administratiu. Quin tant per cent suposa cada grup en el total dels empleats de l'empresa?

**Exercici 227.** Na Marta ens diu que a la cartera té un 2% del que guanya a la setmana. Si dins la cartera té 24 €, què guanya a la setmana? I al mes?

**Exercici 228.** A un *rally*, 4 de 50 cotxes abandonen la carrera. Quin tant per cent suposen els cotxes que han abandonat la carrera respecte del total? I els cotxes que no han abandonat? Si a la carrera participen 250 cotxes, quants cotxes es probable que abandonin?

**Exercici 229.** D'una classe de 30 persones, 18 són homes. Quin percentatge representen els homes respecte del total? I les dones?

**Exercici 230.** En una tenda compram uns calçons de 12 € i ens fan un descompte de 5 €. Quin tant per cent de descompte ens han fet?

**Exercici 231.** Observam un caragol durant tres hores. La primera hora recorre 30 dm, la segona hora només 10 dm i la darrera hora, 40 dm. Quina distància ha recorregut? Calculeu el % que recorre cada hora

**Exercici 232.** Tirant un dau trucat 30 vegades, ha sortit 12 vegades el número cinc. Si decideix apostar al número 5, quin percentatge d'encerts em sortirà?

**Exercici 233.** En la dieta mediterrània consumim diàriament un 55% de glúcids, un 30% de lípids i un 15% de proteïnes. Si cada dia consumim 2500 calories, esbrineu quina quantitat de calories correspon a cada classe.

**Exercici 234.** Decidim fer una excursió escolar. El 20% dels alumnes volen anar al Museu de la Ciència, mentre que el 60% vol anar al Planetari. Si el nombre d'alumnes que vol anar al Planetari és de quinze, quants alumnes volien fer l'altra excursió? Quants d'alumnes hi ha a la classe?

**Exercici 235.** Un teixidor va teixir una peça en quatre dies fent: 6,25 m, 5,70 m, 7m i 8,05 m, respectivament. Quin percentatge de tela va teixir cada dia?

**Exercici 236.** A la meua bústia de correu he trobat cartes dels meus amics i cartes del banc. Si he trobat en total 200 cartes i el 11% eren del banc, quantes cartes d'amics hi havia?

**Exercici 237.** Venen el 72% de les gallines d'una granja i en queden 238. Esbrina quantes n'hi havia abans de la venda i quantes n'han venut

**Exercici 238.** En una empresa de 100 treballadors, hi ha tres categories diferents ( $A$ ,  $B$  i  $C$ ) que cobren respectivament 1050, 870 i 738 euros. Amb el nou any la direcció decideix pujar els sous en 30, 24 i 18 euros respectivament. Quina categoria ha pujat proporcionalment més el sou?

**Exercici 239.** El 62% dels estudiants d'un institut fa Informàtica, el 12% són Teatre i la resta fa Astronomia. Si els que fan Teatre són 230 persones, llavors: (a.) Quants d'estudiants hi ha a l'institut? (b.) Quanta gent fa Astronomia? (c.) Quanta gent fa Informàtica?

**Exercici 240.** D'entre el tant per cent, el tant per u o el tant per mil, ¿què faries servir per expressar més breument que 2 de cada 1240 habitants d'una població són daltònics? Per què?

**Exercici 241.** Calculeu el valor de  $x$  en cada expressió:

- El 25% de  $x$  val 120
- El  $x\%$  de 15.000 és 600
- L' $x$  per 1 de 90 és 72
- L'1.1‰ de  $x$  val 500
- El 0.45 per 1 de  $x$  és 325

**Exercici 242.** En una ciutat la taxa de natalitat va ser un cert any de 4,5 per mil habitants.

- Si aquell any van néixer 225 infants, quants habitants tenia la ciutat?
- Quants infants haurien d'haver nascut si la ciutat tengués 4000 habitants?

**Exercici 243.** ¿Pot passar que tinguem dues classes d'alumnes,  $A$  i  $B$ , tals que:

- a. el percentatge d'alumnes rossos a la classe *A* sigui  $\geq 50\%$
- b. el percentatge d'alumnes rossos a la classe *B* sigui  $\geq 50\%$
- c. però, en canvi, el tant per cent de rossos entre les dues classes sigui  $< 50\%$ ?

Si es possible, poseu-ne un exemple, sinó, justifiqueu la resposta.

**Exercici 244.** Expressau els percentatges següents en forma de fracció:

- a. 70 %
- b. 10 %
- c. 5 %
- d. 2 %

**Exercici 245.** Calculeu:

- a. 3% de 450
- b. 80% de 2.945
- c. 200% de 480
- d. 150% de 300

**Exercici 246.** Completeu aquesta taula (taula 2.1):

%	‰	Tant per u	%	‰	Tant per u
20					0.4
50					1.2
	25		300		
	0,05		0,001		

**Taula 2.1** Percentatges, tants per mil i tants per u

**Exercici 247.** Completeu la taula (taula 2.2):

**Exercici 248.** Una empresa ha d'acomiadar al 40% de la seva plantilla. Si a l'empresa hi ha 200 treballadors, quantes persones quedaran fent feina?

**Exercici 249.** La llet conté un 3% de matèria grassa. En un got de 200 centímetres cúbics, quanta n'hi ha?

**Exercici 250.** El vi d'una bodega conté una mesura del 10% d'alcohol. Quant alcohol hi ha en un got de 250 centímetres cúbics?

	%	‰	Tant per u
3 de cada 7			
0,09 per 1			
39 per mil			

Taula 2.2 Percentatges, tants per mil i tants per u

**Exercici 251.** L'augment de matrícula d'un centre educatiu d'un any respecte del següent ha estat del 20%. Si la matrícula actual és de 1500 alumnes:

- Quina va ser la matrícula el curs passat?
- Si es manté el percentatge d'augment, quina serà la matrícula l'any vinent?

**Exercici 252.** Actualment la població europea la componen aproximadament 500 milions de persones, de les quals 40 milions corresponen a Espanya. A Catalunya viuen uns 6 milions de persones.

- Quin percentatge de la població europea són espanyols, actualment?
- Quin percentatge de la població espanyola viu a Catalunya?
- Quin percentatge de la població europea viu a Catalunya?



---

Solucions de “Percentatges”

---

1. Exercici 209: (a.) 21,6 (b.) 47,4 (c.) 24,6 (d.) 10,77
  2. Exercici 211: (a.) 160 € (b.) 2160 €
  3. Exercici 212: 28 alumnes
  4. Exercici 213: 23 partits
  5. Exercici 215: 2
  6. Exercici 218: 1.600.000 persones
  7. Exercici 219: 250 empleats
  8. Exercici 220: 113636,36 €
  9. Exercici 221: (a.) 50 hores, (b.) 29.76%
  10. Exercici 222: (a.) 2 milions
-

## 2.5 Proporcionalitat composta

**Exercici 253.** En 7 dies, 8 màquines han cavat una síquia de 1400 metres de llarg. Quantes màquines seran necessàries per cavar 300 metres de síquia en 6 dies?

**Exercici 254.** Un equip de 10 treballadors tarda 6 hores a netejar 1300 metres quadrats. Quants metres netejaran 14 treballadors en 18 hores?

**Exercici 255.** La propietària d'una pensió ha pressupostat 250 euros per alimentar els seus 18 hostes durant 12 dies. Si el nombre d'hostes augmenta en 6 persones, per a quants dies li arribarà el pressupost?

**Exercici 256.** Vint obrers han estès 400 metres de cable durant 6 dies treballant 8 hores diàries. Quantes hores diàries hauran de treballar 24 obrers durant 14 dies per estendre 700 metres de cable?

**Exercici 257.** Una colla de 8 amics ha pagat 940 euros per una estada de 3 dies en un hotel. Quant val l'estada d'una persona un dia?

**Exercici 258.** Una barra de metall de 10 m de llarg i 2 cm<sup>2</sup> de secció pesa 8,45 kg. Quant pesarà una barra del mateix material de 5 m de llarg i 7 cm<sup>2</sup> de secció?

**Exercici 259.** En les festes del barri es col·loquen 1200 fanalets que es connecten 8 hores per dia i ocasionen una despesa total de 1440 euros. Quina seria la despesa si es col·locassin 600 fanalets més i es connectassin 2 hores menys?

**Exercici 260.** En una granja de gallines, 600 gallines consumeixen 630kg de pinso durant 7 dies.

- Quants quilos de pinso consumiran 1000 gallines durant 15 dies?
- Quants dies han de passar per a que 500 gallines consumeixin 600 kg?

**Exercici 261.** (La nau espacial) (★) En una nau espacial hi ha cinc astronautes que mengen 20 kg de menjar en 25 dies. Al cap de deu dies, venen 4 astronautes per a rellevar-los (els 5 primers se'n tornen).

- Quant de menjar els queda a aquests 4 nous astronautes?
- Per quants dies els hi bastarà?
- Per tant, acabaran la missió si aquesta és de 25 dies de duració en total?

**Exercici 262.** Quaranta bombetes enceses durant 5 hores han consumit 12 KWh. Quin seria el consum si haguessin estat enceses durant 8 hores? I si fossin 100 bombetes enceses durant 7 hores?

**Exercici 263.** (L'ensaïmada gegant) (★) Es sap que vint persones tarden 10 dies a fer 2 ensaïmades gegants.

### Alerta

Quan resollem un problema de proporcionalitat composta...

*En una granja de gallines, 600 gallines mengen 630 kg de pinso durant 7 dies.*

*Quants quilos de pinso menjaran 1000 gallines en 15 dies?*

- a. Pel mètode de la proporció, hem de posar sempre la columna de la  $x$  a la dreta i hem de trobar la relació de cada magnitud amb la magnitud que conté la  $x$  (mai entre dues columnes que no contenen la  $x$ ):

Gallines	Dies	Quilograms
600	7	630
1000	15	$x$

Com que les relacions gallines-quilograms i gallines-dies són directes, aleshores no girem cap fracció de la proporció:

$$\frac{600}{1000} \cdot \frac{7}{15} = \frac{630}{x}.$$

Pel que  $\frac{42}{150} = \frac{630}{x}$ . Aleshores  $x = \frac{630 \cdot 150}{42} = 2250$ .

- b. Pel mètode d'aplicació successiva de regles de 3, és igual l'ordre de les columnes:

Gallines	Quilograms	Dies
600	630	7
1000	$x = 1050$	7
1000	$x = 2250$	15

En primer lloc, feim una regla de tres (directa) entre les gallines i els quilograms. Posteriorment, en feim una altra directa que relaciona quilograms i dies.

- c. La regla de tres composta es pot veure com troba la funció  $F$  que relacioni  $z = F(x, y)$  amb  $x =$  nombre de gallines,  $y =$  nombre de dies. Es pot veure fàcilment que  $F(x, y)$  en el nostra problema ve donada per la fórmula

$$F(x, y) = \frac{630}{600 \cdot 7}xy,$$

ja que  $F(600, 7) = 630$  i  $z$  depèn linealment tant de  $x$  com de  $y$ .

Cinc persones comencen a fer 2 ensaïmades gegants i quan duen 5 dies, venen 11 persones més a ajudar. Quant tardaran totes juntes a acabar-les?

**Exercici 264.** Cent persones treballant 8 hores diàries tarden 300 dies a construir un vaixell:

- Si augmentàs la plantilla en 20 persones, quants dies s'avançaria en la construcció?
- Si es reduís la plantilla en 20 persones, quants dies es retardaria la construcció?
- I si es reduís en 20 persones però s'augmentassin els torns a 10 hores diàries?

**Exercici 265.** Cinquanta porcs consumeixen 4200 quilos de garroves a la setmana.

- Quin és el consum de garroves per porc i dia?
- Quants quilos de garroves es necessiten per a alimentar a 20 porcs durant 15 dies?
- Durant quants dies podem alimentar a 10 porcs si tenim 600 kg de garroves?

**Exercici 266.** En un taller de confecció, amb 6 màquines teixidores, s'han fabricat 600 jaquetes en 10 dies:

- Quantes peces de roba es fabricarien amb 5 màquines i en 15 dies?
- Quantes màquines s'haurien de posar en producció per a fabricar 750 peces de roba en 15 dies?
- Si es fes feina només amb 5 màquines, ¿quants dies es tardaria en fabricar 750 jaquetes?

**Exercici 267.** Una rentadora industrial, funcionant 8 hores diàries durant 5 dies, ha rentat 1000 kg de roba. Quants quilos de roba rentarà en 12 dies funcionant durant 10 hores diàries?

**Exercici 268.** (La tenda d'estores) Una estora sintètica de 1,80 metres de llarg per 90 cm d'ample ha costat 72 euros. Què costaria una altra estora, de la mateixa qualitat, que tingués 3 metres de llarg i 1,20 m d'ample?

De forma habitual, les tendes d'estores no calculen el preu d'una estora amb una regla de tres composta. Per contra, calculen el cost d'un metre quadrat i multipliquen aquest valor per la seva superfície. Podríeu trobar què val fer un metre quadrat d'una estora d'aquest material? Què valdria en aquest cas l'estora de  $3 \times 1,20$  m? Coincidiran els valors?

**Exercici 269.** Cinc enquestadors recopilen les dades per a un estudi de mercat en 27 dies, treballant 8 hores diàries. Què haguessin tardat per a fer la mateixa feina 9 enquestadors fent feina 10 hores al dia?

**Exercici 270.** Quatre miners obren una galeria de 15 metres de longitud en 9 dies. Quants metres de galeria obririen 6 miners en 15 dies?

**Exercici 271.** Cinc obrers treballant durant 6 hores al dia han cobrat 600 euros en un dia. Què haguessin cobrat 12 obrers treballant durant 4 hores al dia?

**Exercici 272.** En una cadena de muntatge, 17 operaris i 10 peons acoblen 850 cotxes al dia. Si volem que es muntin 1000 unitats, quants peons necessitarem si no podem contractar més operaris?

**Exercici 273.** En un camp de 200 metres de llarg i 80 m d'ample, s'ha recollit una collita de 4.800 kg de blat. Quina quantitat podem esperar recollir en un altre camp que fa 190 m x 90 m?

**Exercici 274.** Dues màquines treballant 7 hores diàries han tardat 15 dies a excavar un pou:

- a. Quant haurien tardat 5 màquines treballant 14 hores al dia?
- b. I 6 màquines treballant 6 hores diàries?

---

Solucions de “Proporcionalitat composta”

---

1. Exercici 253: 2 màquines
  2. Exercici 255: 9 dies
  3. Exercici 256: 5 hores al dia
  4. Exercici 257: 39,16 €
  5. Exercici 254: 5460 metres quadrats
  6. Exercici 258: 14,79 kg
  7. Exercici 259: 1620 €
  8. Exercici 260: (a.) 2250 kg, (b.) 8 dies
  9. Exercici 261: (a.) 12 kg, (b.) Sí
  10. Exercici 265: (a.) 12 kg (b.) 3600 kg (c.) 5 dies
  11. Exercici 266: (a.) 750 jaquetes (b.) 5 màquines (c.) 15 dies
  12. Exercici 267: 3000 kg
  13. Exercici 268: 160 euros
  14. Exercici 269: 12 dies
  15. Exercici 270: 37,5 metres
  16. Exercici 272: 8 hores
  17. Exercici 273: 5130 kg
-

## 2.6 Interès simple i interès compost

**Exercici 275.** Posam 6000 euros al banc a un 6% d'interès simple (a l'any) durant dos anys i mig. Quants d'interessos obtindrem? Quin serà el capital que tendrem?

**Exercici 276.** Quants d'anys hem de tenir al banc 2500 euros a un 2,5% anual simple per a que el capital final sigui vint vegades l'inicial?

**Exercici 277.** L'entitat *Doblers ara* ens deixa 600 euros a un 5% mensual d'interès compost. Ens comprometem a tornar el préstec en 1 any. Què haurem de tornar?

**Exercici 278.** Som propietaris d'un banc. Quin interès mensual compost li hem de fer a un client que ens demana 10 000 euros si volem que ens degui 200 al cap d'un any?

**Exercici 279.** Quant de temps ha de passar per a que els interessos de 2000 euros al 2% d'interès anual superin els 3000 euros?

**Exercici 280.** (★) Si el banc vos deixa 4000 euros al 3% anual amb interès compost durant 3 anys.

- Calculeu quin interès haureu de pagar
- Quin interès *simple* vos haurien d'haver fet per amb el mateix capital, el mateix temps i el mateix interès, per haver de pagar els mateixos interessos?

Nota: El que acabeu de trobar no és res més que el *famós* TAE

**Exercici 281.** Demanam un préstec al banc de 6200 euros al 6% d'interès anual. (a.) Quants doblers haurem de tornar al cap d'un any? (b.) I al cap de 7 anys? (c.) Quins són els interessos mensuals?

**Exercici 282.** Demanam un préstec al banc de 6200 euros al 6% d'interès anual. (a.) Quants doblers haurem de tornar al cap d'un any? (b.) I al cap de 7 anys? (c.) Quins són els interessos mensuals?

## 2.7 Repartiments proporcionals

**Exercici 283.** Na Laura, na Núria i en Pep juguen a la loteria. Aporten, respectivament, 20 euros, 30 euros i 10 euros. Al final toca (!). Els toca un premi de 10 000 euros. Quant toca a cadascú si han acordat repartir-s'ho proporcionalment?

**Exercici 284.** Dos germans en Vicenç i na Coloma obren una llibreta al banc. Cada mes, en Vicenç hi posa 40 euros i na Coloma 80 euros. Al cap d'uns anys tenen a la llibreta 3360 euros. Com els han de repartir? Què li toca a cadascú?

**Exercici 285.** Quatre socis decideixen comprar accions de borsa. Aporten 100, 500, 1000 i 5000 euros respectivament. Després d'un any obtenen uns beneficis de 25000 €. Què obté cadascú?

**Exercici 286.** Tres socis d'una empresa tenen el 10%, el 40% i el 50% del capital de l'empresa. L'empresa quebra i han de pagar un deute de 23.000 euros. Què ha de pagar cadascú?

**Exercici 287.** Tres amics van als Go Karts!. Per problemes monetaris es veuen obligats a llogar un sol cotxe entre els tres. Paguen 2, 3 i 10 euros respectivament. Si sabem que amb 15 euros podem colcar 20 minuts, quants minuts manarà cadascú el cotxe?

**Exercici 288.** Tres amics van a un cibercafé. No tenen doblers per llogar cadascun un ordinador, per tant, decideixen llogar-ne un entre els tres. Es treuen tot el que tenen a les butxaques i aporten: 1,20 €, 2,50 € i 80 cèntims. Si sabem que una hora de connexió costa 6 €, quants minuts utilitzarà l'ordinador cadascú?

**Exercici 289.** Tres socis d'un negoci aporten 30.000, 20.000 i 10.000 euros per comprar accions d'una companyia. Si per 10 euros invertits ens donen 35 accions, quantes accions rebrà cada soci?

**Exercici 290.** (★) El cost de la matrícula en una acadèmia de música és menor com més notables s'han aconseguit en el curs anterior. Tres amics, en Pere, na Sara i n'Elionor, han tret 2, 3 i 5 notables, respectivament, i entre els tres han pagat 310 €. Quant els hi ha costat la matrícula a cadascun?

**Exercici 291.** El professor d'Anglès demana traduir 59 pàgines d'una novel·la a tres alumnes de manera que tradueixi més el que menys positius tengui. Si el primer alumne té 2 positius, el segon, 5 i el tercer, 7, ¿quantes pàgines ha de traduir cada un d'ells?

**Exercici 292.** Un padrí deixa als seus tres néts la seva herència, que és de 120.000 €, però decideix que qui tengui més poc capital al moment de la seva mort se n'endurà més doblers, i qui tengui més capital, se n'endurà més poc (per a així afavorir els més pobres). En el moment de la seva mort, els capitals dels tres néts són de 1.000, 2.000 i 10.000 euros. Què rebrà cada nét?

**Exercici 293.** En Lluís i en Marc compren una butlleta de loteria de 20 euros. En Lluís aporta 15 euros i en Marc 5 euros. Al final, els toquen 10.000 €. Si es volen repartir el premi proporcionalment (qui més ha aportat, més s'emporta), què li tocarà a cadascun?



**Exercici 294.** Tres socis d'una empresa tenen el 20%, 30% i el 50% del capital de l'empresa. L'empresa quebra, i han de pagar un deute de 20.300 euros. Què ha de pagar cadascú?

**Exercici 295.** En Víctor, n'Esteva i en Joan es compren una butlleta de loteria de 20 euros. Aporten, respectivament, 15, 3 i 2 euros. I toca!. El premi és de 3000 euros. Es volen repartir el premi proporcionalment al nombre d'euros aportats. Quant li toca a cadascun?

**Exercici 296.** Tres persones compren un dècim de Nadal, de 20 euros. Hi aporten respectivament 3 euros, 5 euros i 12 euros. Al final encerten i reben un premi de 200.000 €. Com es repartiran el premi?

---

Solucions de “Repartiments proporcionals”

---

1. Exercici 284: 1120 i 2240 respectivament
  2. Exercici 285: (a.) 378,78 € (b.) 1893,93 € (c.) 3787,87€ (d.) 18939,39 €
-

## 2.8 Mesclats

**Exercici 297.** En Carles té una feina on li paguen per hores. Per 3 hores de feina ha cobrat 18 euros:

- Quant cobrarà si treballa 7 hores?
- La setmana passada va cobrar 45 euros. Quantes hores va treballar?

**Exercici 298.** Cinc viatjants arriben a un refugi de muntanya, on hi ha un cartell que posa “El menjar que hi ha basta per 7 viatjants i 4 setmanes”. Fins quant de temps es poden quedar al refugi?

**Exercici 299.** En un quiosc, sabem que 5 caramels costen 5,75 euros. (a.) Si volem endur-nos-en 160 caramels, quant ens costaran? (b.) Si només tenguéssim 5 euros, quants caramels ens hem podríem dur?

**Exercici 300.** Segons les estadístiques 2 de cada 5 persones tenen càries. Si són 360 les persones enquestades, quantes tenen càries?

**Exercici 301.** Durant l'estiu dues-centes persones consumeixen 500 litres d'aigua per dia. Quants litres consumiran 60 persones?

**Exercici 302.** Pintar 50 m<sup>2</sup> de paret costa 500 euros. Quant costa pintar 420 m<sup>2</sup>? Quants metres podem pintar si només tenim 264 euros?

**Exercici 303.** La tripulació d'un vaixell menja 250 kg en un mes. Quants quilograms menjaran en 80 dies? Si només disposen de 100 kg de menjar quantes persones podrien viatjar al vaixell durant un mes?

**Exercici 304.** Tres retoladors costen 4,80. Quant costen 5 retoladors?

**Exercici 305.** Si cada dues hores plou 70 litres, quant haurà plogut en tot el dia?

**Exercici 306.** Un tren que circula a 100 km/h tarda 5 hores a arribar a una ciutat. A quina velocitat circula un altre tren que tarda 6 hores i quart a fer el mateix recorregut?

**Exercici 307.** Si un pintor ha pintat 75 m<sup>2</sup> de paret amb 126 kg de pintura:

- Quanta pintura hauria necessitat per pintar 300 m<sup>2</sup> de paret?
- Amb 50 kg, quina superfície de paret pot pintar?

**Exercici 308.** Un constructor vol repartir 1000 € entre tres dels seus empleats de manera directament proporcional a l'antiguitat a l'empresa. L'empleat A fa 9 anys que fa feina a l'empresa, i els empleats B i C, en fa 3 anys. Quina part li correspon a cadascú?

**Exercici 309.** Dues màquines funcionant 6 hores diàries consumeixen 1500 KWh en un dia. Quant consumirien 3 màquines funcionant 8 hores diàries?

**Exercici 310.** En una pastisseria, sabem que 5 pastissos costen 15,55 euros. (a.) Si volem endur-nos-en 80 pastissos, quant ens costaran? (b.) Si només tenguéssim 25 euros, quants pastissos ens podríem endur?

**Exercici 311.** A la fruiteria del cap de cantó hi ha 10 taronges per a cada 4 plàtans. Quantes taronges hi hauria en 100 plàtans?

**Exercici 312.** Es creu que per construir la piràmide de Keops hi varen fer feina 20.000 persones durant 10 hores diàries i varen tardar 20 anys a acabar-la. Què haguessin tardat si, amb el mateix ritme de treball, haguessin fet feina 10.000 persones més fent feina 8 hores diàries?

**Exercici 313.** Un 5 % d'alumnes tenen la grip al gener. Quants alumnes tendran la grip a una classe de 70 persones?

**Exercici 314.** A un institut, 63 alumnes, que són el 15 % del total, duen ulleres. Quants d'alumnes té l'institut?

**Exercici 315.** En encalentir una barra de metall d'1 m a 200°C, aquesta s'ha dilatada fins a mesurar 1,04 metres. Una barra de 60 cm d'un altre metall, en encalentir-la a la mateixa temperatura, s'ha dilatada fins a fer 61,9 cm. Quin metall s'ha dilatada menys en proporció?

**Exercici 316.** En Jaume posa els seus estalvis a un dipòsit al 3,5 % a 10 anys.

- a. Si disposa de 10.500 €, quin interès li hauran fet aquests doblers al final del període?
- b. Si decidís treure els diners abans d'hora, li cobrarien una comissió del 4% respecte del capital inicial. Al cap de 4 anys, necessita treure els diners. Perdrà o guanyarà doblers?

**Exercici 317.** Quatre persones tarden vint minuts a pintar una paret. Quant minuts tardaran deu persones?

**Exercici 318.** Si dotze pitreres de pollastre valen 4,90 euros:

- a. Què valdran 26 pitreres?
- b. Quantes pitreres podem comprar amb 50 euros?

**Exercici 319.** Si amb 7 litres de gasoil puc fer 250 km, quants quilòmetres podré fer amb 10 litres? Quants litres de gasoil consumirà aquest cotxe si feim un recorregut de 789 km?

**Exercici 320.** Si tardem 1 hora i 20 minuts per anar del punt *A* al punt *B* a una velocitat constant de 80 km/h. A quant hauré d'anar per només tardar 50 minuts?

**Exercici 321.** Tres socis aporten 10.000, 20.000 i 50.000 euros respectivament per crear una empresa. Al llarg de l'any, l'empresa té uns beneficis de 200.000 euros. Què li toca a cadascú?

**Exercici 322.** Quatre amics van a comprar-se gominoles. Aporten respectivament 1, 5, 7 i 11 euros. Si 12 gominoles costen 2,5 euros, quantes gominoles li toca a cadascú?

**Exercici 323.** Set persones tarden 20 minuts a pintar  $4 \text{ m}^2$  de paret. Què tardaran 8 persones per pintar  $10 \text{ m}^2$  de paret? Quantes persones necessitarem per pintar  $100 \text{ m}^2$  de paret en 2 hores?

**Exercici 324.** En la compra d'un abric de 80 euros, ens fan un descompte del 25%. I després ens afegeixen l'IVA. Què pagarem finalment?

**Exercici 325.** Quatre obrers han fet 8 marjades de pedra treballant durant 8 hores al dia. Quantes hores diàries haurien de treballar 6 obrers per fer-ne 10?

**Exercici 326.** En un grup de 80 persones, 24 persones són dones. Quin tant per cent suposen les dones sobre el total del grup?

**Exercici 327.** El 80% dels empleats d'una empresa són no fumadors. Si els no fumadors de l'empresa són en total 200, quants empleats hi ha a l'empresa (entre fumadors i no fumadors)?

**Exercici 328.** El professor de Català demana a tres alumnes fer un treball d'en Pompeu Fabra de 80 pàgines de manera que faci menys pàgines de treball aquell que tenguí una nota major a l'anterior examen. Si les notes de l'anterior examen han estat de: 4, 6 i 8 punts, quantes pàgines li toca fer a cadascú?

**Exercici 329.** A les darreres eleccions, el 40% de les persones votà el partit *A*, el 20% el partit *B* i la resta el partit *C*. Quantes persones votaran cada partit si en total hi ha haver 40.000 vots?

**Exercici 330.** En un grup de joves matemàtics sabem que:

- a. El 25% del grup són homes
- b. El 40% del grup és de menys de 22 anys

Si hi ha 200 dones en aquest grup, troba:

- a. quants homes hi ha al grup
- b. quants menors de 22 anys hi ha al grup
- c. quina quantitat de persones hi ha al grup

**Exercici 331.** Tenim un dipòsit i 4 aixetes damunt seu que estan totes tancades. Si obrim 3 de les 4 aixetes, el dipòsit tarda 39 minuts a omplir-se. Quant tardaria a omplir-se si tenguéssim obertes 2 aixetes?

**Exercici 332.** Tres amics aporten 10, 25 i 80 euros per fer una travessa. Si els toquen 25000 euros, què li toca a cadascú?

**Exercici 333.** Tardem 25 minuts a anar a la feina, anant a  $6 \text{ km/h}$ . Si volem arribar amb només 10 minuts, a quants quilòmetres per hora hem d'anar?

**Exercici 334.** Necessitem 4 metres de tela per fer una cortina. Si 2,5 m de tela costen 48 euros, quant haurem de pagar per la tela?

**Exercici 335.** Tres socis compren 250, 400 i 5050 accions d'una companyia. Al cap d'un any, aquesta reparteix dividends de 12 euros per cada 25 accions. Què guanya cada accionista?

**Exercici 336.** Quinze persones fan el muntatge d'uns plafons solars en tres setmanes.

- Quant tardarien 35 persones a fer aquest mateix muntatge?
- Si volem muntar-lo en només 15 dies, quantes persones necessitarem?

**Exercici 337.** En una pastisseria, sabem que 5 pastissos costen 15,55 euros.

- Si volem endur-nos-en 80 pastissos, quant ens costaran?
- Si només tenguéssim 25 euros, quants pastissos ens podríem endur?

**Exercici 338.** Tres amics van al Go Karts!. Per problemes monetaris es veuen obligats a llogar un sol cotxe entre els tres. Paguen 2, 3 i 10 euros respectivament. Si sabem que amb 15 euros poden colcar 20 minuts, quants minuts manarà cadascú el cotxe?

**Exercici 339.** Tres excavadores tarden quatre setmanes en fer un clot.

- Quants dies tardaran dues excavadores?
- Si volem fer el clot només en 10 dies, quantes excavadores hem de menester?

**Exercici 340.** En una quiosc, sabem que 5 caramels costen 5,75 euros.

- Si volem endur-nos-en 80 caramels, quant ens costaran?
- Si només tenguéssim 5 euros, quants caramels ens podríem endur?

**Exercici 341.** Tres amics van a un cibercafé. No tenen doblers per llogar cadascú un ordinador, per tant decideixen llogar-ne un entre els tres. Es treuen tot el que tenen a les butxaques i aporten: 1,20 euros, 2,50 euros i 80 cèntims. Si sabem que una hora de connexió costa 6 euros, quants minuts utilitzarà l'ordinador cadascú?

**Exercici 342.** Un tren que va a 80 km/h tarda 40 minuts en arribar al seu destí

- Quants minuts tardaria si anàs a 50 km/h?
- Si volguéssim arribar només en 15 minuts, a quants quilòmetres per hora hauria d'anar el tren?

**Exercici 343.** En Jaume ha cobrat 200 € per 25 hores de feina. Quant cobrarà na Marta que ha fet 30 hores de feina?

**Exercici 344.** Al Congrés dels diputats, que té 350 escons, hi havia l'any 2008<sup>1</sup>: 169 diputats del PSOE, 154 diputats del PP i la resta d'altres grups. Quin tant per cent d'escons té cada partit polític a la Cambra?

<sup>1</sup> Font: [ca.wikipedia.org/Eleccions generals espanyoles de 2008](http://ca.wikipedia.org/Eleccions_generals_espanyoles_de_2008)

**Exercici 345.** En cada cas, digues quina relació hi ha entre les dues magnituds:

- La longitud del costat d'un quadrat i el seu perímetre
- En nombre de gallines en una granja i els quilograms de pinso que mengen
- La velocitat a que va un cotxe i el temps que tarda per anar del punt *A* al punt *B*

**Exercici 346.** Dos germans en Vicenç i na Coloma, obren una llibreta al banc. Cada mes, en Vicenç hi posa 40 euros i na Coloma 80 euros. Al cap d'alguns anys, tenen a la llibreta 3360 euros. Com els han de repartir? Què li toca a cadascun?

**Exercici 347.** Quatre socis decideixen comprar accions de borsa. Aporten 100, 500, 1000 i 5000 euros, respectivament. Després d'un any, obtenen uns beneficis de 25 000 euros. Què obté cadascú?

**Exercici 348.** El 28% dels espanyols té carnet de moto. Si a Espanya hi ha 40 000 000 persones, ¿quants espanyols tenen carnet de moto?

**Exercici 349.** A una ciutat, el 40% de la població té cotxe. D'aquests, el 20% té un tot-terreny. I d'aquests un 10% s'ha comprat el cotxe en aquest darrer any. Si a la ciutat hi ha 20000 persones, quanta gent s'ha comprat un tot-terreny aquest darrer any?

**Exercici 350.** A un gimnàs, que té 250 socis, el 20% del socis van a la classe d'aeròbic, el 30% fan peses i la resta fan spinning. Quanta gent hi ha a cada classe?

**Exercici 351.** Dins una empresa que té 280 empleats, hi ha 10 càrrecs directius, 54 vice-directors, i la resta és personal administratiu. Quin tant per cent suposa cada grup en el total dels empleats de l'empresa?

**Exercici 352.** A l'Estat espanyol hi havia l'any 2008, 15.683.433 de dones fèrtils<sup>2</sup>. Si suposem que el 40% d'aquestes va tenir un o més fills, i d'aquestes, un 10% va tenir un part múltiple. I d'aquestes, un 1% va tenir més de 4 fills. Quantes dones varen tenir més de 4 fills a Espanya l'any 2008?

---

<sup>2</sup> Font: [en.wikipedia.org/Demographics of Spain](https://en.wikipedia.org/Demographics_of_Spain), prenent com a dones fèrtils aquelles les edats de les quals estan compreses entre 16 i 64 anys.

---

Solucions de “Mesclats”

---

1. Exercici 297: (a.) 42 € (b.) 7.5 h
  2. Exercici 306: 80 km/h
  3. Exercici 308: 200 €, 200 € i 600 €.
  4. Exercici 334: 76,80 €
  5. Exercici 336: (a.) 9 dies, (b.) 21 persones
  6. Exercici 346: 2240 € a na Coloma, i 1120 € a en Vicenç
  7. Exercici 347: (a.) 378,78 €, (b.) 1893,93 €, (c.) 3787,87 €, (d.) 18939,39 €
-

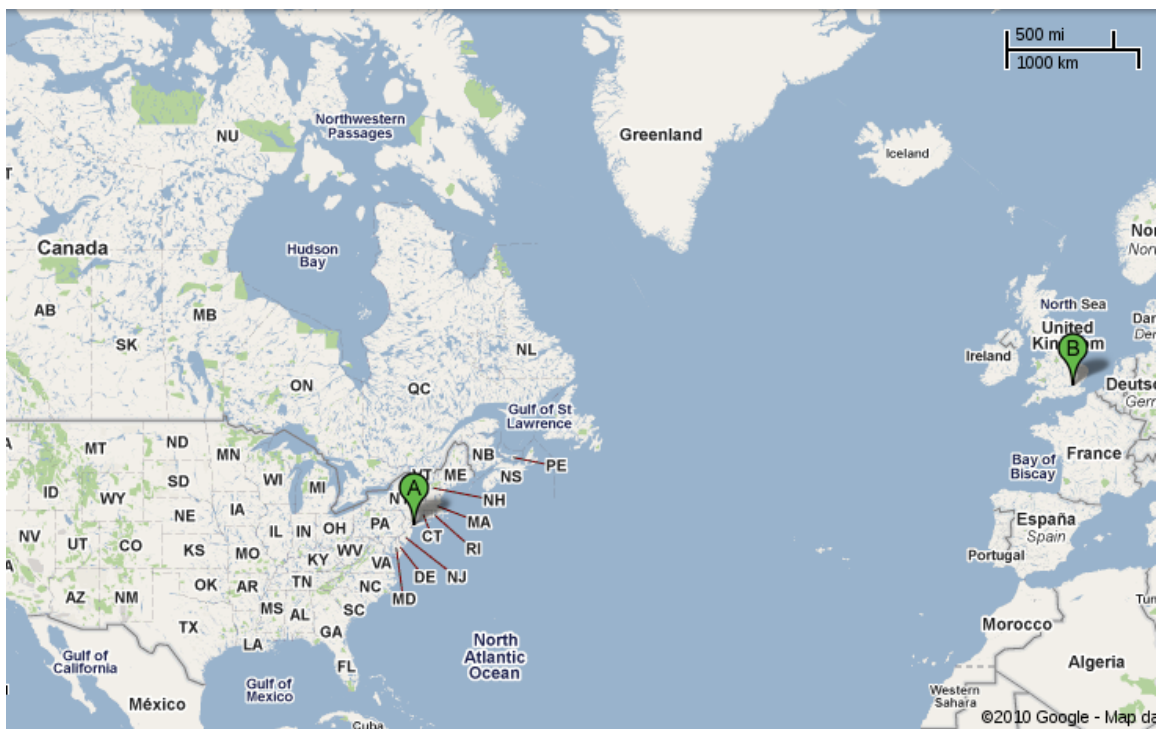


# 3

## PROPORCIONALITAT GEOMÈTRICA

### Fitxa 0. Introducció

Exercici 353.



Quina distància hi ha entre Londres i Nova York?

Exercici 354.



Quin país és més gran: Algèria o Aràbia Saudí?

## Solució

1. En primer lloc, *quadrangularitzem* els països:

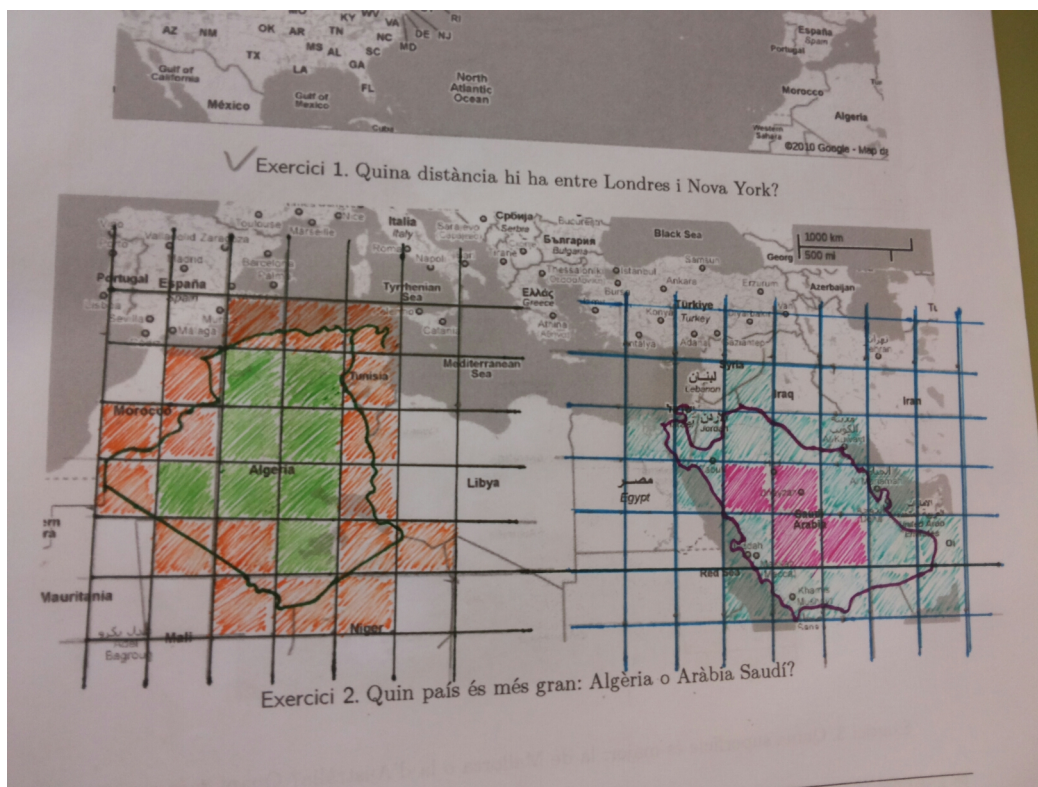


Figura 3.1 Després de quadrangularitzar els països (cortesia de Judith Banda - 2014).

2. I comptem el nombre de quadrats:

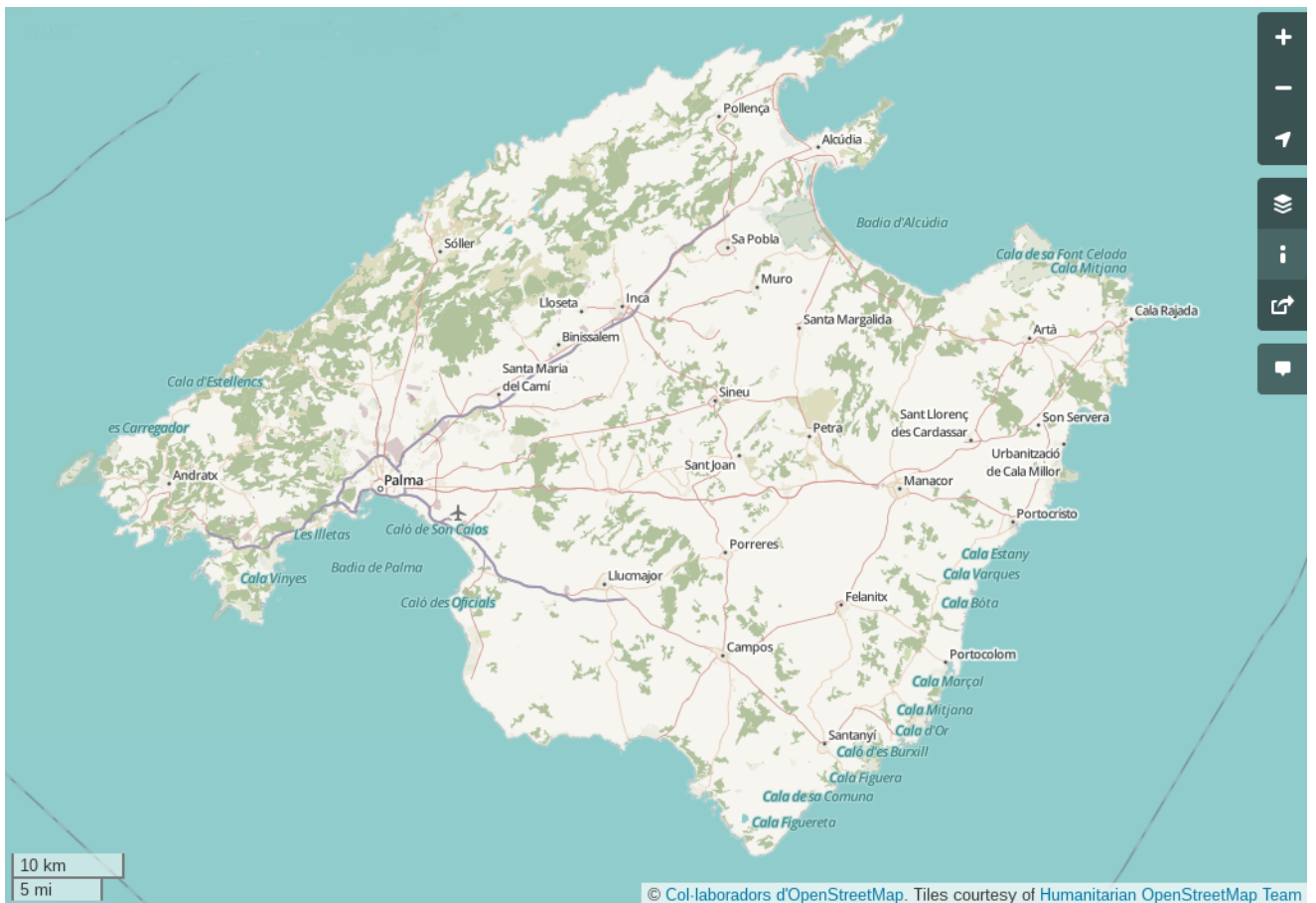
País	Quadres interiors	Quadres exteriors	Quadres totals
Algèria	8	17	25
Aràbia Saudí	4	17	21

Els quadrats interiors ens proporcionen l'àrea mínima del país, mentre que el nombre de quadrats totals representen l'àrea màxima del país.

3. Amb una regla de tres, amb l'escala, tenim que cada quadrat té una àrea *real* de  $400 \text{ km} \times 400 \text{ km} = 16.000 \text{ km}^2$ .
4. Per tant, l'àrea màxima i mínima de cada país és:

País	Àrea mínima	Àrea màxima
Algèria	$8 \cdot 16.000$	$25 \cdot 16.000$
Aràbia Saudí	$4 \cdot 16.000$	$21 \cdot 16.000$

Exercici 355. Quina superfície és major: la de Mallorca o la d'Austràlia? Quant més gran?



## Solució

En primer lloc, quadrangularitzem el mapa de Mallorca i marquem en diferents colors els quadres que tenen només una part a Mallorca i els que estan continguts completament dins Mallorca (figura 3.2), és dir, els quadres interiors i exteriors.

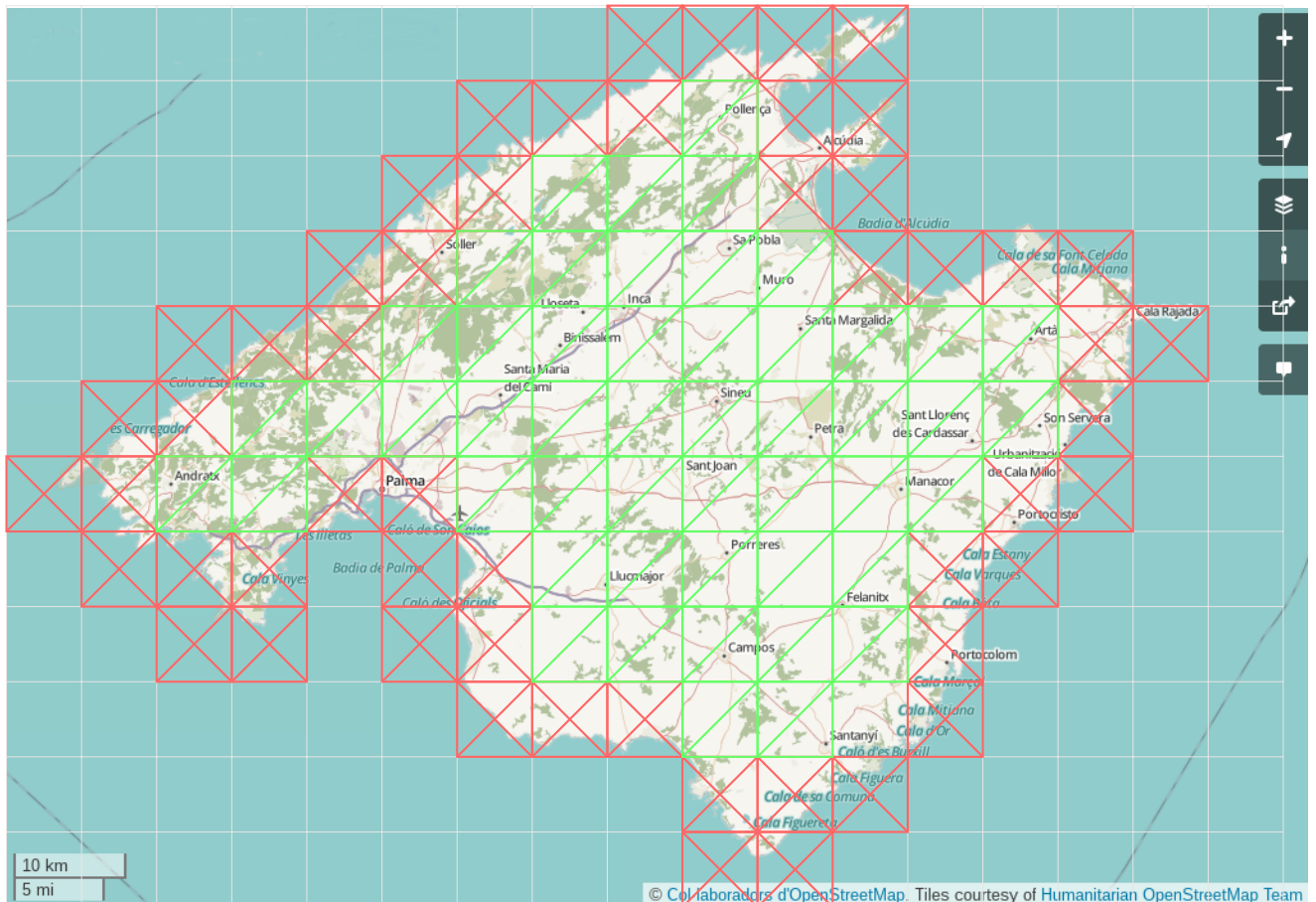


Figura 3.2 Mallorca quadrangularitzada

Per tant, tenim que:

- El nombre de quadres interiors és igual a 50
- El nombre de quadres exteriors és igual a 54
- Per tant, el nombre de quadres total és 104
- L'escala ens proporciona la informació de què 1,5 cm al mapa corresponen a 10 km a la realitat. Per tant, cada quadre dibuixat al mapa (que medeix 1 cm  $\times$  1 cm) correspon a un quadrat de 6,66 km  $\times$  6,66 km a la realitat, és a dir, un quadrat de 44,44 km<sup>2</sup> d'àrea aproximadament.
- D'aquesta manera, l'àrea mínima és de  $54 \cdot 44,44 \text{ km}^2 = 2.399,76 \text{ km}^2$  i l'àrea màxima és igual a  $104 \cdot 44,44 \text{ km}^2 = 4.621,76 \text{ km}^2$ .

De la mateixa manera, podem procedir amb el mapa d'Austràlia (figura 3.3).

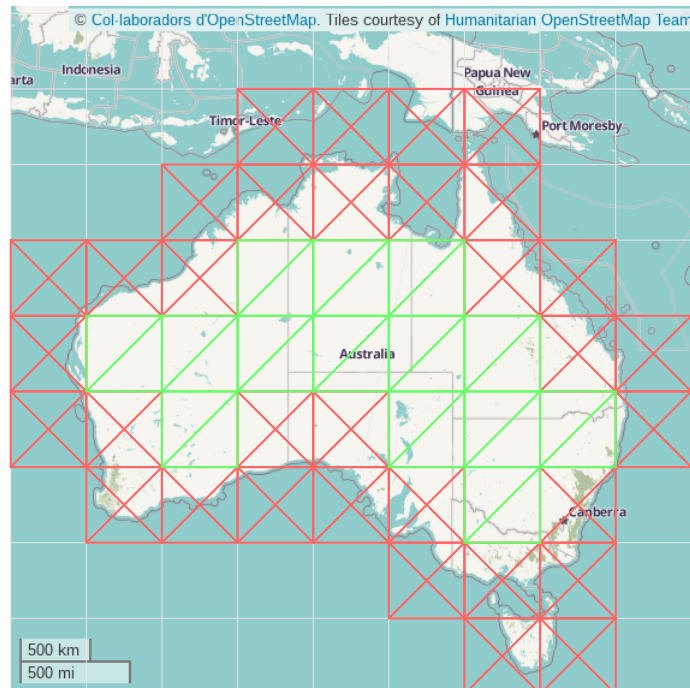


Figura 3.3 Austràlia quadrangularitzada

Per tant, tenim que:

- El nombre de quadres interiors és igual a 50
- El nombre de quadres exteriors és igual a 14
- Per tant, el nombre de quadres total és 64
- L'escala ens diu que 1,4 cm al mapa corresponen a 500 km a la realitat. Per tant, cada quadre dibuixat al mapa (que medeix  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ ) correspon a un quadrat de  $357,14\text{ km} \times 357,14\text{ km}$  a la realitat, és a dir, un quadrat de  $127.548,98\text{ km}^2$  d'àrea aproximadament.
- D'aquesta manera, l'àrea mínima és de  $50 \cdot 127.548,98\text{ km}^2 = 6.377.449\text{ km}^2$  i l'àrea màxima és igual a  $64 \cdot 127.548,98\text{ km}^2 = 8.163.134,72\text{ km}^2$ .

I finalment, hem de comparar els dos països. Per a comparar dues magnituds normalment es divideix la major entre la menor i s'obté quantes vegades és més gran l'objecte major que l'objecte menor. Per tant, en el nostre cas, hauríem de dividir l'àrea d'Austràlia entre l'àrea de Mallorca per a saber quantes vegades és més gran Austràlia que Mallorca, és a dir, quantes *Mallorques* caben dins Austràlia.

Ara bé, tenim una estimació de les àrees per defecte i per excés. Quina prenem? Per saber-ho, observem aquest problema:

**Exemple 2.** Es vol repartir els doblers d'una bossa entre els assistents a una festa. Es sap que hi ha entre 500 i 10.000 € dins la bossa, i que hi ha entre 100 i 200 persones. Què toca a cadascun?

Per resoldre aquest problema, està clar que volem saber què ens tocarà com a mínim i com a màxim:

- La quantitat màxima que ens pot tocar seria si tenim la sort que a la bossa hi ha el màxim de doblers i som el menor nombre de persones. Per tant, com a màxim ens podria tocar:  $10.000/100 = 100\text{€}$

- D'altra banda, el mínim que ens pot tocar correspondria a la *desgràcia* que fóssim el màxim nombre de persones a la festa, és a dir, 200, i hi hagués el mínim de doblers a la bossa. Per tant, ens podria tocar com a mínim  $500/200 = 2,5\text{€}$

En resum, hem dividit el màxim d'una quantitat entre el mínim de l'altre i vice-versa, i no el mínim entre el mínim i el màxim entre el màxim, com algunes persones podrien pensar.

En el nostre cas, hem de procedir de manera anàloga:

- $8.163.134,72/2.399,76 = 3.401,64$
- $6.377.449/4.621,76 = 1.379,87$

És a dir, Austràlia és *com a màxim* 3.401,64 vegades més gran que Mallorca. I Austràlia és *com a mínim* 1.379,87 vegades més gran que Mallorca. De forma compacte, podríem dir que Austràlia és entre 1379 i 3402 vegades major que Mallorca.

## Què hem après?

- Un mapa és una representació de la realitat a un pla de manera que les formes es preserven, és a dir, no es distorsionen els angles de la realitat quan aquests es representen al mapa.
- L'*escala gràfica* indica la correspondència que hi ha entre els objectes representats en el mapa i els objectes reals. Per exemple, aquesta escala:



indica que 500 quilòmetres a la realitat corresponen a 5 centímetres al mapa (el que mesura aquest segment).

- Es poden fer diferents estimacions de l'àrea total d'un país *quadrangularitzant* la seva superfície. Depenent de si prenem els quadrats que estan completament dins la superfície d'un país o si prenem els qui contenen algun punt d'aquest país, obtindrem l'*àrea mínima* i l'*àrea màxima* d'aquest país. Aquestes estimacions es poden fer més fines, més precises, fent els quadrats més petits.
- Es podrien fer estimacions *tesselant* el mapa mitjançant altres figures, per exemple triangles en comptes de quadrats, i els resultats serien anàlegs. La forma de la figura es diu la *base* de la tesselació. En el nostre cas, la base és un quadrat.
- A mesura que feim la base de la tesselació més fina (és a dir, els quadrats, els triangles, etc.), les dues aproximacions de l'àrea convergeixen a un mateix valor, el valor real de l'àrea.



## Fitxa 1. Ús d'escala gràfica

Exercici 356. A partir d'aquest plànol:

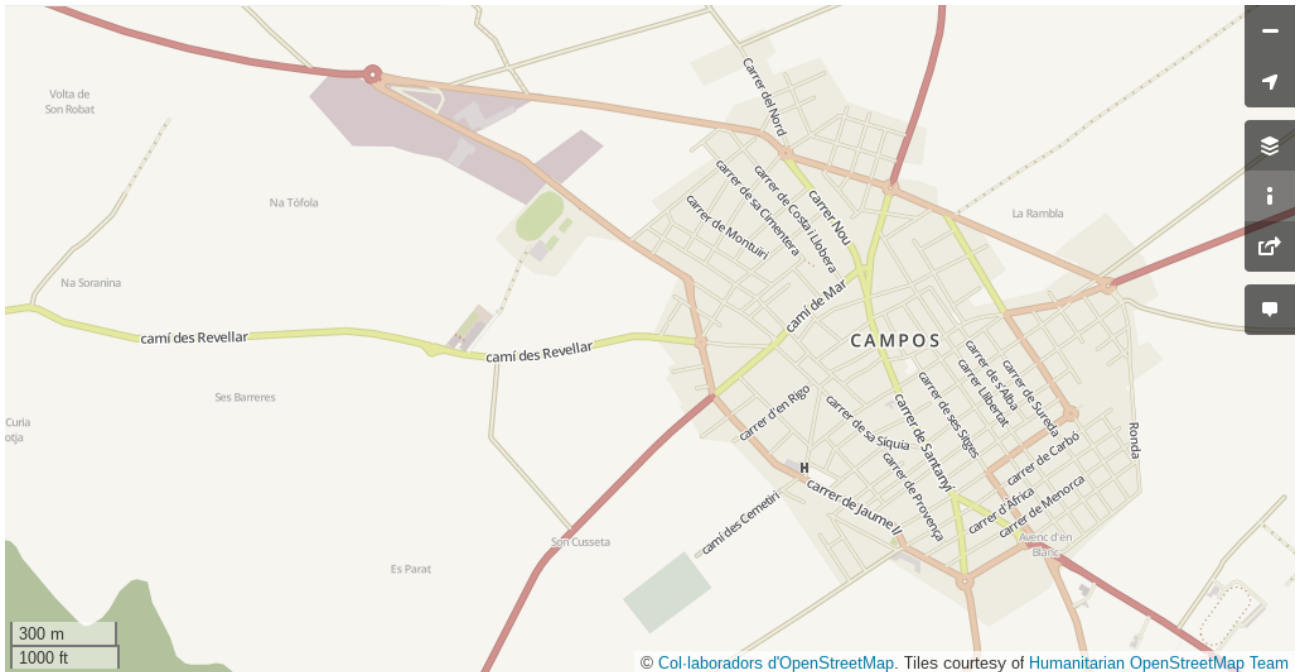


Figura 3.4 Plànol de Campos

a. Marqueu en el mapa:

- |                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| A) el vostre domicili propi | D) el centre geomètric del poble   |
| B) el centre de salut       | E) un punt a la frontera del poble |
| C) el poliesportiu          | F) el cementiri municipal          |

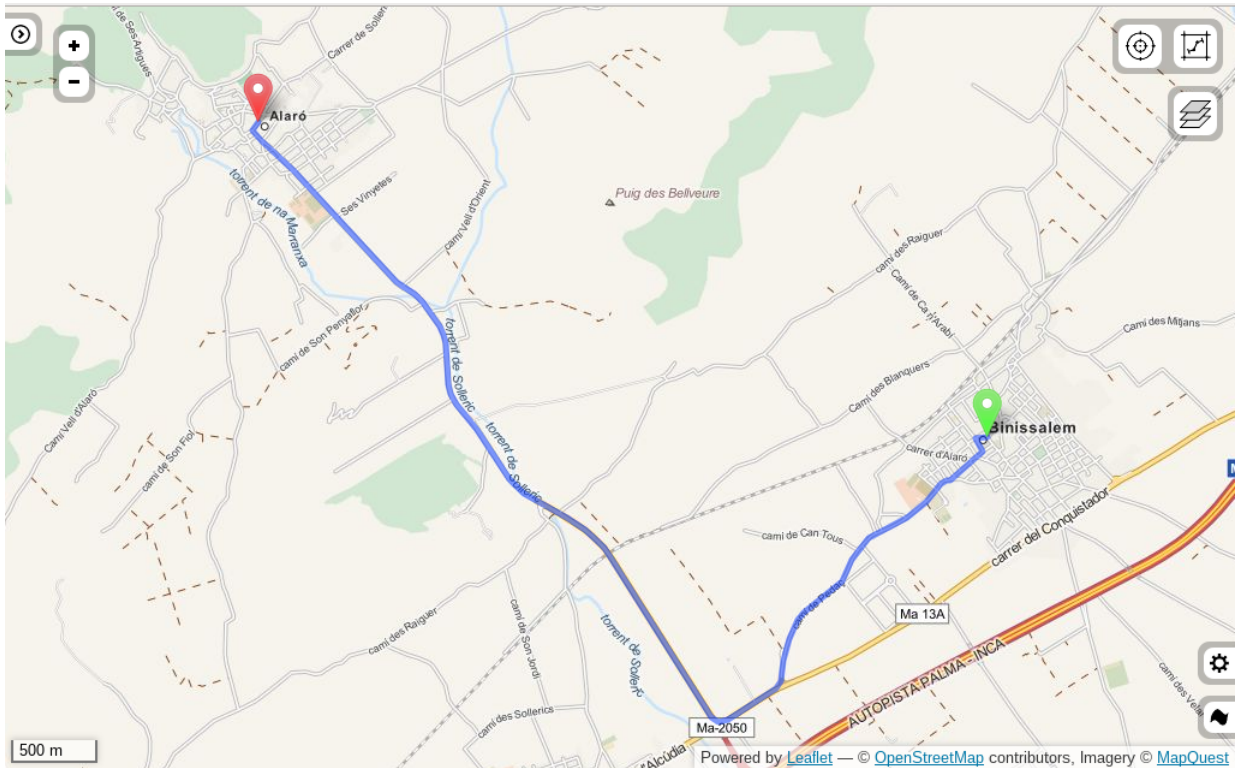
b. Per a cadascun dels punts anteriors, amb l'ajuda d'un regle, trobeu *quina distància* (en metres) hi ha al CEPA Sud.

PUNT	DISTÀNCIA AL MAPA (CM)	DISTÀNCIA REAL (METRES)
_____ ⇒	_____ ⇒	_____
_____ ⇒	_____ ⇒	_____
_____ ⇒	_____ ⇒	_____
_____ ⇒	_____ ⇒	_____
_____ ⇒	_____ ⇒	_____
_____ ⇒	_____ ⇒	_____

c. Quin *temps* tardarem, aproximadament, des de cadascun dels punts anteriors per arribar al centre d'adults?



Exercici 358. Observeu el mapa:



a. Completeu:

TRAJECTE	DISTÀNCIA AL MAPA (CM)	DISTÀNCIA REAL (KM)
Binissalem-Alaró ⇒	_____ ⇒	_____
Consell-Binissalem ⇒	_____ ⇒	_____
Consell-Alaró ⇒	_____ ⇒	_____
Binissalem-Inca ⇒	_____ ⇒	_____

b. Què gastaríeu de benzina amb una moto que consumeix 5 litres cada 100 quilòmetres?

TRAJECTE	DISTÀNCIA REAL (KM)	CONSUM (L)
Binissalem-Alaró ⇒	_____ ⇒	_____
Consell-Binissalem ⇒	_____ ⇒	_____
Consell-Alaró ⇒	_____ ⇒	_____
Binissalem-Inca ⇒	_____ ⇒	_____

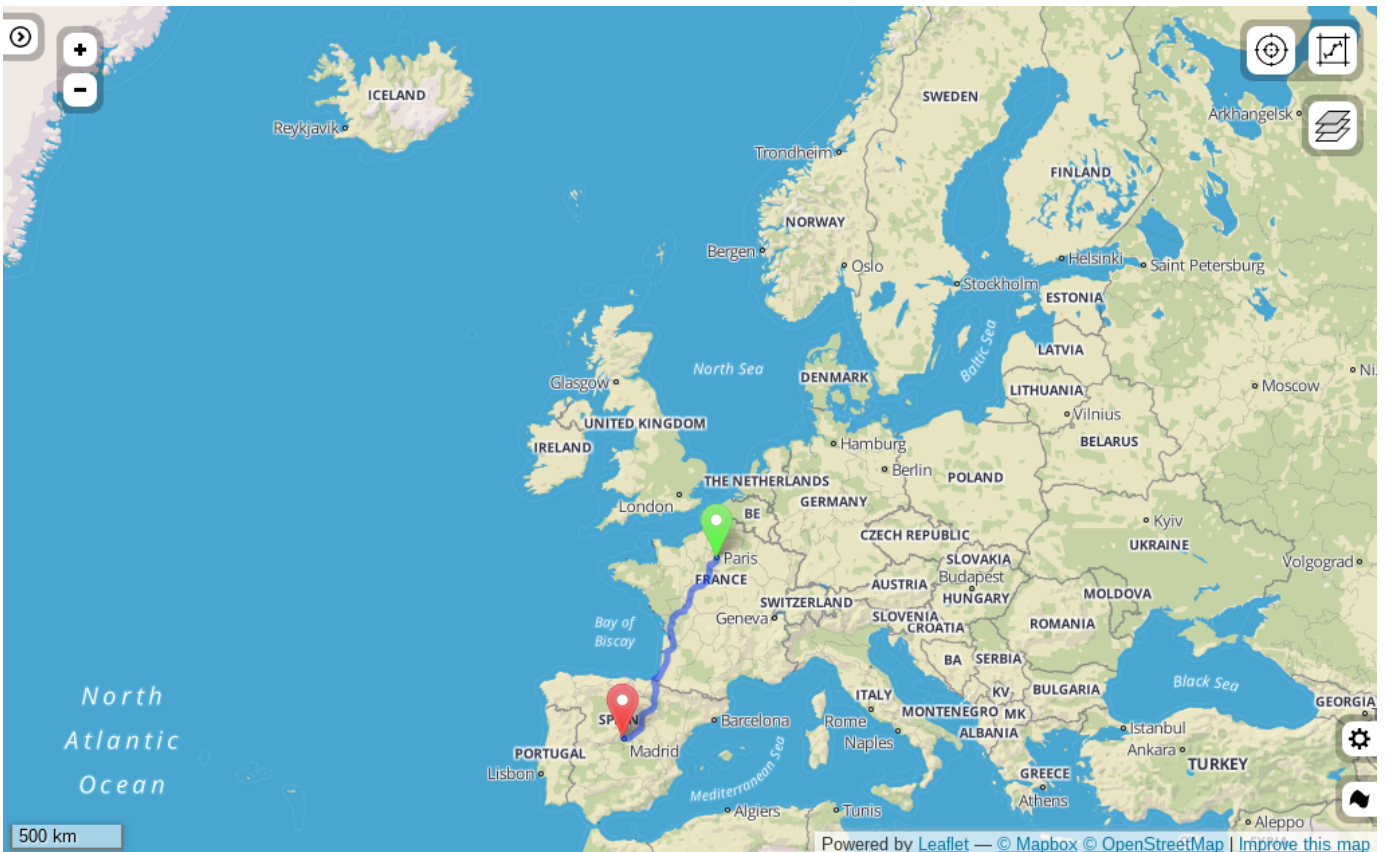
c. Què tardaríeu en fer cada destí? Podeu suposar que sempre anau a la mateixa velocitat

TRAJECTE	DISTÀNCIA REAL (KM)	TEMPS (MIN)
Binissalem-Alaró ⇒	_____ ⇒	_____
Consell-Binissalem ⇒	_____ ⇒	_____
Consell-Alaró ⇒	_____ ⇒	_____
Binissalem-Inca ⇒	_____ ⇒	_____

Exercici 359. Volem anar de viatge. Anam a l'agència de viatges i ens diuen que hi ha una oferta:

**Viatge per quilòmetres**

Mínim 4000 km  
Màxim 8000 km  
1 € = 10 km  
Obligatori fer el trajecte Madrid-París



- Trieu un viatge dins aquests paràmetres
- Què vos costarà el viatge?

Exercici 360. (Mare Serenitatis) El *mar de la serenitat* (figura 3.5) és un antic mar de la Lluna [1] (figura 3.6). Forma part de la *cara de l'home de la Lluna*. Podeu calcular quina superfície té?

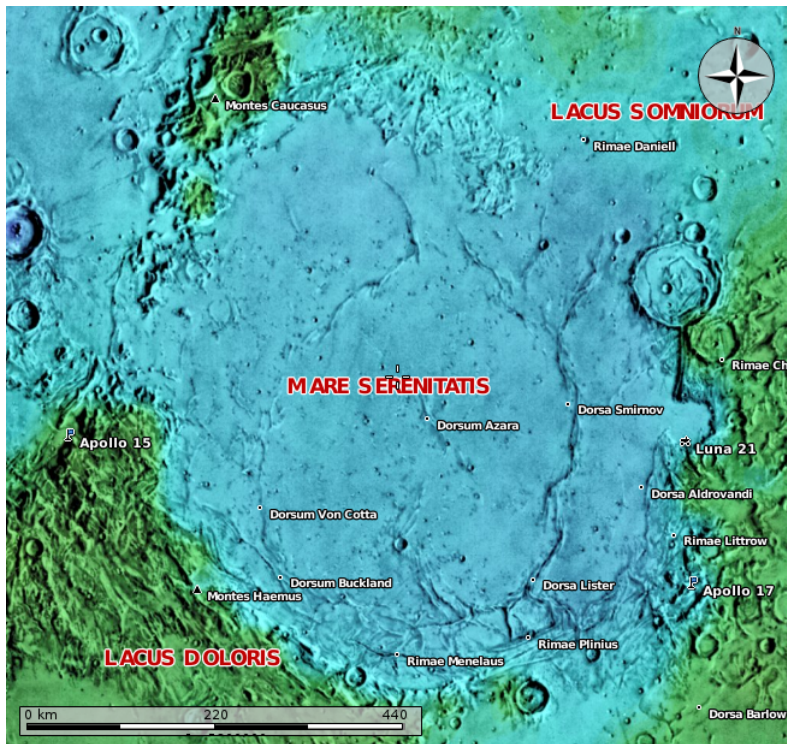


Figura 3.5 Plànol de la mar *Mare Serenitatis*

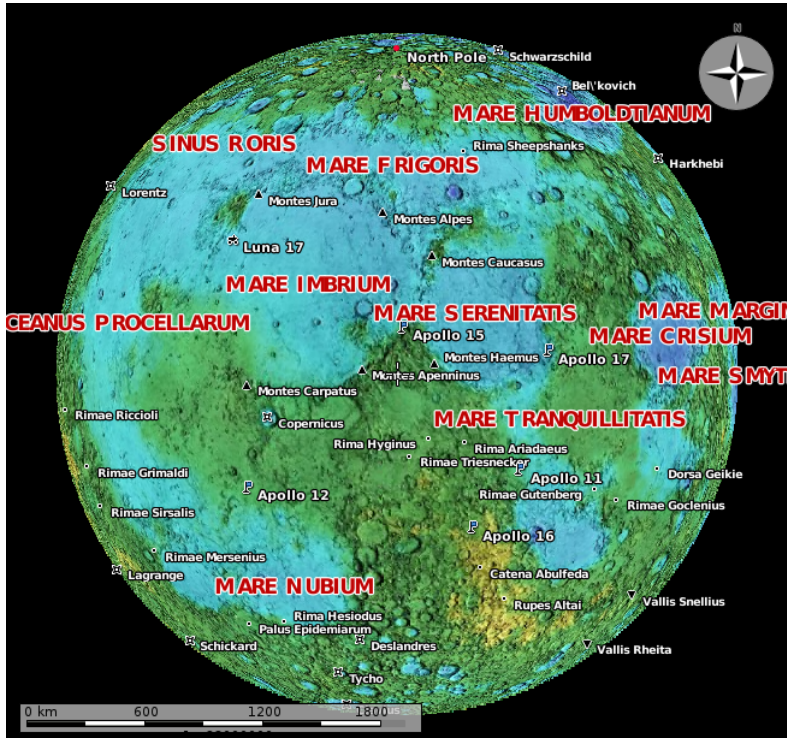


Figura 3.6 Plànol de la Lluna

El continent europeu té una superfície de 10.180.000 km<sup>2</sup>. Compareu les superfícies de la *Mare Serenitatis* amb Europa.

## Solució

En primer lloc, hem de quadrangularitzar el plànol del Mare Serenitatis (figura 3.7).

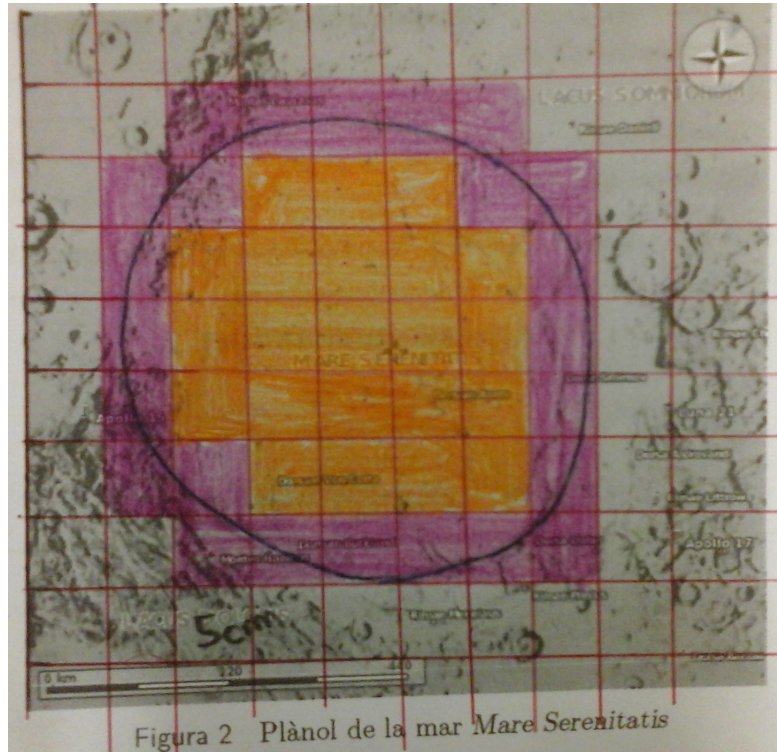


Figura 3.7 Mare Serenitatis quadrangularitzada. Cortesia de Maxi González

Tenim que:

- El nombre de quadres exteriors és 24
- El nombre de quadres interiors és 22
- El nombre de quadres totals és de 46
- L'escala ens diu que 5 centímetres al mapa són 440 quilòmetres a la realitat. Per tant, cada quadre té una àrea de  $1 \text{ cm}^2$  al mapa i de  $7.744 \text{ km}^2$  a la realitat.
- L'àrea mínima d'aquesta mar és de  $22 \cdot 7.744 = 170.368 \text{ km}^2$ . I la seva àrea màxima, de  $356.224 \text{ km}^2$ .

A l'hora de comparar la superfície del *Mare Serenitatis* amb Europa, podem fer igual que a l'exercici 355:

- $10.180.000/170.368 = 59,75$
- $10.180.000/356.224 = 28,57$

És a dir Europa és entre 28,57 i 59,75 vegades més gran que el Mar de la Serenitat.

**Exercici 361.** Estimeu quantes vegades és més gran Estats Units d'Amèrica (figura 3.9) respecte d'Islàndia (figura 3.8) a partir d'aquests plànols.



Figura 3.8 Plànol d'Islàndia amb l'espai quadriculat

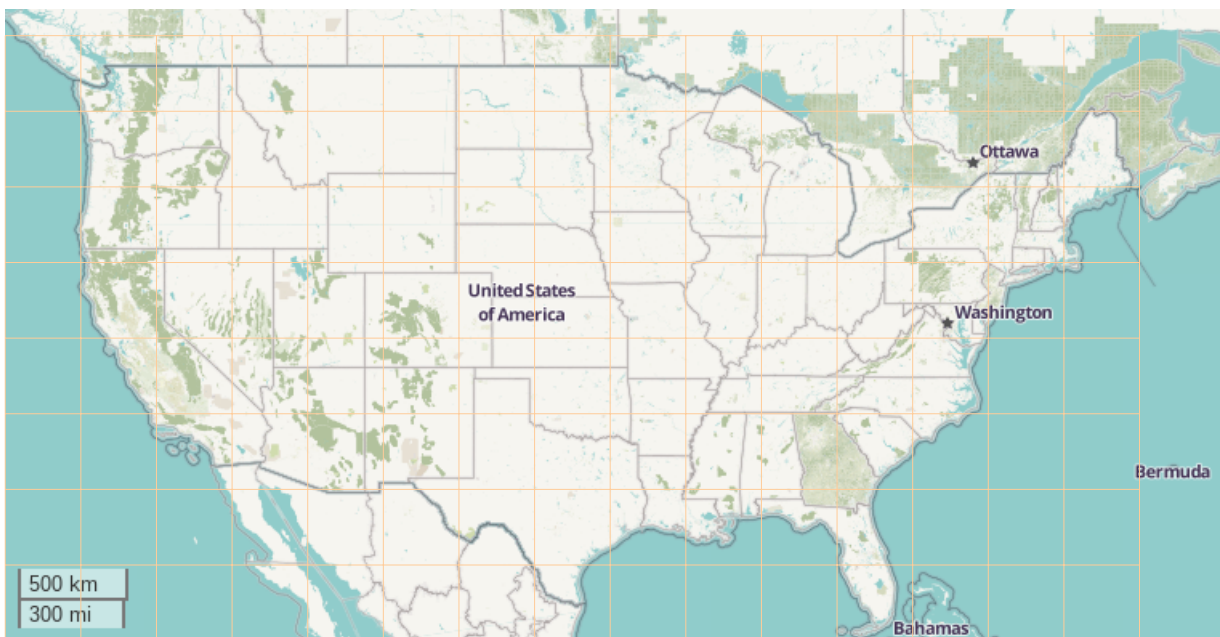


Figura 3.9 Plànol d'EUA amb l'espai quadriculat

## Solució



Figura 3.10 Plànol d'Islàndia amb les quadrícules pintades



Figura 3.11 Plànol d'EUA amb les quadrícules pintades. Cortesia de Pau Wagner

Tenim que:

- El plànol d'Islàndia té 55 quadres exteriors i 41 quadres interiors. En total, 96 quadres.
- L'escala relaciona 2,5 cm al plànol amb 100 km a la realitat
- Per tant, un quadre a la realitat té una àrea de  $1.600 \text{ km}^2$
- Aleshores, l'àrea total d'Islàndia està entre  $41 \cdot 1.600 = 65.600 \text{ km}^2$  i  $96 \cdot 1.600 = 153.600 \text{ km}^2$ .

De la mateixa manera:



- El plànol d'EUA té 39 quadres exteriors i 45 quadres interiors. En total, 84 quadres.
- L'escala relaciona 1,4 cm al plànol amb 500 km a la realitat
- Per tant, un quadre a la realitat té una àrea de  $127.548,98 \text{ km}^2$
- Aleshores, l'àrea total dels Estats Units d'Amèrica està entre  $45 \cdot 127.548,98 = 5.739.704,1 \text{ km}^2$  i  $84 \cdot 127.548,98 = 1.0714.114,32 \text{ km}^2$ .

Amb tot, EUA entre  $1.0714.114,32/65.600 = 163,32$  i  $5.739.704,1/153.600 = 37,36$  major que Islàndia.

## Problemes d'estimacions

**Exercici 362.** En un bar es recapten entre 200 i 1000 euros de propina a la setmana. D'altra banda, s'estima que hi ha entre 20 i 50 clients a la setmana.

- Es pot saber què ha gastat cada client?
- Quin és els euros que com a màxim s'ha gastat un client?
- Quin és el cas extrem en el que els clients han gastat el mínim?

**Exercici 363.** En Bartomeu sap que compra entre 6 i 10 ampolles de xampú a l'any i que les botelles de xampú han costat entre 1,5 i 3 €. Què s'ha gastat com a màxim en Bartomeu enguany? I com a mínim?

**Exercici 364.** Per fer una coca, dues persones volem juntar el nombre d'ous que tenen. Però no s'enrecorden de quants en tenen i no ho poden mirar perquè no són a ca seva. Quants d'ous podran juntar si s'enrecorden que tenen entre 10 i 12 ous i entre 20 i 25 ous? Quants d'ous té de més el que més ous té?

## L'escala numèrica

- L'escala numèrica denota una relació entre les unitats del mapa i les unitats de la realitat. Es denota, per exemple, com

$$1:1000$$

Això vol dir que 1 centímetre al mapa es correspon amb 1000 centímetres a la realitat (o sigui 10 metres). També vol dir que 1 decímetre al mapa es correspon a 1000 decímetres a la realitat, etc. En general, 1 unitat al mapa es correspon a 1000 unitats a la realitat.

- Aquesta és una de les diferències entre l'escala numèrica i l'escala gràfica. L'escala numèrica indica una proporció entre les mateixes unitats, en canvi l'escala gràfica no té perquè tenir les mateixes unitats al plànol i a la realitat (de fet, quasi mai les té).
- En els plànols de carreteres, de països, de construccions, etc. s'utilitza l'escala numèrica.
- Recordeu que el  $N:M$  de l'escala numèrica, el primer nombre correspon al plànol i el segon nombre correspon a la realitat (en el cas anterior  $N = 1$  i  $M = 1000$ ).
- Un avantatge de l'escala numèrica en relació a l'escala gràfica és que és molt més ràpida d'obtenir a plànols: basta llegir dos nombres, mentres que amb l'escala numèrica s'ha d'usar regla. D'altra banda, té un gran desavantatge: si rescalem una imatge (la ampliem o la reduïm), l'escala numèrica no es mantén, però sí ho fa l'escala gràfica.

## Fitxa 2. Ús d'escala numèrica

**Exercici 365.** Aquest és el plànol d'una part de la ciutat de Nova York. El plànol està a escala 1:1000.



Dos amics, na Catherine i en John, viuen, respectivament, als punts *A* i *B*.

- Trieu un itinerari per anar d'una casa a l'altra i calculeu la distància que han de recórrer.
- Quan tardaran a arribar, aproximadament, si la recorren passejant a 3 km/h?

**Exercici 366.** Un plànol està a escala 1:10 000.

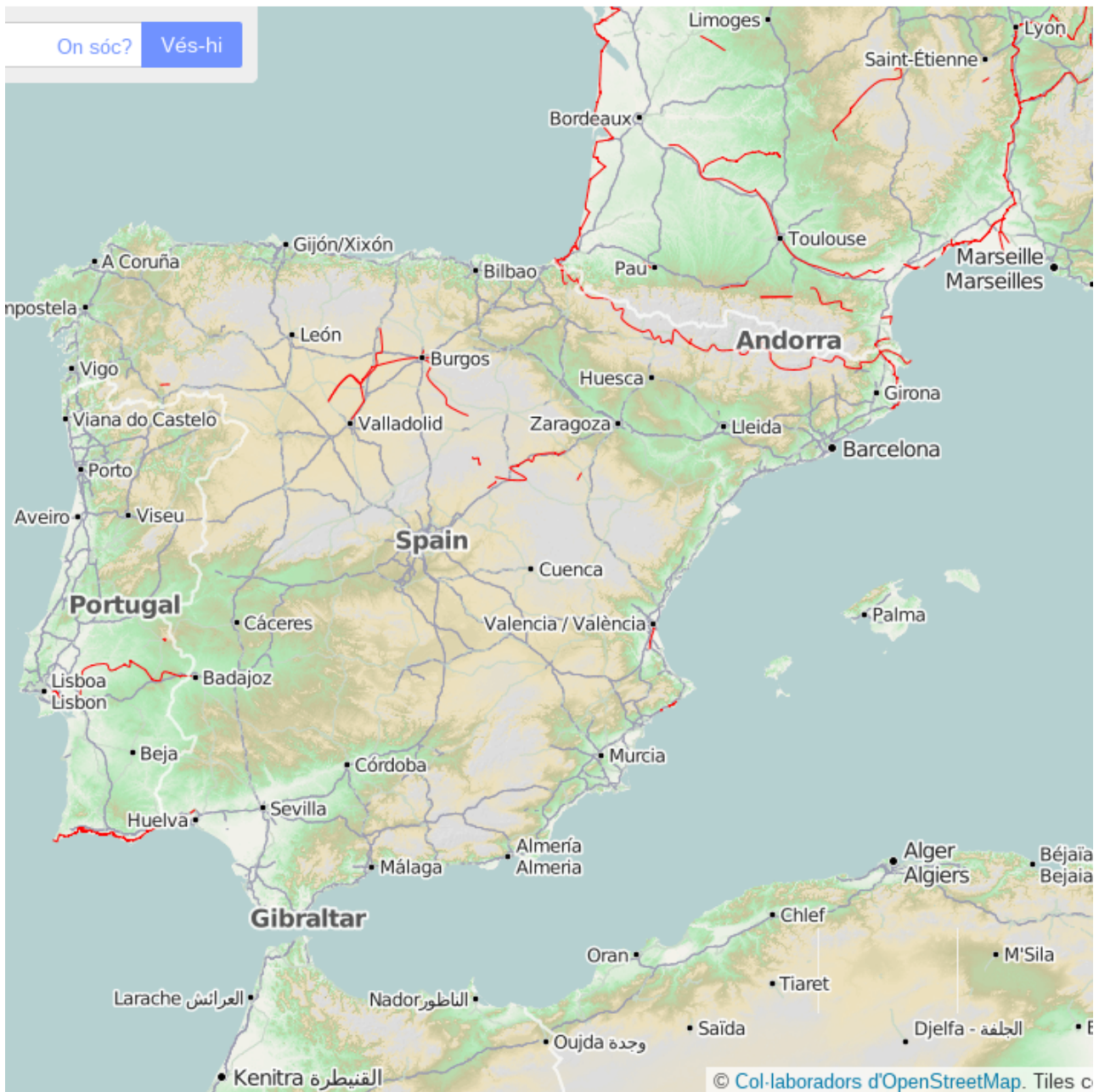
- En el plànol, dos punts disten 4 cm. Quant disten en la realitat?
- En la realitat, dos punts disten 3500 m. Quant disten en el plànol?

**Exercici 367.** Un xalet té forma rectangular (15 m de longitud i 10 d'amplada). Volem fer un plànol. Quina escala creieu que és la més adequada:

- 1:100
- 10:1
- 100:1
- 1:10

Calculeu què mesuraria el plànol verticalment i horitzontal en cada cas.

**Exercici 368.** Aquest mapa està a escala 1:7.500.000.



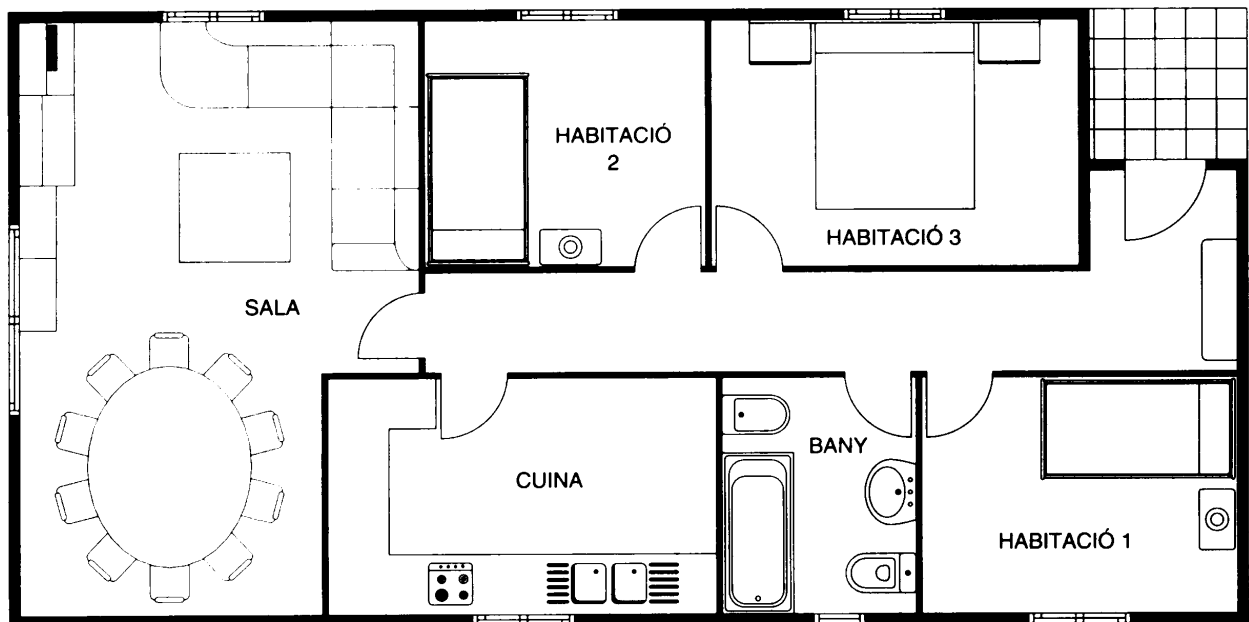
- Trobeu la distància de la Corunya (Galícia) a Girona (Catalunya).
- Situeu la teva localitat en el mapa i troba a quina distància està d'Alger i de Marsella.
- Nador és una ciutat del Marroc situada vora una preciosa albufera, *la Mar Chica* [1]. Localitzeu-la prop de Melilla i trobeu la distància que hi ha entre Nador i Màlaga.
- Trobeu dos punts al mapa amb una distància a la realitat de, com a mínim, 500 km.

**Exercici 369.** La figura següent representa el plànol d'un pis dibuixat a escala 1:150.



- Preneu les mides necessàries per calcular l'àrea que té.
- Quan costarà el pis si el  $m^2$  construït val 150 €?

**Exercici 370.** Aquest és el plànol d'una casa dibuixat a escala 1:100.



- Trobeu les dimensions de cada habitació
- Trobeu la seva àrea

**Exercici 371.** Aquest és el plànol d'una habitació (figura 3.12).

Volem enrajolar el terra de l'habitació amb rajoles quadrades de 25 cm de costat. Si cada rajola val 1,85 € quant costaran totes les rajoles necessàries per enrajolar l'habitació?

- Calculeu quantes rajoles es necessiten (podeu passar totes les mides a centímetres, descomposar l'habitació en rectangles i calcular la seva àrea)
- Calculeu el preu de totes les rajoles

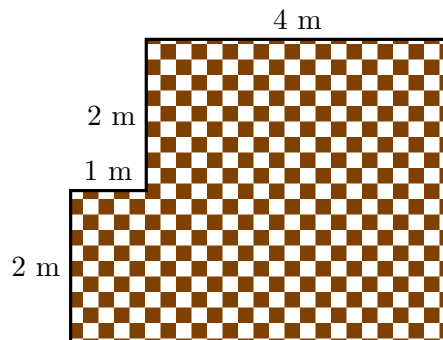
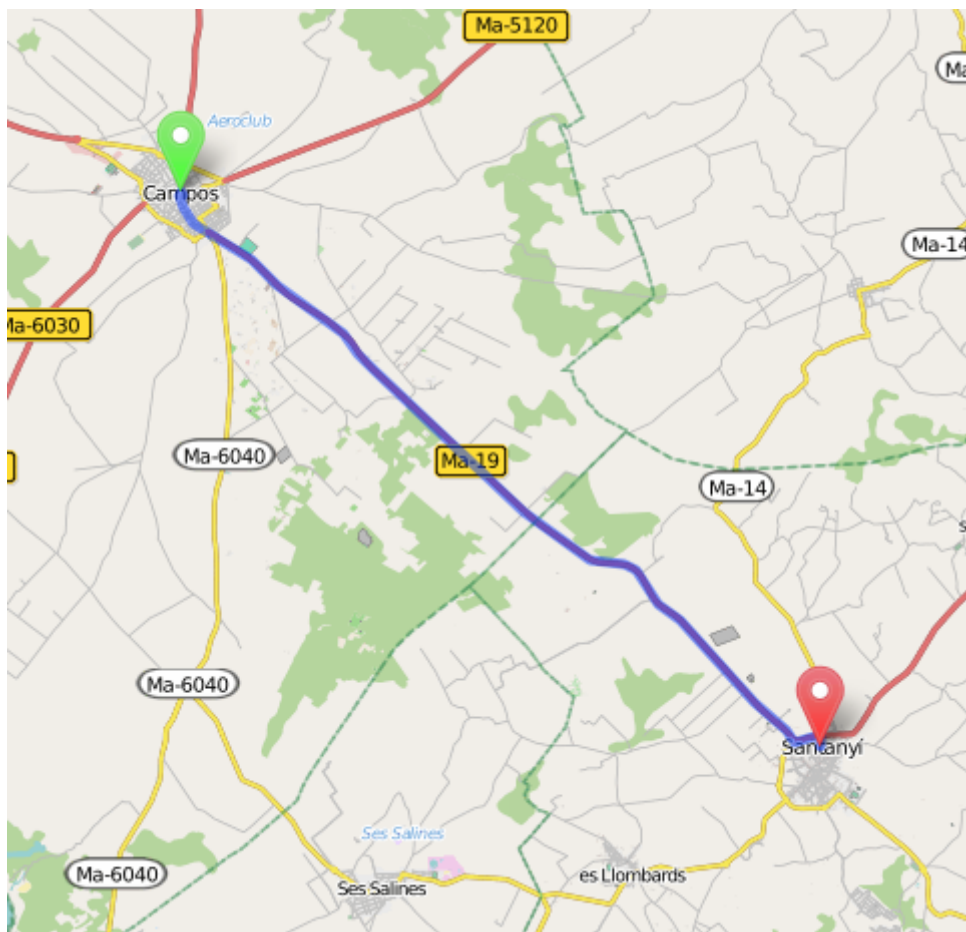


Figura 3.12 Plànol d'una habitació

- c. Calculeu el perímetre de l'habitació
- d. Podeu calcular a quina escala està fet aquest mapa?

**Exercici 372.** Si des de Campos a Santanyí hi ha 13 km, a quina escala està aquest mapa?



**Exercici 373.** Dos pobles, que a la realitat estan a 36 km de distància, es situen en el mapa a una distància de 10,8 cm. A quina escala està el plànol?

Exercici 374. Quina àrea té aquesta paret (figura 3.13)?

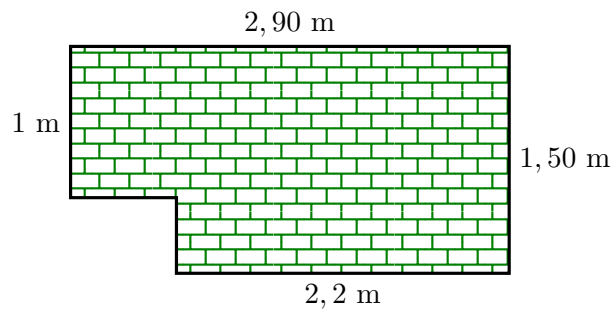


Figura 3.13 Una paret no rectangular

- Calculeu a quina escala està fet aquest plànol?
- Què val la diagonal que va de l'extrem superior esquerre a l'extrem inferior dret?

Exercici 375. (Segar la gespa) Un empleat del golf de Puntiró sempre li toca segar la gespa del green 6è (figura 3.14). Un dia es demana quina superfície total sega. El podeu ajudar?

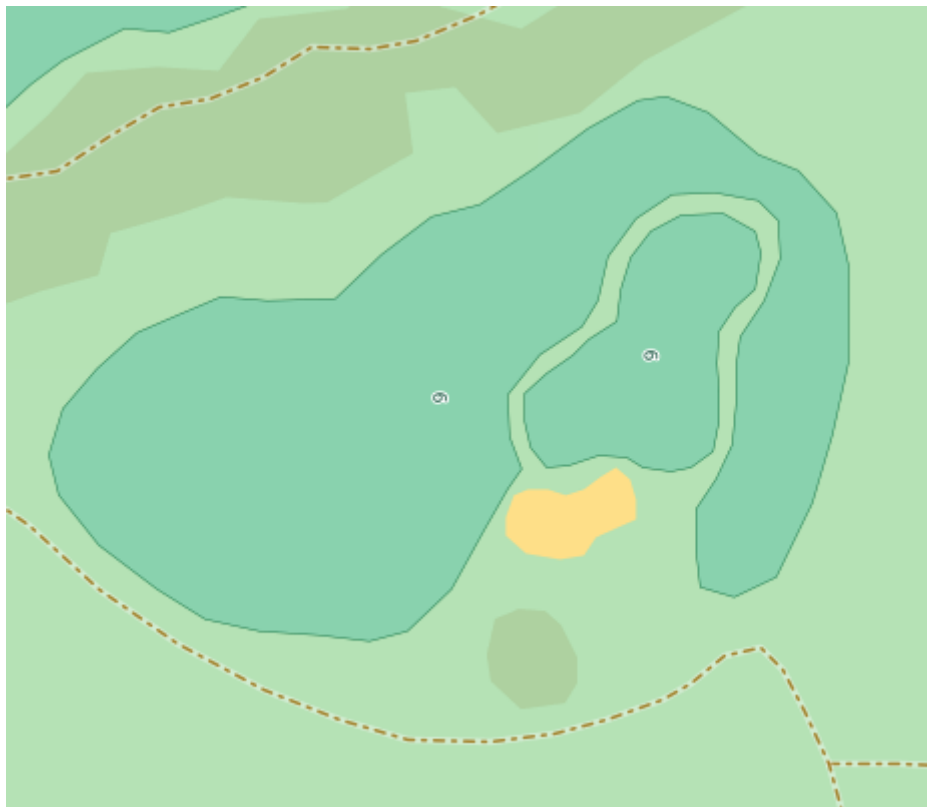


Figura 3.14 Plànol del green sisè. Escala 1:850

Exercici 376. (Plaques solars) Volem estalviar-nos alguns doblers a la factura de la llum i decidim instal·lar plaques solars a la taulada de ca nostra, de la qual tenim una maqueta feta a escala 1:150 (figura 3.15). Les plaques solars que hem triat tenen les característiques següents (figura 3.16):

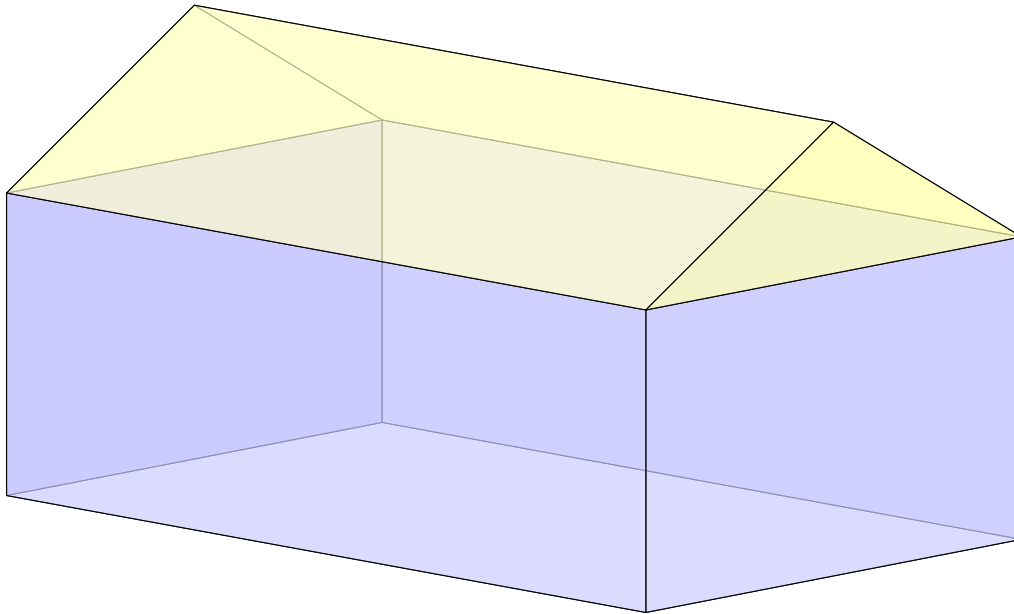


Figura 3.15 Plànol de la casa en tres dimensions

Model	Mesures	Pes	Preu
Atersa A-150P	1476 × 659 × 35 mm	11,9 kg	259 €

Figura 3.16 Característiques del mòdul fotovoltaic

- Què ens costarà el muntatge?
- Si la taulada pot suportar un total de dues tonelades, aguantarà el pes de les plaques?

Exercici 377. Si el plànol d'aquesta casa està a escala 1:150 (figura 3.17), quina superfície té el balcó?

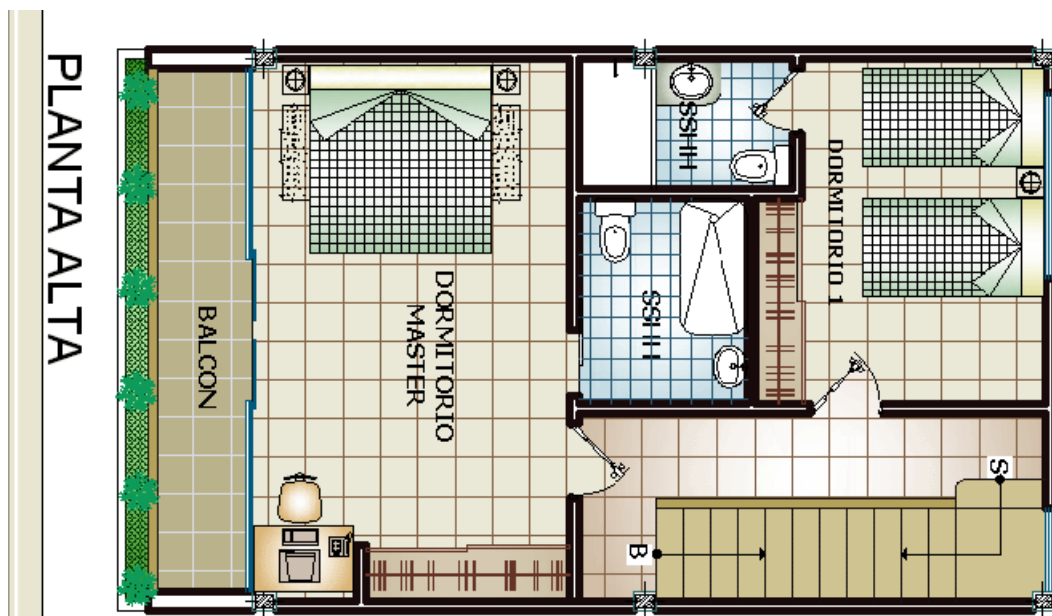


Figura 3.17 Plànol del primer pis d'una propietat immobiliària (escala 1:150)



**Exercici 378.** Sabem que la llargària d'aquesta casa és de 15 metres (figura 3.18). Podeu calcular la superfície dels dormitoris?



Figura 3.18 Plànol d'un pis

**Exercici 379.** (Central Park) Una empresa immobiliària proposa a l'ajuntament de Nova York requalificar Central Park (figura 3.19) com a zona edificable i vendre-la-li a canvi de 1000 milions de dòlars. Acceptaríeu la proposta?

Podeu suposar que el preu de venda del metre quadrat és de 22.000 €/m<sup>2</sup> i que podeu fer 10 pisos d'alçada [1].

**Exercici 380.** Durant l'estiu el golf de Son Quint (figura 3.20) ha patit una seriosa sequera i s'han dessecat els llacs artificials, de 10 metres de profunditat. A l'hivern els responsables del golf decideixen tornar a omplir-los. Quina quantitat d'aigua necessiten?

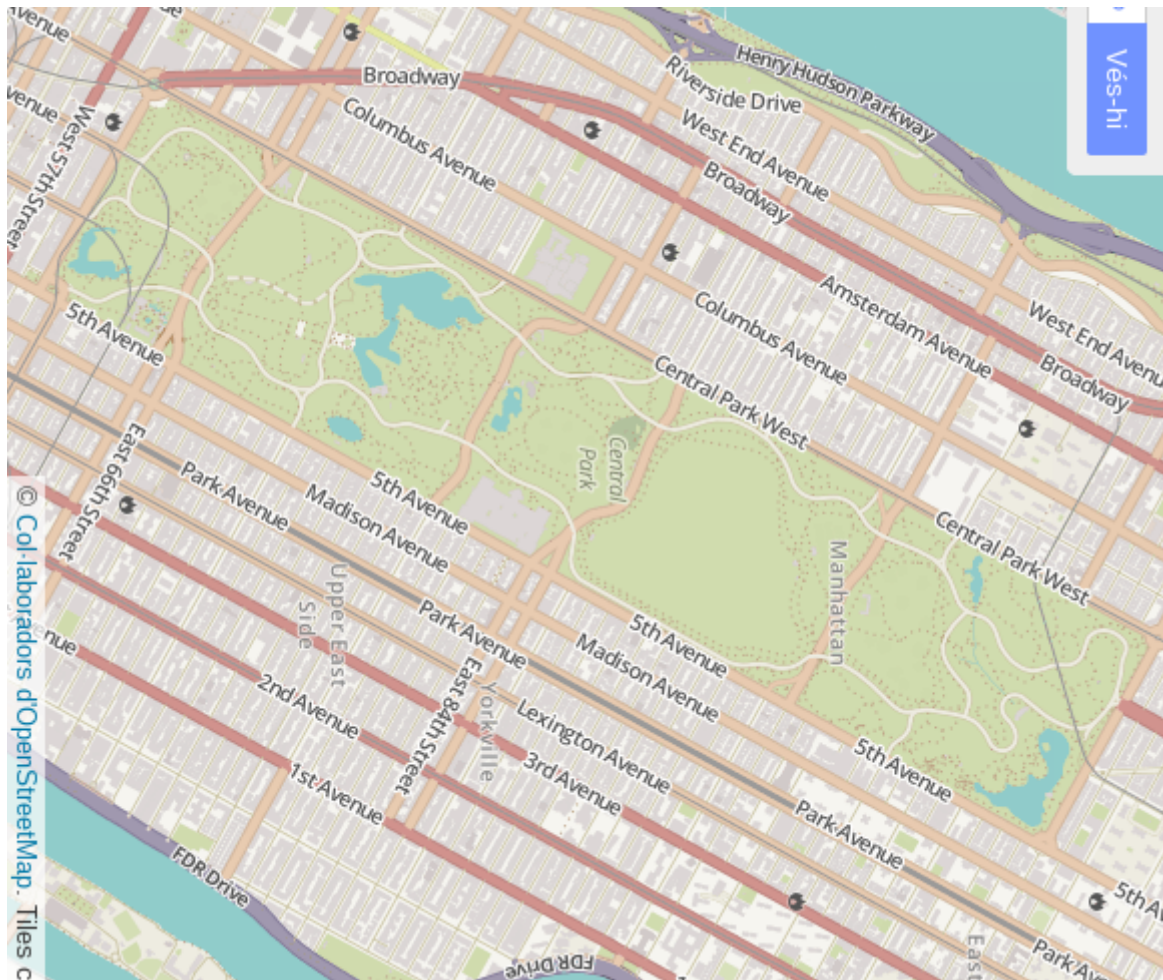


Figura 3.19 Plànol de Central Park, Manhattan, Nova York. Escala 1:25.000

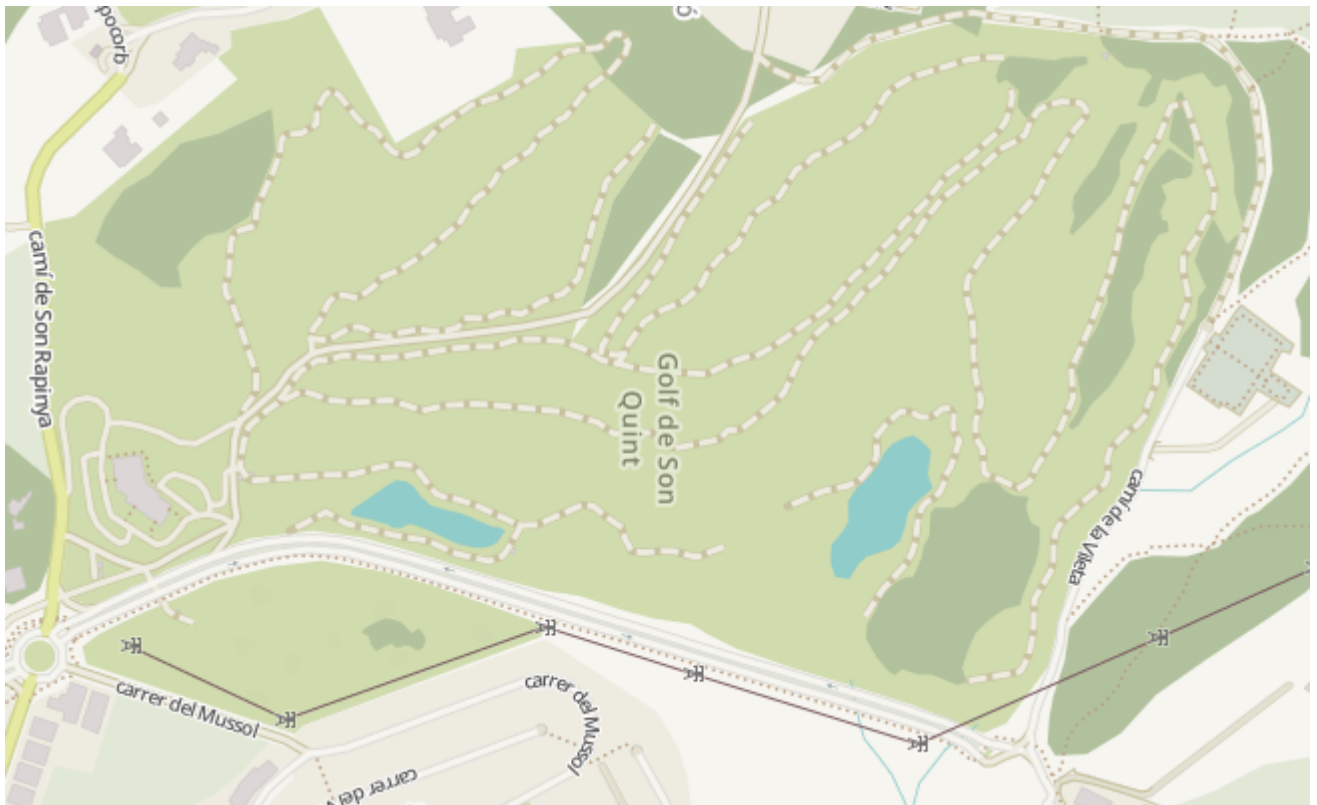


Figura 3.20 Plànol del Golf de Son Quint. Escala 1:7.000

1. Exercici 372: L’escala és 1:106.382
-

## 3.1 Teorema de Tales

## Semblança

Dues figures són *semblants* si tenen la mateixa forma però una mida diferent. Això vol dir que dues figures poden ser de mida molt diferent però semblants. Contràriament, dues figures poden tenir les mides iguals però que la seva forma estigui deformada

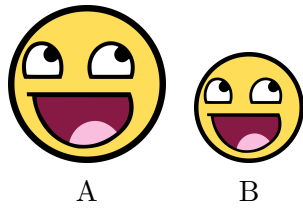


Figura 3.21 Figures semblants

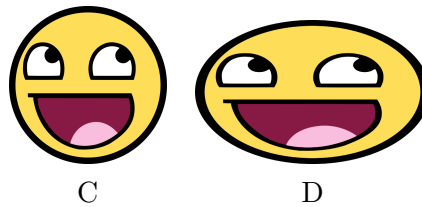
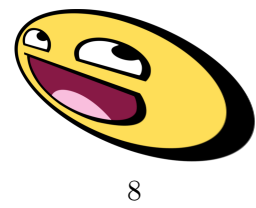
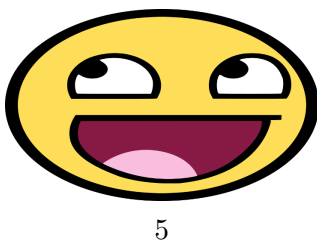
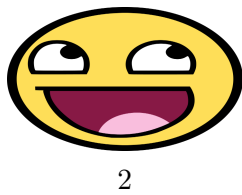


Figura 3.22 Figures NO semblants

**Exercici 381.** Quines d'aquestes figures vos pareixen semblants:





9



10



11



12

FIGURA

FIGURES SEMBLANTS

_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____

## Figures semblants

- Dues figures són semblants si una és *l'ampliació o reducció de l'altra*. És a dir, si prenem dos punts qualssevol  $A$ ,  $B$  de la primera figura, els punts corresponents  $A'$ ,  $B'$  (que també s'anomenen *homòlegs*) de la segona figura satisfan que els segments  $\overline{A'B'}$  i  $\overline{AB}$  són proporcionals.

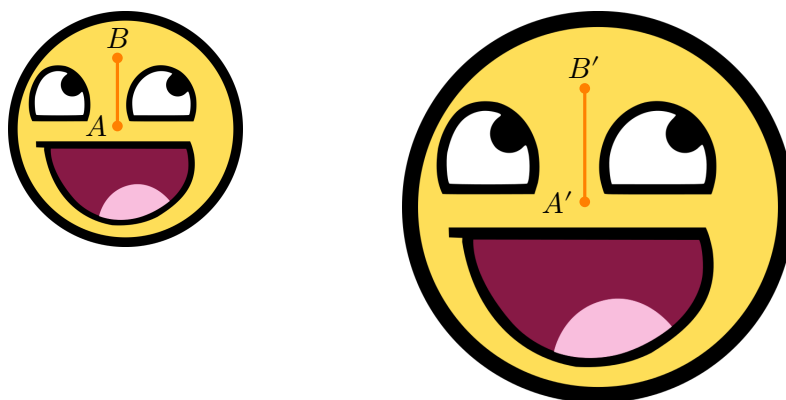


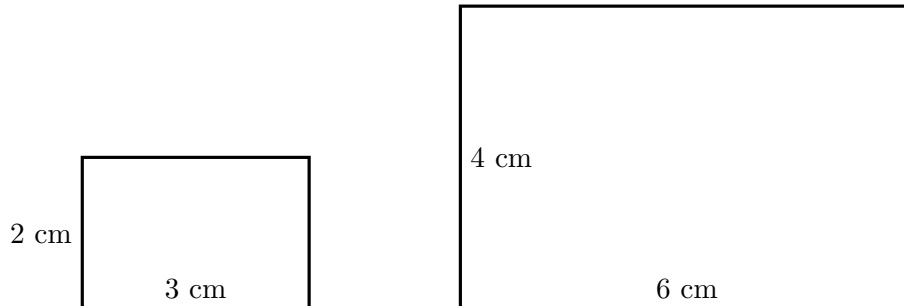
Figura 3.23 Semblança

Per exemple una fotografia és una figura semblant a la realitat, una fotocòpia és una figura semblant del paper original, etc.

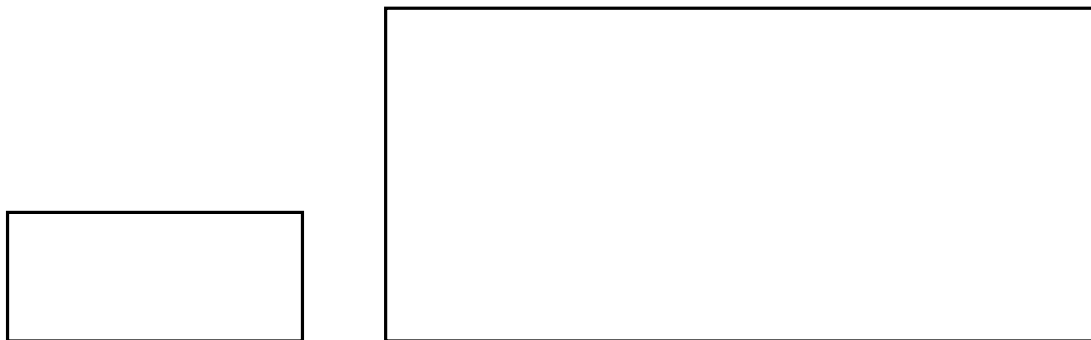
- Quan això passa, la *raó de semblança* és la divisió entre segments homòlegs (independentment dels segments que es prenguin).
- Per a comprovar si dues figures són semblants o no, en teoria, s'han de dividir tots els segments homòlegs i veure si totes les divisions són iguals o no. En el cas de ser-ho, seran figures semblants. En cas contrari, no ho seran.
- Pels políedres aquest criteri es pot simplificar *una mica*: dos políedres són semblants si les seves arestes són proporcionals. En aquest cas, els angles que formen les arestes són iguals. De forma contrària, si tots els angles són iguals, els políedres també són semblants.
- Noteu que un mapa no és res més que una figura semblant de la realitat i que l'escala dels mapes no és res més que una raó de semblança entre els objectes del mapa i els de la realitat.
- Moltes vegades, el terme *escala* i *raó de semblança* es consideren sinònims.



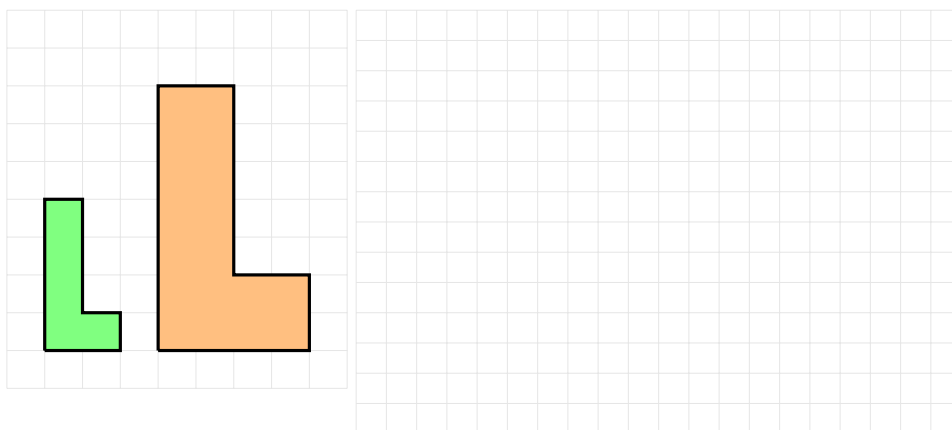
**Exercici 382.** Són semblants els rectangles següents? En cas de ser-ho, quina és la seva raó de semblança?



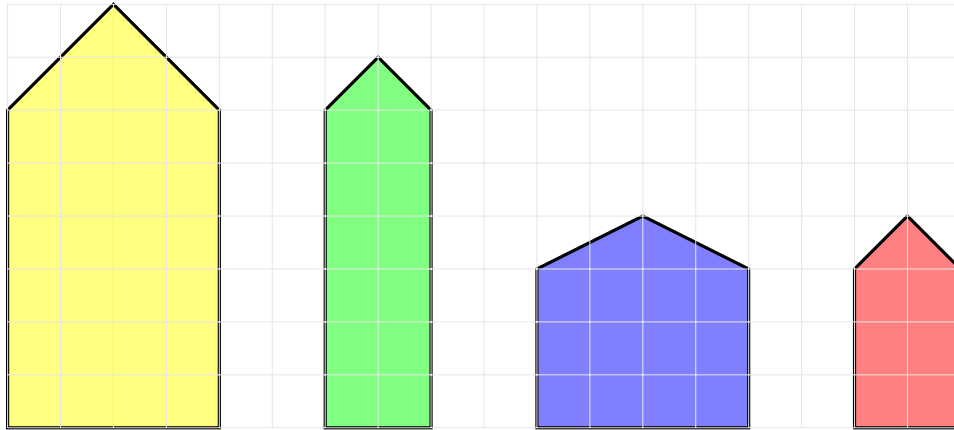
**Exercici 383.** Preneu mides amb un regle dels rectangles següents i digueu si són semblants.



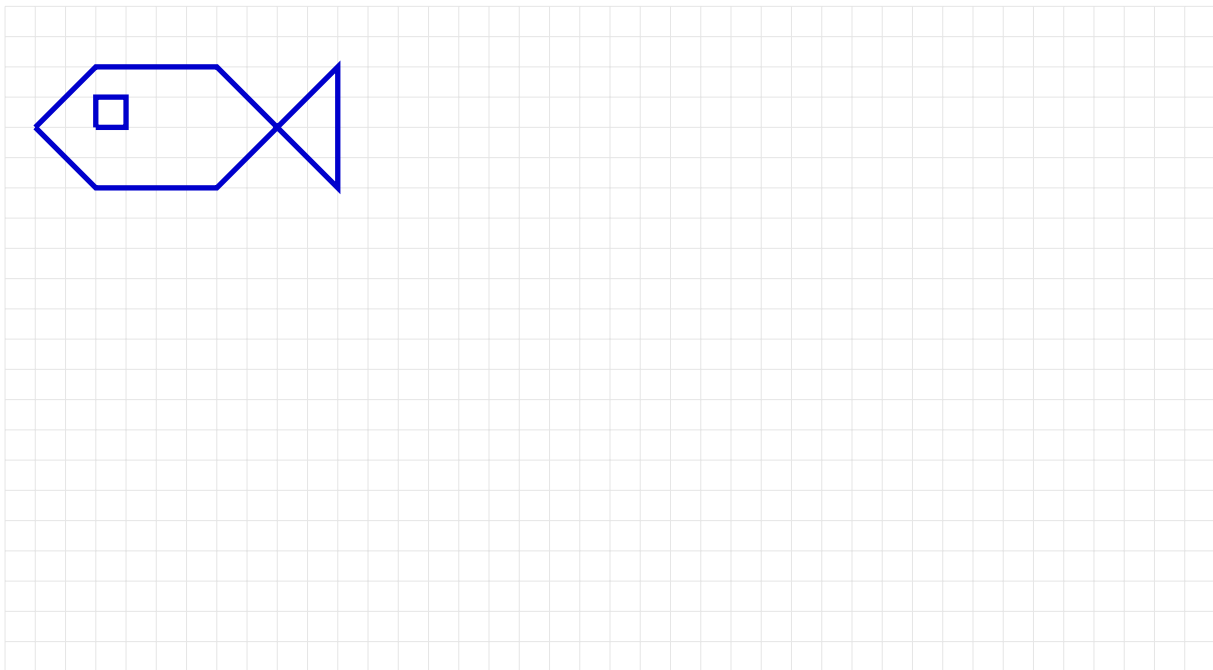
**Exercici 384.** Modifiqueu aquestes figures per a què siguin semblants.



**Exercici 385.** Quines figures són semblants? Calculeu la seva raó de semblança.



**Exercici 386.** Feis una figura el triple de gran del dibuix que hi ha dibuixat.



La figura resultant és semblant? Per què?

**Exercici 387.** Dibuixeu dos triangles la raó de semblança dels quals sigui  $1/2$

**Exercici 388.** Si els costats d'un triangle mesuren respectivament 12, 5, i 7,5 cm, quant mesuraran els costats d'un altre triangle semblant si la raó de semblança del segon respecte del primer és  $1/3$  ? I si la raó de semblança fos de 3?

**Exercici 389.** Dibuixeu dos triangles equilàters de 5 i 8 cm de costat, respectivament.

- Són semblants?
- En cas afirmatiu, calculeu la raó de semblança

**Exercici 390.** Els costats d'un triangle fan 9, 12 i 15 cm, respectivament. Trobeu els costats d'un altre triangle semblant sabent que el costat més gran fa 24 cm.

**Exercici 391.** Trobeu quines llaunes d'aquests refrescs de cola són o no semblants. Trobeu la raó de semblança de cadascuna.



1



2



3



4



5



6



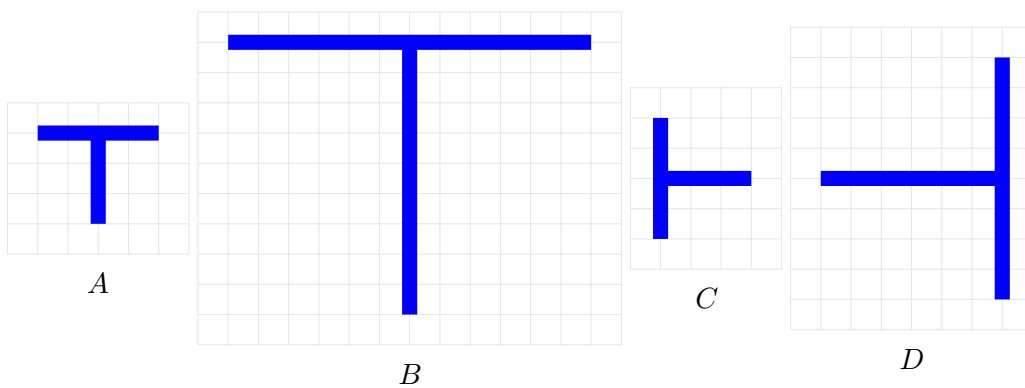
7



8

FIGURA	⇒	RAÓ DE SEMBLANÇA
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____
_____	⇒	_____

**Exercici 392.** A quina escala s'ha fet la reproducció de la lletra "T" en cada cas?

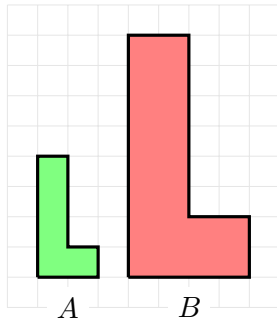


**Exercici 393.** Una fotografia de 9 cm d'amplada i 6 cm d'alçada té al voltant un marc de 2,5 cm d'ample. Són semblants els rectangles interior i exterior del marc?

**Exercici 394.** Els costats d'un triangle fan 18, 24 i 32 cm, respectivament. Trobeu els costats d'un altre triangle semblant sabent que el més petit fa 24 cm.

**Exercici 395.** Quant faran els costats i el perímetre d'un triangle semblant a un altre de costats 36, 42 i 54 mm, respectivament, si la raó de semblança és de 5?

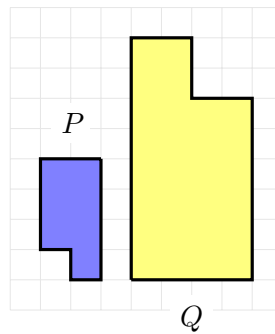
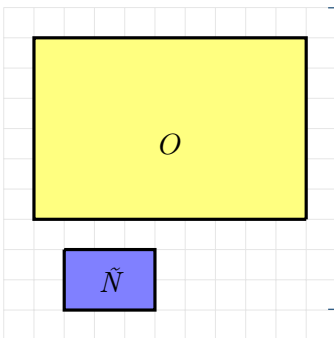
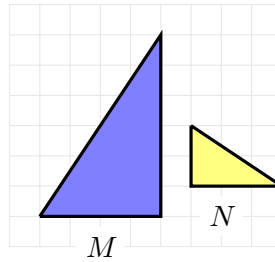
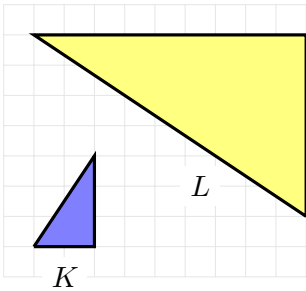
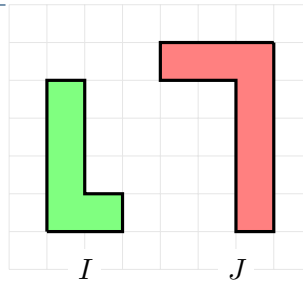
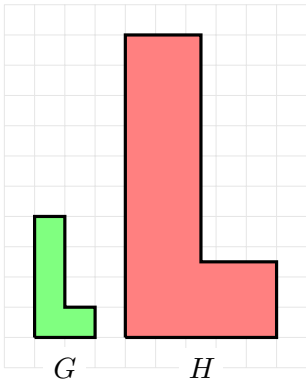
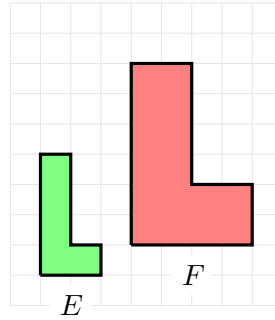
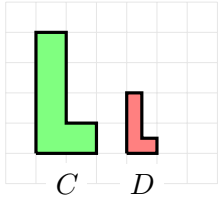
**Exercici 396.** Quins parells de figures són semblants? Per què?



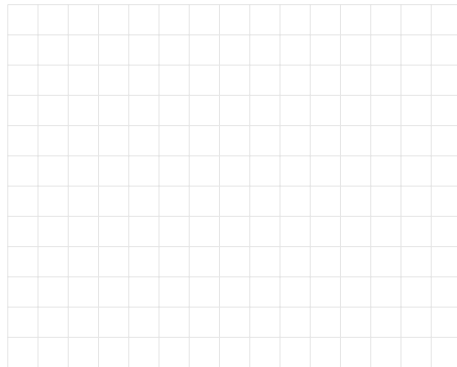
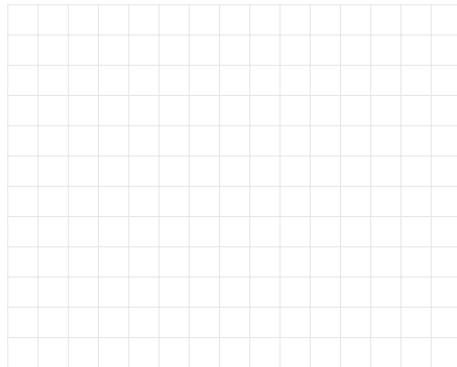
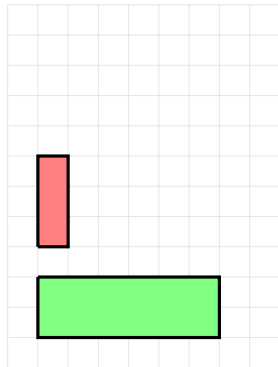
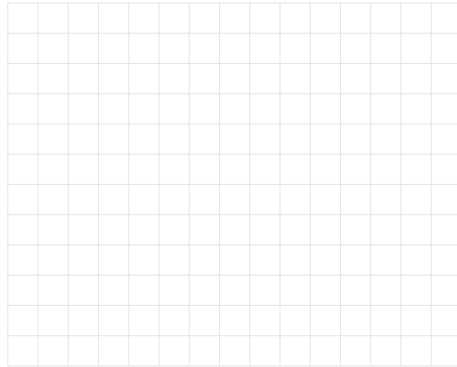
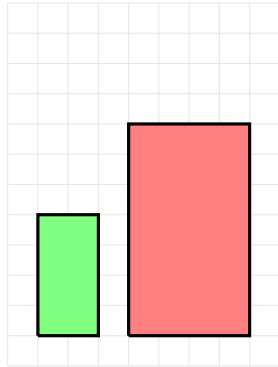
$$\text{raó de l'amplada} = \frac{\text{amplada de } B}{\text{amplada de } A} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{raó de l'altura} = \frac{\text{altura de } B}{\text{altura de } A} = \frac{8}{4} = 2$$

SÓN IGUALS  $\Rightarrow$  SÓN SEMBLANTS  $\Rightarrow A \cong B$



Exercici 397. Modifiqueu els rectangles següents per a què siguin semblants



**Exercici 398.** Calculeu les dimensions d'un rectangle la diagonal del qual fa 75 cm si és semblant a un altre rectangle els costats del qual fan 36 i 48 m.

**Exercici 399.** Indiqueu si són semblants dos triangles amb les mesures següents: els costats de l'un fan 10 cm, 7 cm i 6 cm, i els de l'altre, 20 cm, 14 cm i 32 cm.

## Homotècies

Donat un punt  $O$  i un nombre positiu  $r$ , una *homotècia de centre  $O$  i raó  $r$*  és una transformació geomètrica tal que per a cada punt  $A$  li feim correspondre el punt  $A'$  de manera que la longitud del segment  $OA'$  és igual a  $r$  per la longitud del segment  $OA$ , és a dir,

$$|\overline{OA'}| = r|\overline{OA}|$$

- Quan  $r > 1$ , obtenim una ampliació
- Quan  $r = 1$ , obtenim una còpia de la figura original
- Quan  $r < 1$ , obtenim una reducció

Les homotècies s'utilitzen, per exemple, per obtenir figures homòlegs si no disposam de cap quadrícula.

**Exemple 3.** Aquí tenim l'homotècia de centre  $O$  i raó 3 (figura 3.24), que consisteix en doblar el triangle  $ABC$  a partir d' $O$ .

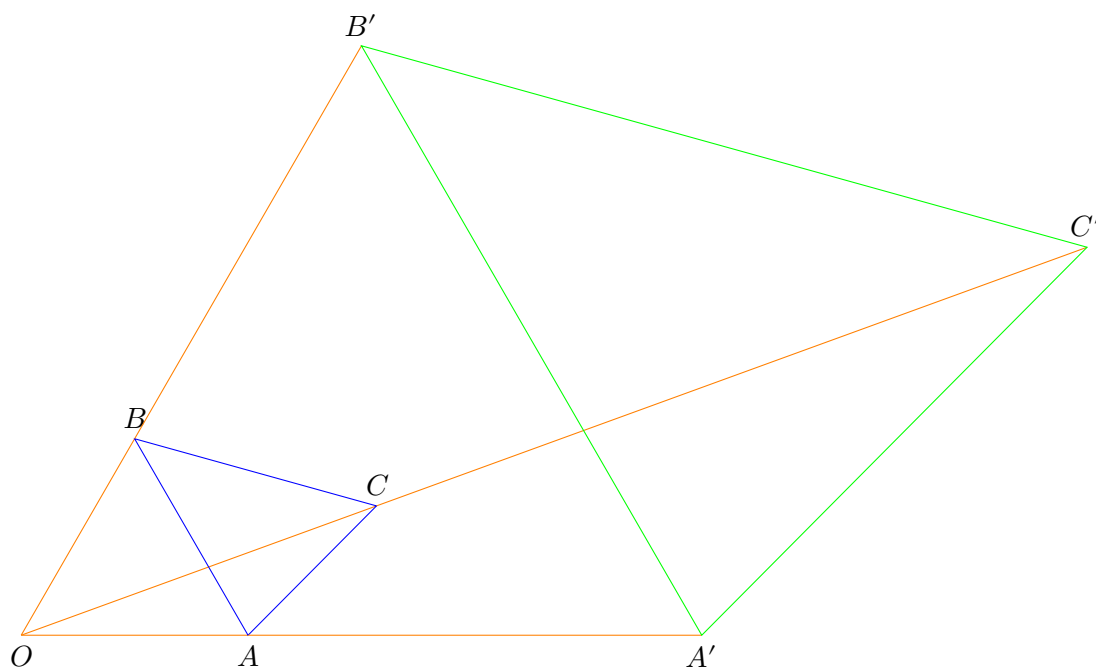


Figura 3.24 Homotècia de centre  $O$  i raó 3

**Exercici 400.** Trobeu figures semblants fent servir homotècies de raó i centre especificats.

a) Centre  $O$  i raó 2 (figura 3.25).

b) Centre  $A$  i raó  $\frac{1}{2}$  (figura 3.26)



$\dot{O}$

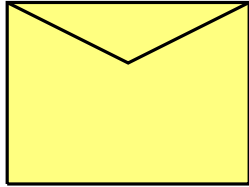
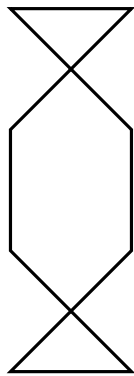


Figura 3.25 Homotècies de centre  $O$  i raó 2



$\dot{A}$

Figura 3.26 Homotècia de centre  $A$  i raó 1/2

### 3.1.4 Teorema de Tales

**Exercici 401.** Determineu, sense fer servir el regle, la longitud dels segments que falten mitjançant el teorema de Tales.

a)  $\overline{OA} = 4,2$  cm,  $\overline{AB} = 3$  cm,  $\overline{OA'} = 3,4$  cm,  $\overline{OC} = 11,9$  cm.

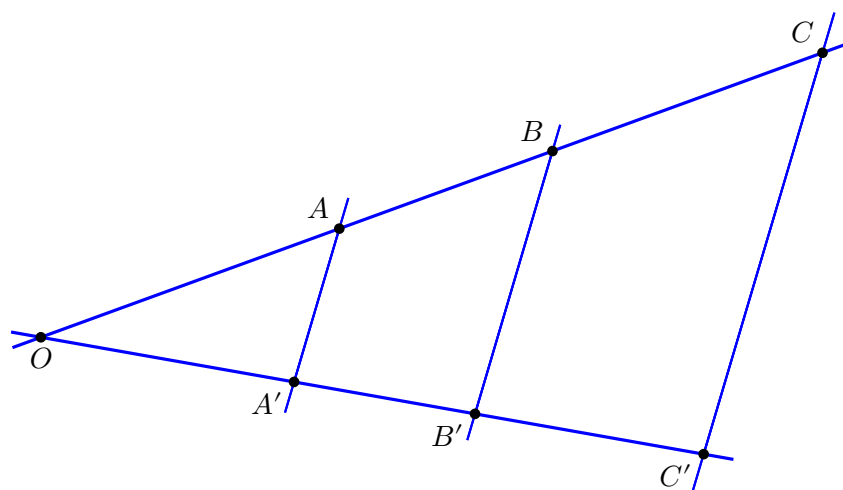


Figura 3.27 Figura a

b)  $\overline{OB} = 7,8$  cm,  $\overline{OC} = 12,3$  cm,  $\overline{OB'} = 8,3$  cm,  $\overline{B'C'} = 4,7$  cm,  $\overline{OA} = 4,7$  cm. Determineu primer  $\overline{OC'}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{OA'}$ .

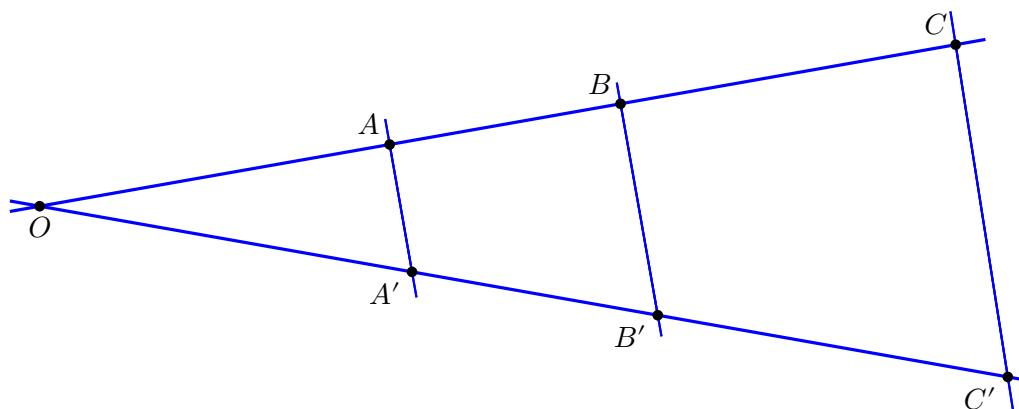


Figura 3.28 Figura b

c)  $\overline{OA'} = 3,5$  cm,  $\overline{A'B'} = 4,3$  cm,  $\overline{AB} = 6,3$  cm,  $\overline{B'C'} = 2,2$  cm.

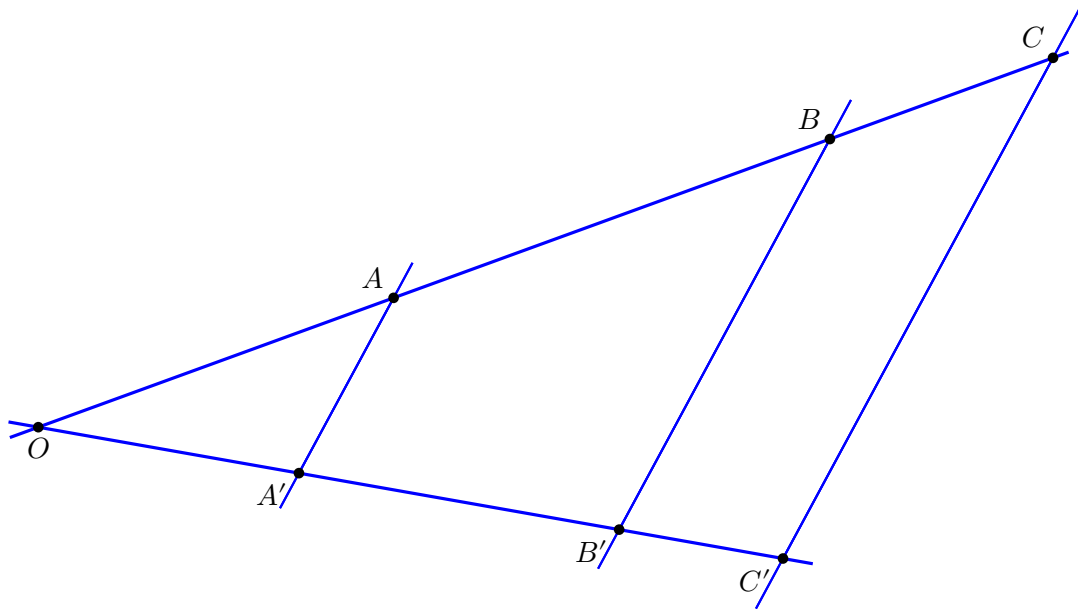


Figura 3.29 Figura c

d)  $\overline{B'D'} = 7,1$  cm,  $\overline{A'C'} = 8,1$  cm,  $\overline{AB} = 3,9$  cm,  $\overline{BD} = 5,8$  cm,  $\overline{OA} = 5,1$  cm.

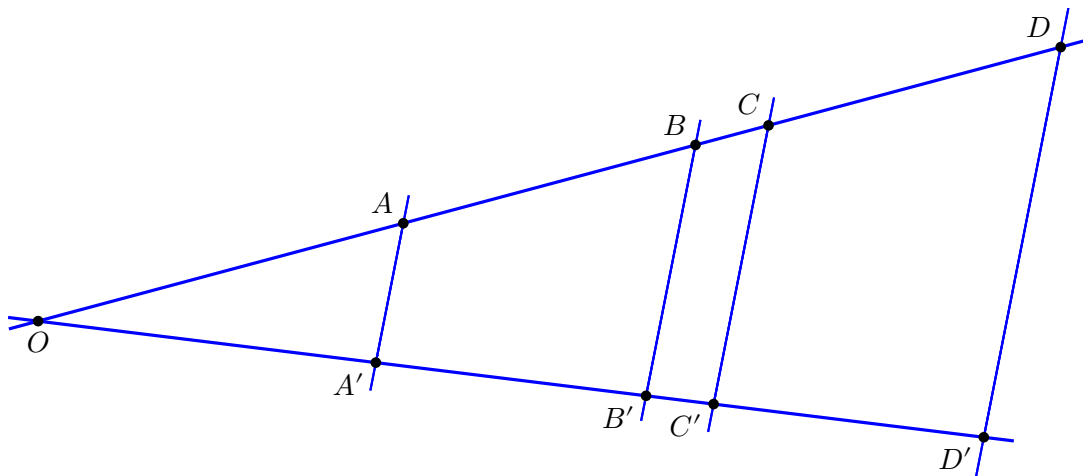


Figura 3.30 Figura d

e)  $\overline{A'C'} = 7,2$  cm,  $\overline{OA} = 4,5$  cm,  $\overline{CD} = 4,4$  cm,  $\overline{B'D'} = 6,7$  cm,  $\overline{AC} = 7,6$  cm.

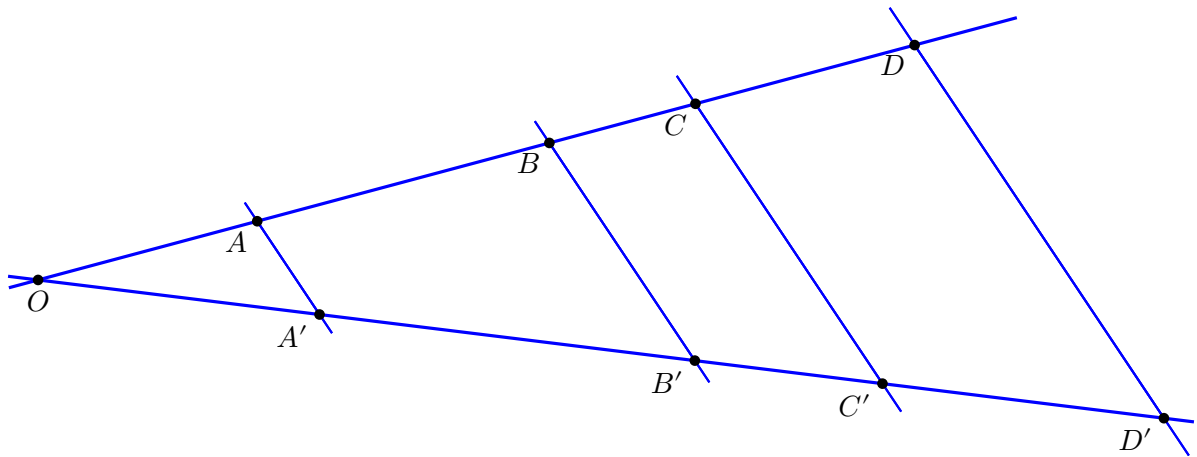


Figura 3.31 Figura e

f)  $\overline{BD} = 4,6$  cm,  $\overline{AB} = 3,1$  cm,  $\overline{B'D'} = 5,9$  cm,  $\overline{OB'} = 9,5$  cm,  $\overline{CD} = 2,4$  cm.

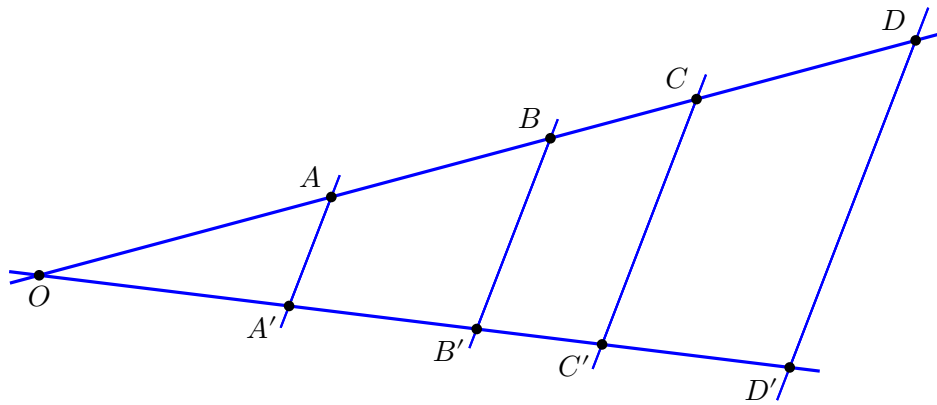
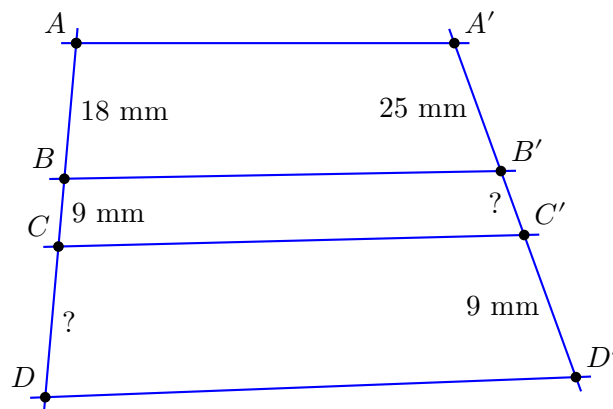


Figura 3.32 Figura f

**Exercici 402.** Trobeu les dades que falten

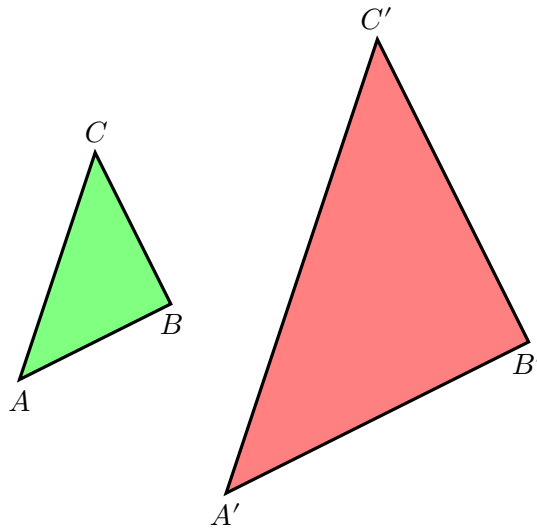


**Exercici 403.** Calculeu l'altura d'una muntanya a partir de les dades següents: Des d'un vaixell es calcula que la distància del cim de la muntanya és de 4525 m, amb un angle  $\alpha$  que forma la visual

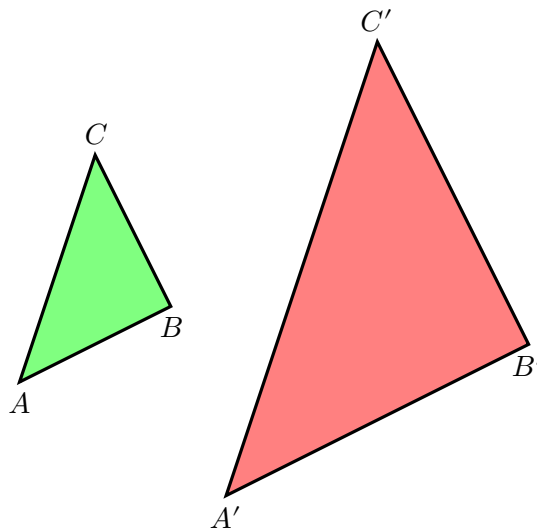
sobre l'horitzó. Sobre un paper es dibuixa un triangle rectangle  $\triangle ABC$ , que té  $\alpha$  com un dels angles aguts. El catet  $\overline{BC}$  mesura 21 cm i la hipotenusa  $\overline{AC}$ , 83 cm.

**Exercici 404.** Trobeu la longitud dels costats que falten:

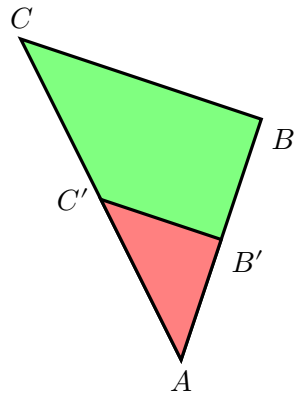
a)  $\overline{AB} = 2$ ,  $\overline{BC} = 3$ ,  $\overline{B'C'} = 6$ .



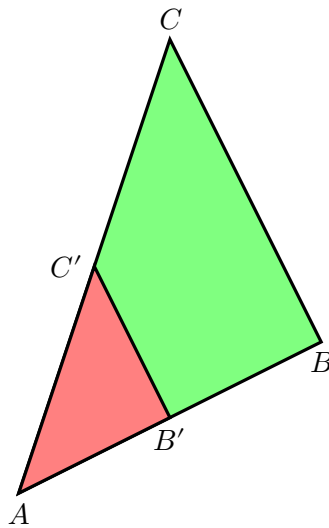
b)  $\overline{A'C'} = 2$ ,  $\overline{AC} = 3$ ,  $\overline{A'B'} = 3$ .



c)  $\overline{AB} = 2$ ,  $\overline{BC} = 3$ ,  $\overline{B'C'} = 6$ .



d)  $\overline{AC} = 3, \overline{AB} = 1, \overline{BC} = 5, \overline{B'C'} = 10.$



**Exercici 405.** Trobeu les mesures dels costats que falten.

a)  $\overline{OA} = 7,2, \overline{OA'} = 5,34, \overline{OB} = 12, \overline{D'C'} = 3,56$

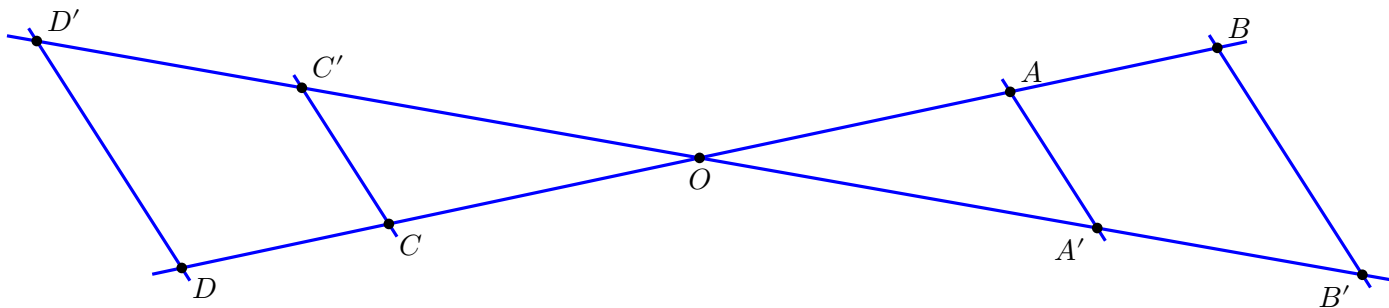


Figura 3.33 Figura a

b)  $\overline{OA} = 4, \overline{OA''} = 5, \overline{A'B'} = 2,25, \overline{A''C''} = 6,25, \overline{BC} = 2, \overline{C'D'} = 2,25$

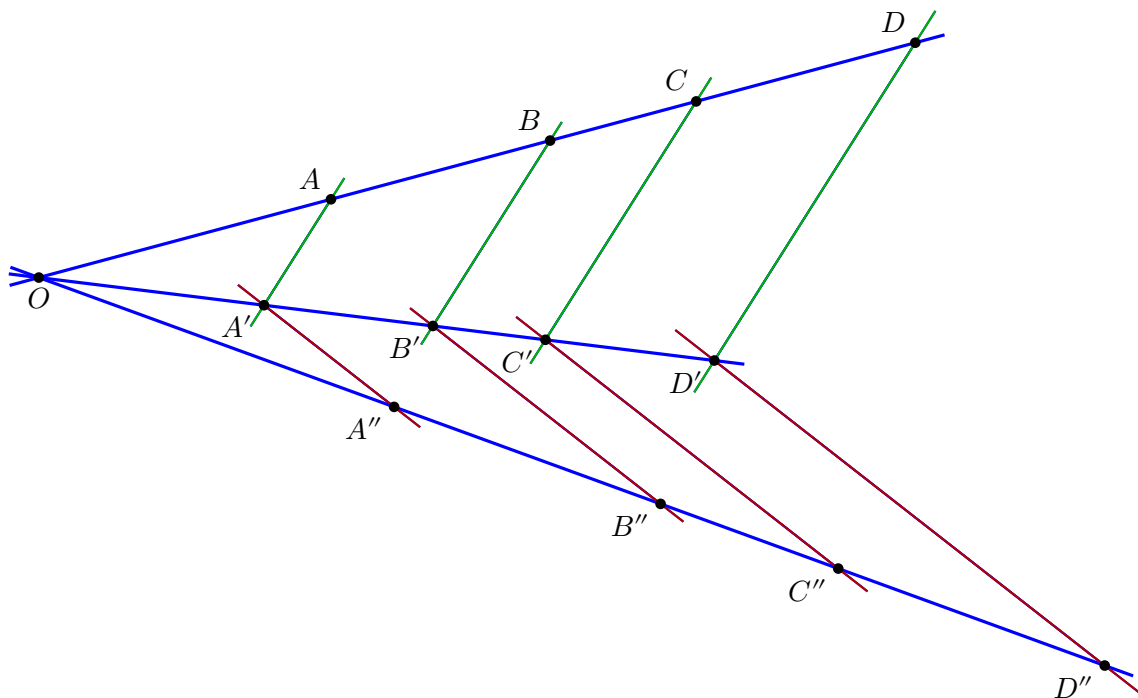


Figura 3.34 Figura b

- c)  $\overline{OA} = 4,2$ ,  $\overline{AB} = 3$ ,  $\overline{A'B'} = 2,43$ ,  $\overline{B'C'} = 3,07$ ,  $\overline{CD} = 1,2$ ,  $\overline{DO'} = 4,8$ ,  $\overline{D'O'} = 2,07$ ,  $\overline{D'E'} = 1,25$ ,  $\overline{EO'} = 0,92$

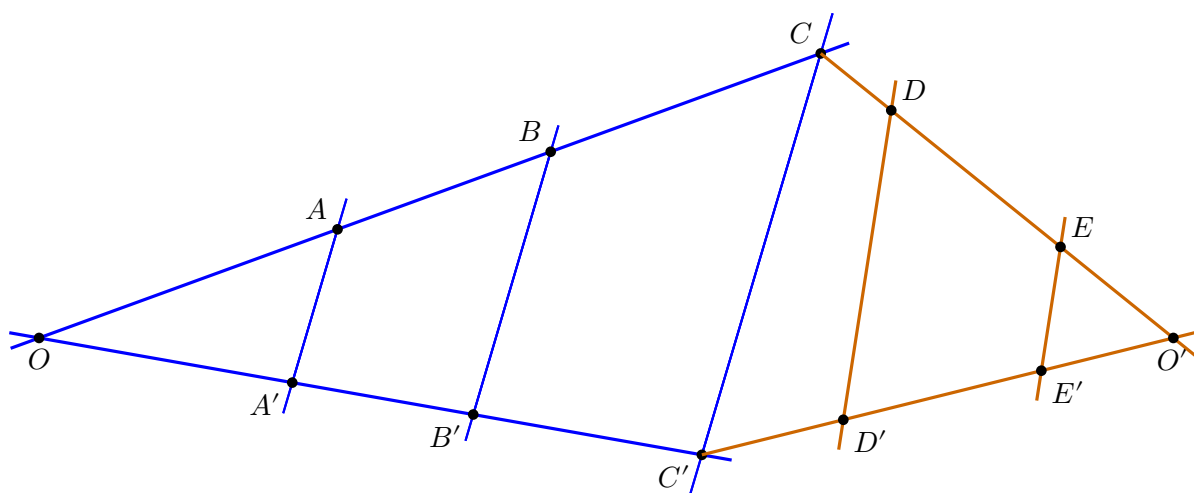


Figura 3.35 Figura c

1. Exercici 401

- a)  $\overline{BC} = 4,7$  cm,  $\overline{A'B'} \simeq 2,43$  cm,  $\overline{B'C'} = 3,80$  cm  
 b)  $\overline{AB} = 3,1$  cm,  $\overline{BC} = 4,5$  cm,  $\overline{OA'} \simeq 4,91$  cm,  $\overline{A'B'} \simeq 3,24$  cm  
 c)  $\overline{AB} = 7,74$  cm,  $\overline{BC} = 3,96$  cm  
 d)  $\overline{OA'} \simeq 6,24$  cm,  $\overline{A'B'} \simeq 4,77$  cm,  $\overline{B'C'} \simeq 3,33$  cm,  $\overline{C'D'} \simeq 3,77$  cm,  $\overline{BC} \simeq 2,72$  cm,  $\overline{CD} \simeq 3,08$  cm  
 e)  $\overline{OA'} = 3,08$  cm,  $\overline{C'D'} \simeq 4,17$  cm,  $\overline{B'C'} \simeq 2,53$  cm,  $\overline{A'B'} \simeq 4,67$  cm,  $\overline{AB} \simeq 4,93$  cm,  $\overline{BC} \simeq 2,67$  cm  
 f)  $\overline{BC} = 2,2$  cm,  $\overline{OA} \simeq 4,31$  cm,  $\overline{OA'} = 5,53$  cm,  $\overline{B'C'} = 2,82$  cm,  $\overline{A'B'} \simeq 3,97$  cm,  $\overline{C'D'} \simeq 3,08$  cm

2. Exercici 405

- a)  $\overline{OC'} = 5,34$ ,  $\overline{CD} = 2,8$ ,  $\overline{OC} = 4,2$ ,  $\overline{AB} = 4,8$ ,  $\overline{A'B'} = 3,56$   
 b)  $\overline{OA'} = 3$ ,  $\overline{AB} = 3$ ,  $\overline{A''B''} = 3,75$ ,  $\overline{B'C'} = 1,5$ ,  $\overline{B''C''} = 2,5$ ,  $\overline{CD} = 3$ ,  $\overline{C''D''} = 3,75$   
 c)  $\overline{OA'} = 3,4$ ,  $\overline{BC} = 3,8$ ,  $\overline{C'D'} = 0,89$ ,  $\overline{DE} = 3,88$ ,  $\overline{E'O} = 0,82$
-



### 3.1.5 Hipsòmetre

**Activitat 406.** (Ús de l'hipsòmetre) Amb l'ajuda del Teorema de Tales podem mesurar l'altura d'objectes inabastables, com una farola o un edifici.

- Podem fer servir l'*hipsòmetre* (vegeu la pàgina a continuació)
- Podeu fer servir l'informe d'activitat proposat

Materials necessaris:

- Cinta mètrica
- Regle de 30 cm
- Fil i un objecte que es pugui fermar, el qual es farà servir de plomada (per exemple, una agulla o un xiclet)
- Llapis i paper



# Hipsòmetre

CC-BY [somenxavier@gmail.com](mailto:somenxavier@gmail.com)

## Referències

- Anton Aubanell. [Fitxa 25](#)
- Transportador d'angles @ [Wikipedia](#)

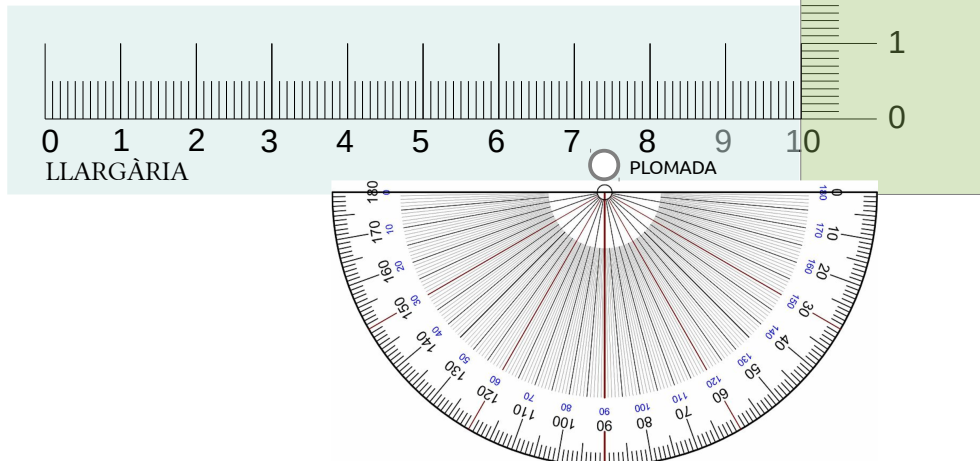
## Característiques

Escala: 1:1

Inclinació màxima: 61° aprox.

## Instruccions

- Imprimir la pàgina
- Plastificar-la
- Foradar el lloc de la plomada
- Passa un fil amb un pes
- Per prendre mesures, substituir el punter làser de la F25 per un regle prou llarg ( $\geq 22$  cm)



## Informe de mesura amb l'hipsòmetre

### Grup

Alumne/a	Nom
Número 1	
Número 2	

### Dades de l'entorn

Camp	Valor
Lloc	
Data	
Objecte a mesurar	

### Longituds conegudes

Vegeu la figura 3.36.

Longitud	Valor
Llargària hipsòmetre (segment $\overline{AB}$ )	
Altura de l'objecte <i>sobre</i> l'hipsòmetre (segment $\overline{BC}$ )	
Distància entre nosaltres i l'objecte a mesurar (segment $\overline{AB'}$ )	

## Càlcul de la longitud desconeguda

Longitud	Valor
<p>Alçada relativa de l'objecte a mesurar (segment <math>\overline{B'C'}</math>).</p> <p>(Apliqueu el teorema de Tales)</p>	
<p>Alçada absoluta de l'objecte a mesurar (segment <math>\overline{B'C'}</math> més l'altura a la qual està l'hipsòmetre)</p>	

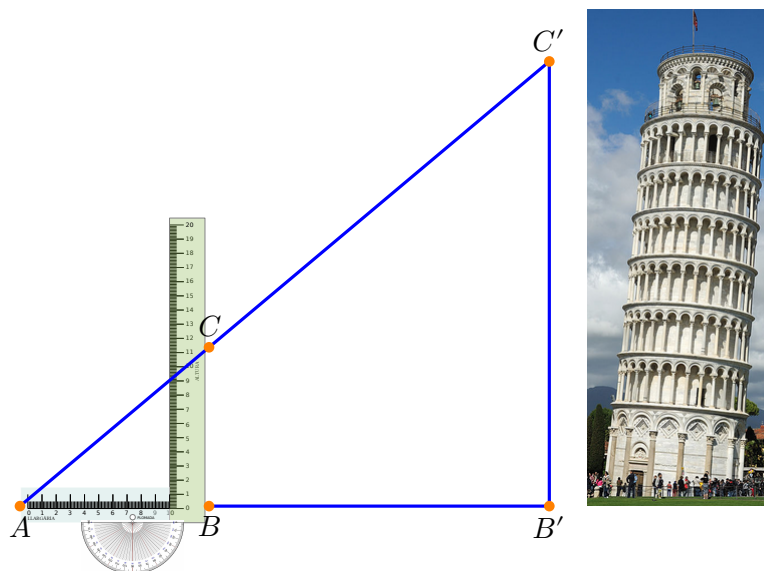
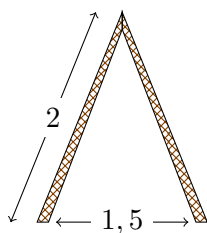


Figura 3.36 Representació de les longituds conegudes i desconegudes

**Exercici 407.** Calculeu l'altura d'un xiprer que projecta una ombra de 5 metres sabent que, en el mateix moment, un castanyer petit, d'1,8 m d'altura, projecta una ombra de 60 cm.

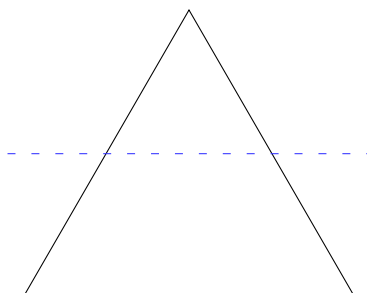
**Exercici 408.** Què fa l'altura d'una torre que projecta una ombra de 18,5 m si sabem que, en el mateix moment, un arbre de 3,5 m d'altura projecta una ombra de 0,75 m.

**Exercici 409.** (L'escala) Volem construir una escala triangular, a partir de dos pals de fusta de 2 metres de llarg cadascun (figura 3.37). L'únic que sabem és que la separació entre els dos pals és de 1,5 metres a la base i que tindrà escalons cada 30 cm. Quina amplada tendran aquests escalons?



**Figura 3.37** Esquema de l'escala triangular

**Exercici 410.** (Tallar el pastís) Tenim un triangle equilàter de costat 10 cm. El volem tallar amb un sol tall recte paral·lel a la seva base (figura 3.38). A quina distància de la base hem de fer el tall per a què les àrees resultants siguin iguals?



**Figura 3.38** Tall paral·lel a la base

# 4

## TEOREMA DE PITÀGORES I COSSOS GEOMÈTRICS

### 4.1 Teorema de Pitàgores

#### 4.1.1 Tipus de figures planes

Existeixen diversos tipus de figures planes. Les més usuals són les següents (figura 4.1).

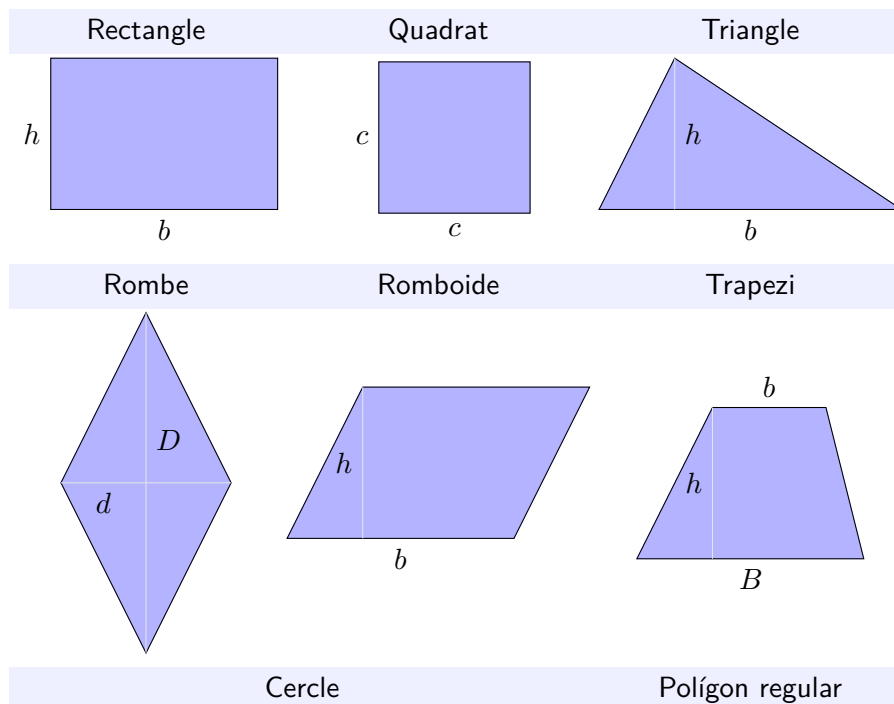


Figura 4.1a Àrees de les figures planes més usuals

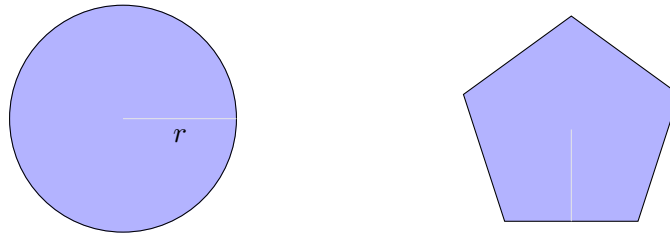


Figura 4.1b Àrees de les figures planes més usuals

Les fórmules de les àrees d'aquestes figures són les següents (figura 4.2).

Figura	Àrea	Figura	Àrea
Rectangle	$A = b \cdot h$	Quadrat	$A = c \cdot c = c^2$
Triangle	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	Rombe	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide	$A = b \cdot h$	Trapezi	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Cercle	$A = \pi \cdot r^2$	Polígon regular	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

Figura 4.2 Àrea de les figures més usuals

**Exercici 411.** No fa falta saber la fórmula de totes les figures, ja que sempre es poden reduir a unions de rectangles i triangles. Ho podíeu demostrar? Podeu deduir les fórmules de cadascuna de les figures anteriors? Podeu usar tisores i cinta adhesiva.

## 4.1.2 Tipus de triangles

Existeixen diversos tipus de triangles, segons els costats o segons els angles que els formen (figura 4.3).

Segons els costats	Segons els angles
Equilàter: té tots els costats iguals	Acutangle: té tots els angles aguts
Isòsceles: té dos costats iguals i un diferent	Rectangle: té un angle recte
Escalè: té tots els costats diferents	Obtusangle: té un angle obtús

Figura 4.3 Classificació dels triangles

**Exercici 412.** Podíeu posar exemples de triangles a les categories anteriors? Quina relació hi ha entre aquestes categories? Podeu saber si un triangle pot pertànyer a dues categories alhora?

Al llarg d'aquest apartat ens ocuparem del triangles rectangles. Els costats dels triangles rectangles tenen noms particulars:



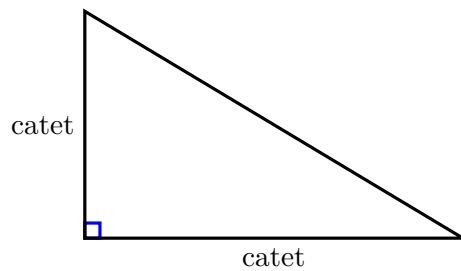


Figura 4.4 Triangle rectangle

- L'angle recta es denota per un cantó d'un rectangle ■ i no per un arc de circumferència ◡
- La *hipotenusa* és el costat major del triangle rectangle. Correspon al costat oposat de l'angle recte
- Els costats que són adjacents a l'angle recte són els *catets*.

**Resultat 1. (teorema de Pitàgores)** *En un triangle rectangle, es compleix que la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels dos catets al quadrat, és a dir,*

$$h^2 = c^2 + d^2,$$

on  $h$  denota la hipotenusa i  $c$  i  $d$  els catets del triangle rectangle.

### Demostració

Sigui un triangle rectangle qualsevol (figura 4.5), amb  $h$  la hipotenusa i  $c$  i  $d$  els dos catets. Denotem per  $A_t$  la seva àrea, és a dir,  $A_t = (d \cdot c)/2$ . Amb aquest triangle, podem construir dos quadrats (figura 4.6).

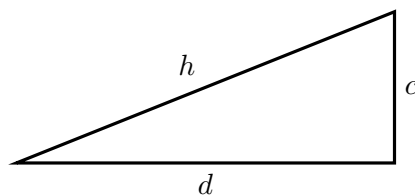


Figura 4.5 Triangle rectangle genèric

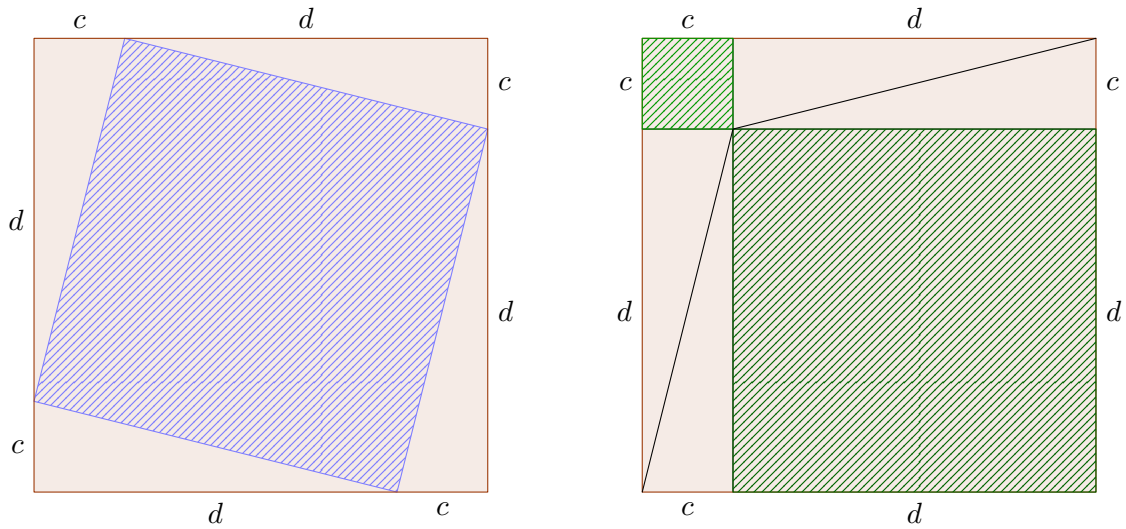


Figura 4.6 Quadrats formats amb el triangle inicial

- Les àrees dels dos quadrats són les mateixes, ja que les dues àrees valen  $(c + d)^2$ .
- L'àrea del primer quadrat és igual a la suma de quatre vegades l'àrea del triangle inicial (figura 4.5) més l'àrea del quadrat ratllat. És a dir,

$$A = 4A_t + h^2$$

- L'àrea del segon quadrat és igual a quatre vegades l'àrea del triangle inicial (figura 4.5) més l'àrea ratllada. Aquesta àrea està composta per l'àrea de dos quadrats, d'àrees  $c^2$  i  $d^2$ . És a dir,

$$A = 4A_t + c^2 + d^2$$

- Com que les àrees dels dos quadrats són iguals, això vol dir que  $4A_t + h^2 = 4A_t + c^2 + d^2$ . Per tant,

$$h^2 = c^2 + d^2,$$

que és precisament el teorema de Pitàgores.

Podeu consultar una versió dinàmica de la prova del teorema de Pitàgores [aquí \(versió local\)](#), creada usant [Geogebra](#).

□

**Exercici 413.** Trobeu (a.) què valen els costats, (b.) l'àrea i (c.) el perímetre dels triangles següents (figura 4.7).

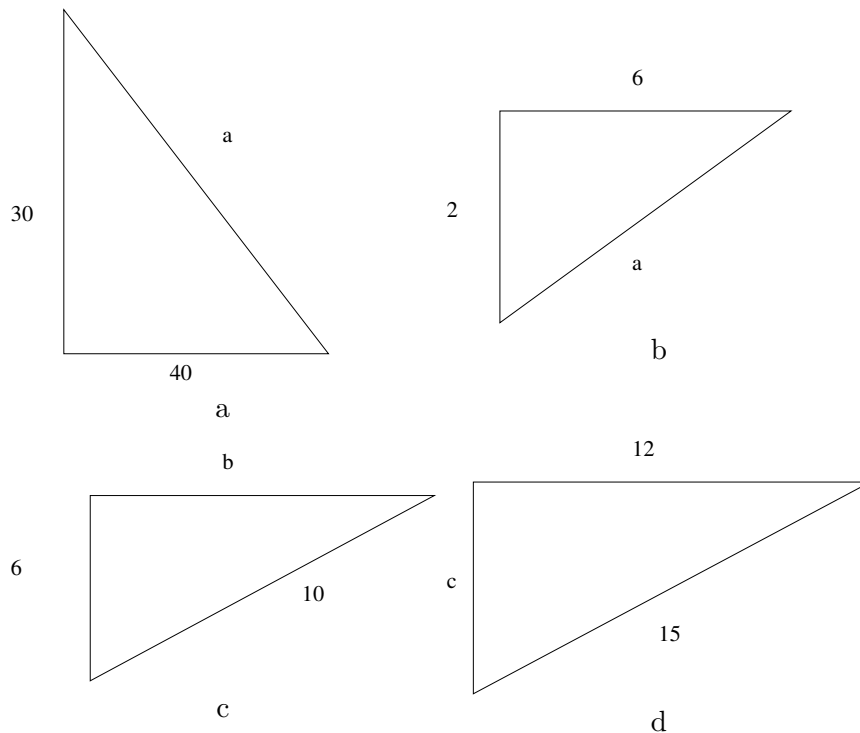


Figura 4.7a Diverses figures

**Exercici 414.** Calculeu la diagonal del rectangle que té base 5,2 cm i altura 2,9 cm.

**Exercici 415.** Calculeu l'altura d'un triangle isòceles els costats del qual mesuren l'un 4,8 m i l'altre 3,6 m.

**Exercici 416.** En una urbanització s'han protegit 310 finestres quadrades de 1,26 m de costat amb una cinta adhesiva especial, com es veu a la figura 4.8. Quants metres de cinta s'han fet servir?



Figura 4.8 Esquema de la cinta adhesiva

**Exercici 417.** Una escala de 3,7 m de longitud es troba recolzada en una paret, quedant el peu a 1,5 m d'ella. A quina altura arriba l'escala sobre la paret?

**Exercici 418.** Calculeu el perímetre d'un triangle rectangle la hipotenusa del qual mesura 50 cm, i un dels seus catets 40 cm.

**Exercici 419.** Determineu, sense dibuixar-lo, si un triangle de costats 7, 8 i 9 cm és rectangle.

**Exercici 420.** Calculeu l'apotema d'un hexàgon regular de 5 cm de costat.

**Exercici 421.** Calculeu l'altura d'un triangle isòsceles els costats iguals del qual mesuren 16 cm i el costat desigual 10 cm.

**Exercici 422.** Calculeu la mesura de la diagonal d'un rectangle de costats 6 i 8 cm.

**Exercici 423.** Un futbolista entrena corrent la diagonal del terreny de joc d'un camp de futbol, anada i tornada, 30 cops tots els dies (figura 4.9). Quina distància total recorre? El terreny de joc té unes mides de  $105 \times 67$  m.

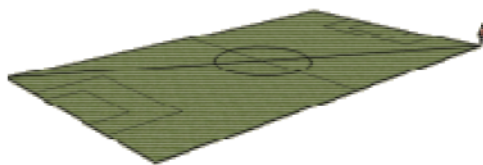


Figura 4.9 Camp de futbol

**Exercici 424.** En un triangle rectangle, un catet fa 4 cm i l'altre fa 3 cm. Calculeu la hipotenusa

**Exercici 425.** En un triangle rectangle, la hipotenusa fa 8 cm i un catet fa 4 cm. Calculeu l'altre catet

**Exercici 426.** Calculeu la diagonal d'un rectangle de base 5 cm i altura 8 cm

**Exercici 427.** En una habitació que fa  $10 \times 50$  metres, volem anar de cantó a cantó. Calculeu quina distància recorrerem.

**Exercici 428.** Un edifici té una altura de 80 metres i nosaltres esteim a una distància de 25 metres. Calculeu la distància que hi ha des del punt més alt de l'edifici a on esteim

**Exercici 429.** En un triangle isòsceles, l'altura fa 10 cm i els costats iguals fan 15 cm. Calculeu la seva base

**Exercici 430.** En un triangle isòsceles, la base fa 50 cm i l'altura fa 10 cm. Calculeu què fan els costats semblants

**Exercici 431.** Trobeu l'àrea i el perímetre de les següents figures (figura 4.10). Potser sigui necessari aplicar el teorema de Pitàgores per trobar algun costat.

**Exercici 432.** Calculeu l'àrea i el perímetre de les figures següents (figura 4.7).

**Exercici 433.** Trobeu els costats  $b$  i  $h$  d'aquest triangle (figura 4.12).

**Exercici 434.** Trobeu els costats que falten (figura 4.13).

**Exercici 435.** Trobeu la diagonal d'un cub de 10 cm d'aresta

**Exercici 436.** Trobeu la diagonal d'una porteria de futbol de 2,44 m d'alt i 7,32 m de llarg.

**Exercici 437.** Quina és l'àrea d'un hexàgon regular de 6 cm de radi?

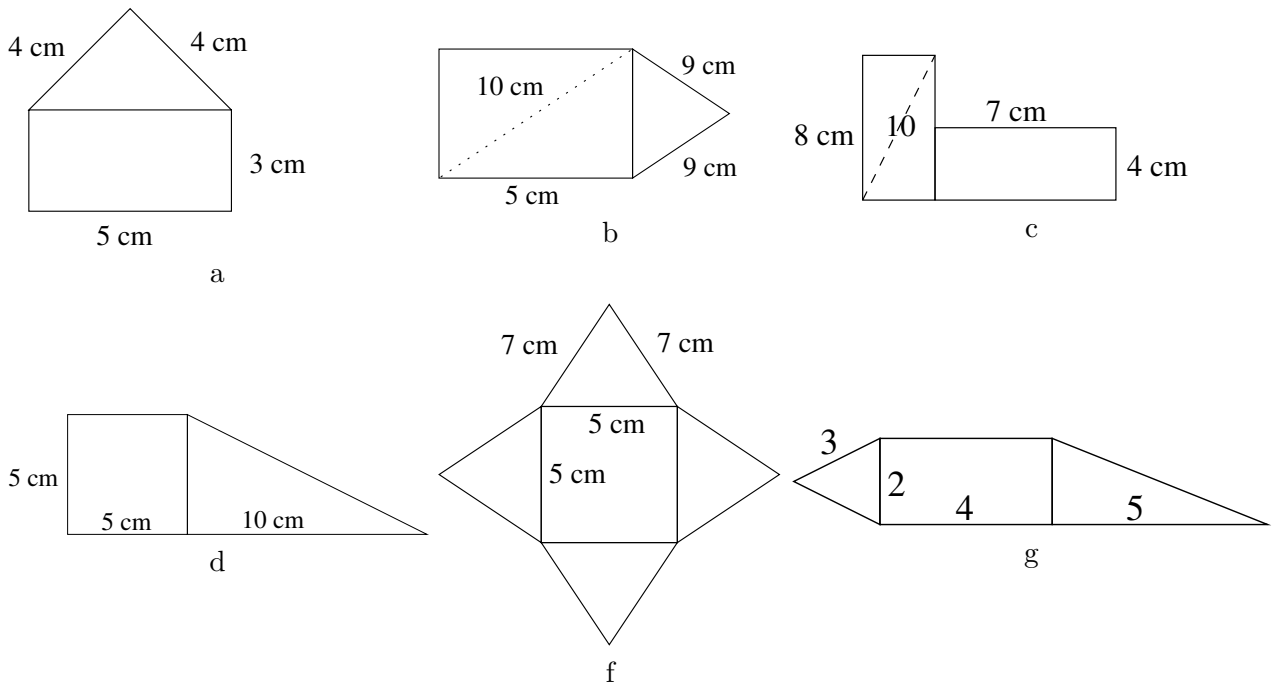


Figura 4.10 Diverses figures

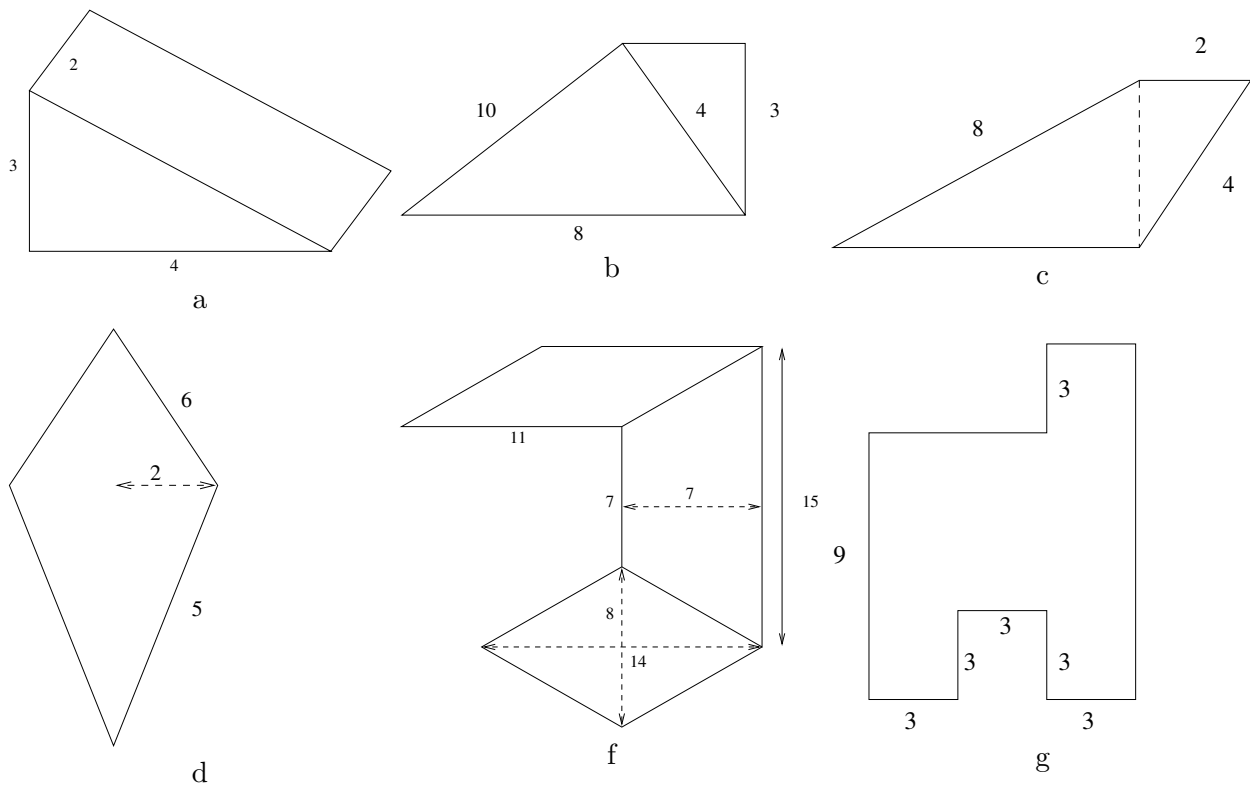


Figura 4.11 Diverses figures

**Exercici 438.** Calculeu l'àrea d'un quadrat si sabem que la seva diagonal mesura 15 cm.

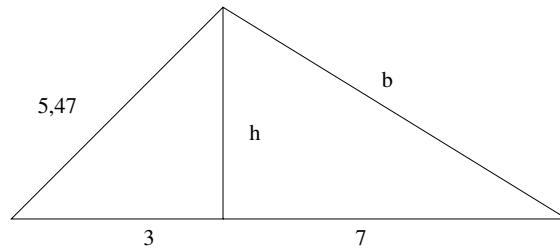


Figura 4.12 Triangle escalè

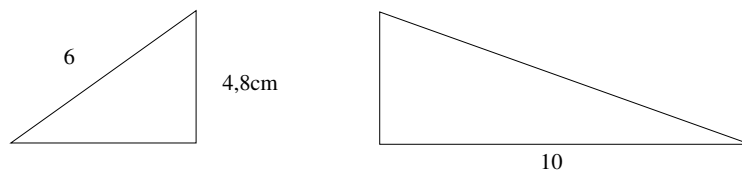


Figura 4.13 Diversos triangles

**Exercici 439.** Trobeu l'àrea d'un triangle equilàter de 8 cm de costat.

**Exercici 440.** Des d'una torre de fusta 20 m d'alçada es vol muntar una tirolina al terra. Si volem que la base de la tirolina estigui a 100 m de la torre, de quina llargària necessitem la corda de la tirolina?

**Exercici 441.** Amb un punter làser sabem que la distància des d'un observador a l'extrem superior d'un arbre és de 20 m. Si sabem que l'observador està a 7 m de l'arbre, calculeu l'altura de l'arbre

**Exercici 442.** Volem mesurar l'altura de la muntanya *B*. Les dades que sabem és que (a.) La muntanya *A* fa 200 m (b.) la distància entre els cims és de 500 m i (c.) el desplaçament horitzontal entre les muntanyes és de 100 m (vegeu figura 4.14)

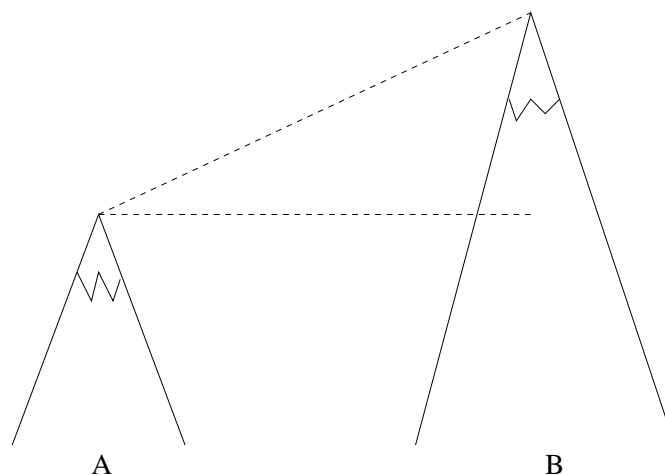


Figura 4.14 Diversos triangles

**Exercici 443.** Dos vaixells surten al mateix temps des del mateix punt: un en direcció nord i l'altre en direcció oest a 15 i 18 nusos, respectivament. Calculeu quina distància els separarà al llarg de 6 hores. I al cap de 10 hores. Nota: un nus són 1,852 km/h.

**Exercici 444.** El disseny de la forma i dimensions d'una muntanya russa són els que s'indiquen a la figura (figura 4.15) (totes les mesures es donen en metres). Sabem que el punt més alt es troba a 56 m. Calculeu la longitud total de la muntanya russa.

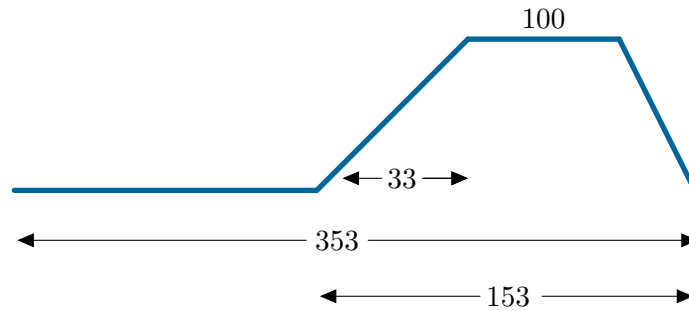


Figura 4.15 Muntanya russa en construcció

**Exercici 445.** Dibuixeu un triangle equilàter de 8 cm de costat. Quina és l'àrea de la corona circular determinada per la circumferència inscrita i circumscrita al triangle?

**Exercici 446.** (\*) Dibuixeu un triangle isòsceles de 17 cm de base. L'altura corresponent a un dels costats iguals és igual a 15 cm. Trobeu l'àrea del triangle.

### Solució

En primer lloc, calcularem un tros d'un dels costats semblants (figura 4.16a):  $17^2 = 15^2 + x^2$ , amb el que  $x = 8$ . Amb aquesta informació, si fem servir que el triangle és isòsceles, aleshores podem calcular la longitud dels costats semblants (figura 4.16b).

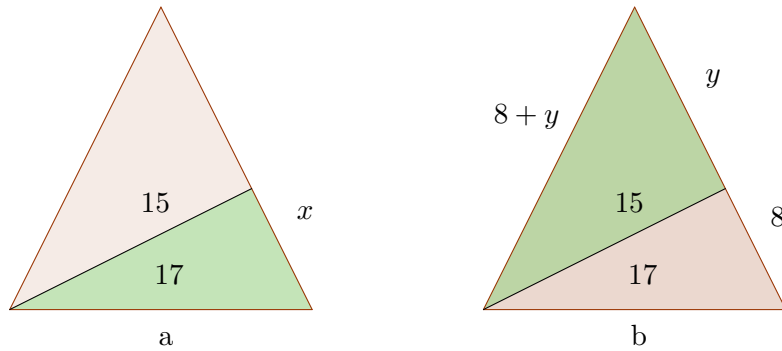


Figura 4.16 Càlcul d'una part d'un costat



— Solucions de “Teorema de Pitàgores” —

---

1. Exercici 414: 5, 95.
  2. Exercici 415: 4, 44 m.
  3. Exercici 416:  $310 \cdot 1,7819 \text{ m} = 552,39 \text{ m}$ .
  4. Exercici 417: 3, 38 m.
  5. Exercici 424: 5 cm
  6. Exercici 425: 6, 92 cm
  7. Exercici 426: 9, 43 cm
  8. Exercici 427: 50, 99 m
  9. Exercici 428: 83, 81 m
  10. Exercici 429: 22, 36 cm
  11. Exercici 430: 26, 92 cm
  12. Exercici 431: (a.)  $A = 30,61 \text{ cm}^2$ ,  $P = 19 \text{ cm}$ ; (b.)  $A = 77,42 \text{ cm}^2$ ,  $P = 36,66 \text{ cm}$ ; (c.)  $A = 76 \text{ cm}^2$ ,  $P = 38 \text{ cm}$ ; (d.)  $P = 36,18 \text{ cm}$ ; (e.)  $A = 50 \text{ cm}^2$ ; (f.)  $A = 5,64+8+10 \text{ cm}^2$ ,  $P = 24,38 \text{ cm}$
  13. Exercici 446: Els costats del triangle fan 17 i 20 cm. L'àrea fa  $150 \text{ cm}^2$ .
-

## 4.2 Cossos geomètrics

**Exercici 447.** L'apotema d'una piràmide quadrangular regular mesura 12 cm i la seva aresta bàsica 10 cm. Trobau (a.) quant fa l'altura (b.) quina àrea i quin volum té la piràmide

**Exercici 448.** Si sabem que el costat d'un cub fa 5 cm, calculeu el seu volum i la seva àrea lateral

**Exercici 449.** Si sabem que el volum d'una capsa és de  $200 \text{ cm}^3$ , podeu trobar què fa d'alt si sabem que la base és un rectangle de  $10 \times 20 \text{ cm}$ ?

**Exercici 450.** Un pintor té l'encàrreg de pintar un edifici en forma d'ortoedre. L'únic que sap és que l'amplada de l'edifici és la meitat que la seva llargària i que la altura és de 20 metres.

Si al final, el pintor ha gastar 2000 litres de pintura, quina altura té l'edifici?

Nota: el pintor gasta 1 litre de pintura cada  $5 \text{ m}^2$ .

# Àrees de cossos geomètrics



## Per a practicar

1. Estic construint una piscina de 5,7 metres de llargada, 4 metres d'amplada i 1,9 metres d'alçada. Vull recobrir les parets i el fons amb rajoles de forma quadrada de 20 cm de costat. Quantes rajoles necessitaré si aproximadament se'n malmeten un 10%?



2. Una mare compra a la seva filla una caixa dels seus bombons favorits. La caixa té forma de prisma triangular de 21 cm de llargada i 12 cm de costat de la base. Quina és la quantitat de paper mínima que es necessita per embolicar-la?



3. Es vol restaurar el lateral i la part superior d'una torre amb forma de prisma octogonal de 12 m d'altura. La base és un octàgon regular de 3 m de costat i 3,62 metres d'apotema. Si l'empresa de restauració cobra 226 euros per cada metre quadrat, quin serà el preu de la restauració?



4. Una pizzeria fa pizzas de diverses mides i les ven en caixes hexagonals de 39 cm de costat i 4,7 cm d'alçada. Quina quantitat de cartó es necessita per cada caixa tenint en compte que la caixa està formada per dues parts compostes d'una base i el lateral?

5. Una piràmide egípcia de base quadrada té 150 metres d'altura i 139 metres d'aresta de la base. Quina és la seva superfície lateral?



6. Calcula els metres quadrats de tela que es necessiten per a fabricar un para-sol amb forma de piràmide dodecagonal de 84 cm d'aresta de la base i 194 cm d'aresta lateral.



7. La part exterior del teulat d'un edifici té forma de tronc de piràmide de bases quadrades de 47 m i 51 m de costat respectivament. L'aresta lateral de la teulada mesura 7,3 m. Calcula la superfície.



8. Un test de plàstic té forma de tronc de piràmide hexagonal. Els costats de les bases mesuren respectivament 36 i 42 cm i l'aresta lateral mesura 7,5 cm. Calcula la quantitat de plàstic que es necessita per a la seva fabricació.





## Àrees de cossos geomètrics

9. Una llauna de conserves té 16,6 cm d'altura i 8,4 cm de radi de la base. Quant de metall es necessita per a la seva fabricació? Quant de paper es necessita per a l'etiqueta?



10. Es volen tractar dos dipòsits amb pintura antioxidant. Els dipòsits tenen 7,3 metres d'altura i 9,7 metres de radi de la base. El preu per pintura de cada metre quadrat és de 39 euros. Quin és el preu final de la pintura, sabent que només es pinta la base superior de cadascun?



11. Una copa té forma de con de 10,2 cm de generatriu i 9,5 cm de diàmetre de la circumferència superior. La base és una circumferència de 4,9 cm de radi. Cada vegada que es neteja, quina superfície de cristall s'ha de netejar?



12. Es vol condicionar una sitja antiga amb forma de con. Per això s'aplicarà una capa aïllant a la paret interior i al terra. Les dimensions de la sitja són 16,5 metres d'altura i 7,5 metres de radi de la base. Quina quantitat de superfície s'ha de tractar?



13. Un got de plàstic té 7,1 cm de diàmetre superior i 5,6 cm de diàmetre inferior. La generatriu mesura 12,6 cm. Quants metres quadrats de plàstic s'han necessitat per fabricar 150 gots?



14. He comprat un paper resistent a la calor per fabricar-me una làmpada amb forma de tronc de con, de 17,3 cm de diàmetre superior i 15,7 cm de diàmetre inferior. L'altura fa 32,2 cm. Quant de paper necessito?



15. Sabent que el radi de la Terra és de 6370 quilòmetres, calcula la superfície del nostre planeta utilitzant diferents aproximacions del número  $\pi$ .

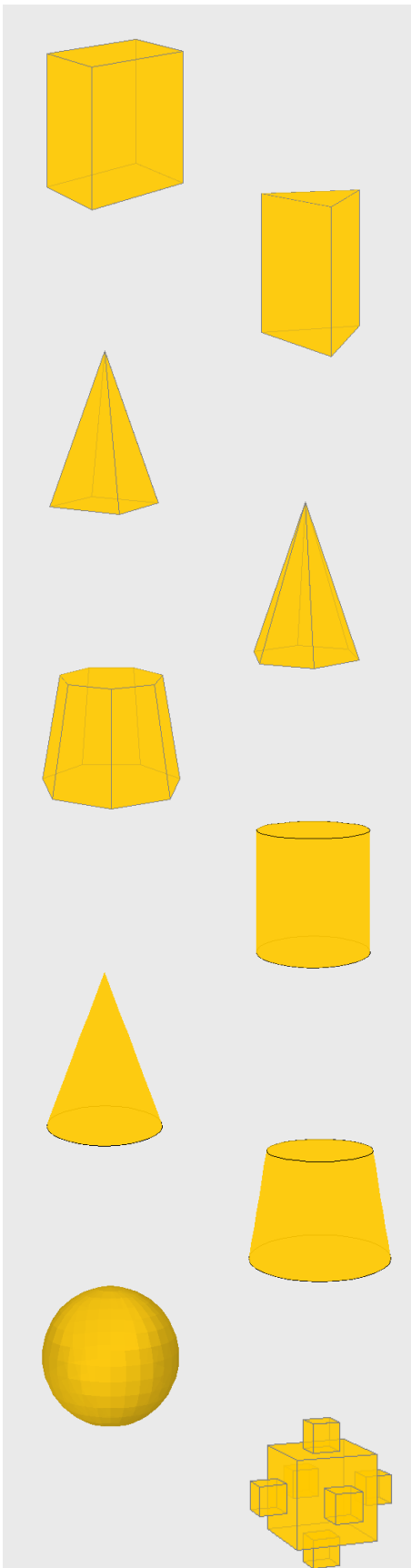
a) 3    b) 3,14    c) 3,1416    d)  $\pi$



16. a) Calcula la superfície d'una pilota de 5 cm de radi.  
b) Calcula la superfície d'una pilota de radi doble de l'anterior.  
c) Calcula la superfície d'una pilota de radi 10 vegades major que la primera.  
d) Quina relació hi ha entre les superfícies de les esferes?







1. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de 72 metres de llargada, 42 metres d'amplada i 26 metres d'alçada.
2. Calcula l'àrea total d'un prisma triangular de 55 metres d'altura i 30 metres d'aresta de la base.
3. Calcula l'àrea total d'una piràmide de base quadrada de 69 metres d'altura i 77 metres d'aresta de la base.
4. Calcula l'àrea total d'una piràmide hexagonal de 114 metres d'aresta lateral i 100 metres d'aresta de la base.
5. Calcula l'àrea total d'un tronc de piràmide de 7 cares laterals sabent que les arestes de les bases mesuren respectivament 47 i 71 metres, l'aresta lateral mesura 62 metres i les apotemes de les bases mesuren respectivament 48, 80 i 73,78 metres.
6. Calcula l'àrea total d'un cilindre de 81 metres d'altura i 15 metres de radi de la base.
7. Calcula l'àrea total d'un con de 29 metres d'altura i 42 metres de radi de la base.
8. Calcula l'àrea total d'un tronc de con la generatriu del qual mesura 24 metres i els radis de les bases mesuren respectivament 41 i 57 metres.
9. Calcula l'àrea d'una esfera de 67 metres de radi.
10. Calcula l'àrea total d'aquest cos geomètric sabent que l'aresta del cub petit mesura 13 metres i l'aresta del cub gran és el triple.





# Àrees de cossos geomètrics

## Solucions dels exercicis per practicar

1. 1641 rajoles
2.  $880,71 \text{ cm}^2$
3. 74905,44 euros
4.  $10102,95 \text{ cm}^2$
5.  $45958,58 \text{ m}^2$
6.  $9,55 \text{ m}^2$
7.  $1376,05 \text{ m}^2$
8.  $4975,59 \text{ cm}^2$
9.  $1319,57 \text{ cm}^2$  de metall  
 $876,13 \text{ cm}^2$  de paper
10. 57759,37 euros
11.  $455,28 \text{ cm}^2$
12.  $603,76 \text{ m}^2$
13.  $4,14 \text{ m}^2$
14.  $1669,64 \text{ cm}^2$
15. a)  $486922800 \text{ km}^2$   
b)  $509645864 \text{ km}^2$   
c)  $509905556,16 \text{ km}^2$   
d)  $509904363,78 \text{ km}^2$
16. a)  $314,16 \text{ cm}^2$   
b)  $1256,64 \text{ cm}^2$   
c)  $31415,93 \text{ cm}^2$   
d) la relació és igual al quadrat de la relació entre els radis.

## Solucions AUTOAVALUACIÓ

1.  $11976 \text{ m}^2$
2.  $5729,42 \text{ m}^2$
3.  $18097,19 \text{ m}^2$
4.  $56715,76 \text{ m}^2$
5.  $51468,83 \text{ m}^2$
6.  $9047,79 \text{ m}^2$
7.  $12276,23 \text{ m}^2$
8.  $22877,08 \text{ m}^2$
9.  $56410,44 \text{ m}^2$
10.  $13182 \text{ m}^2$


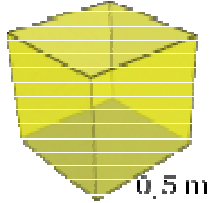
No oblidis enviar les activitats al tutor ►



# Volum dels cossos geomètrics.

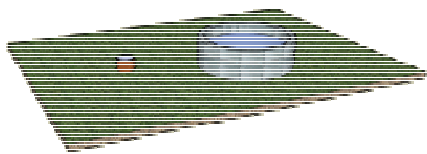


## Per a practicar

- Expressa els següents volums en litres:
  - $3 \text{ dm}^3$
  - $50 \text{ dam}^3$
  - $1200 \text{ cm}^3$
  - $0,0007 \text{ m}^3$
- Expressa les següents quantitats en  $\text{cm}^3$ :
  - $0,00001 \text{ dam}^3$
  - $10 \text{ dm}^3$
  - $30000 \text{ mm}^3$
  - $1,5 \text{ m}^3$
- Quants gots de  $250 \text{ cm}^3$  es poden omplir amb  $0,04 \text{ m}^3$  d'aigua?
- Transforma en  $\text{m}^3$ :
  - $0,006 \text{ hm}^3$
  - $788 \text{ dm}^3$
  - $0,00008 \text{ km}^3$
  - $16000 \text{ mm}^3$
- Un pantà té una capacitat de  $450 \text{ hm}^3$ . Si actualment està a un 76% de la seva capacitat, quants metres cúbics d'aigua conté?  

- Expressa:
  - $34 \text{ hm}^3$  en  $\text{km}^3$
  - $3440 \text{ cm}^3$  en  $\text{m}^3$
  - $2,34 \text{ km}^3$  en  $\text{dam}^3$
  - $0,000008 \text{ dm}^3$  en  $\text{mm}^3$
  - $34567 \text{ cm}^3$  en  $\text{dm}^3$
  - $0,02 \text{ m}^3$  en  $\text{cm}^3$
- M'han encarregat 6 litres de refresc de taronja. A la botiga només queden ampolles de 250 cl. Quantes n'he de comprar?
- Dóna un valor que et sembli raonable per cadascuna de les següents capacitats:
  - Capacitat d'un got d'aigua.
  - Capacitat d'un pantà gran.
  - Capacitat d'una piscina de un xalet.
  - Capacitat del maleter d'un cotxe.
- Quina quantitat és més gran, mig metre cúbic o el volum d'un cub de mig metre d'aresta? Raona la resposta.  

- Calcula el volum, en litres, d'un cub de 2 m d'aresta.
- Troba el pes d'un bloc cúbic de formigó de 2,3 m d'aresta. (Un metre cúbic de formigó pesa 2350 Kg.)
- Calcula, en litres, el volum d'un *tetrabrik* les dimensions del qual són  $12 \times 7 \times 15 \text{ cm}$ .
- Durant una tempesta es van registrar unes precipitacions de 80 litres per metre quadrat. Quina alçada assoliria l'aigua en un recipient cúbic de 10 cm d'aresta?
- Una piscina té unes dimensions de  $7 \times 4 \times 2 \text{ m}$ . Quan de temps trigaran en omplir-la dues aixetes el cabal de les quals és de 70 litres per minut per cadascuna d'elles?
- Calcula, en litres, el volum d'un con que té 12 cm d'altura i la base del qual té un radi de 5 cm.
- Quantes vegades cal buidar un cub cilíndric de 40 cm d'altura i 20 cm de radi per omplir un dipòsit cilíndric de 2,5 m d'altura i 3 m de radi?

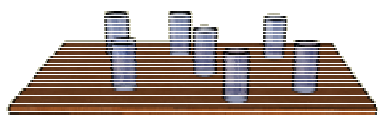


# Volumen de los cuerpos geométricos.



17. S'aboquen  $2,5 \text{ cm}^3$  d'aigua en un recipient cònic la base del qual té  $1,7 \text{ cm}$  de radi i una altura de  $2,8 \text{ cm}$ . Quin percentatge de la capacitat del recipient omplim?

18. Quants vasos cilíndrics de  $19 \text{ cm}$  d'altura i  $2,7 \text{ cm}$  de radi es poden omplir amb  $3,8$  litres de refresc?

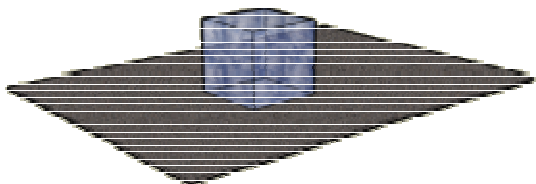


19. Introduïm una bola de plom, de  $0,6 \text{ cm}$  de radi, en un recipient cilíndric de  $3,1 \text{ cm}$  d'altura i  $0,9 \text{ cm}$  de radi. Calcula el volum d'aigua necessari per omplir el recipient.

20. Quants metres cúbics d'aigua es consumeixen en buidar 6 vegades al dia una cisterna de  $7,5$  litres durant 30 dies?

21. Quants litres d'aigua pot contenir un dipòsit amb forma d'ortocèdrec, si les seves mides interiors són  $189 \times 60 \times 58 \text{ cm}$ ?

22. Quina quantitat d'aigua s'obté en desfer un bloc cúbic de gel de  $31,4 \text{ cm}$  d'aresta? (La densitat del bloc de gel és  $0,917 \text{ g/cm}^3$ ).



23. Quants peixos, petits o mitjans, podem introduir en un aquari les mides interiors del

qual són  $129 \times 51 \times 47 \text{ cm}$ ? (Es recomana introduir, com a màxim,, un peix, petit o mitjà, cada quatre litres d'aigua).

24. Quant temps trigarà una aixeta en omplir un dipòsit si aboca  $130$  litres d'aigua per minut? El dipòsit és un prisma de  $3,6 \text{ m}$  d'altura i base hexagonal, de  $2 \text{ m}$  de costat i  $1,7 \text{ m}$  d'apotema.

25. Calcula el pes, en tones, d'una piràmide de formigó, amb una base quadrada de  $6 \text{ m}$  de costat i  $17 \text{ m}$  d'altura. Un metre cúbic de formigó pesa  $2,35$  tones.

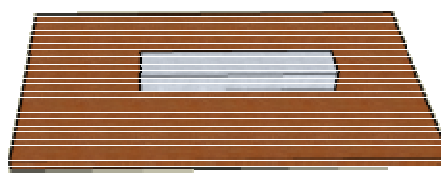
26. Calcula el volum d'un tronc de con de  $6,1 \text{ cm}$  d'altura, sabent que els radis de les seves bases són  $6,1 \text{ cm}$  i  $3,8 \text{ cm}$ .

27. Troba el volum, en litres, d'una esfera de  $25 \text{ cm}$  de radi.

28. Un paral·lelepípede té una altura de  $12 \text{ cm}$  i les seves bases són rombes les diagonals dels quals mesuren  $7 \text{ cm}$  i  $4 \text{ cm}$ . Calcula el seu volum.

29. S'aboquen  $150 \text{ cm}^3$  d'aigua en un got cilíndric de  $4 \text{ cm}$  de radi. Quina altura assolirà l'aigua?

30. Calcula el pes en grams d'un lingot de plata de  $24 \times 4 \times 3 \text{ cm}$ . La densitat de la plata és  $10,5 \text{ g/cm}^3$ .



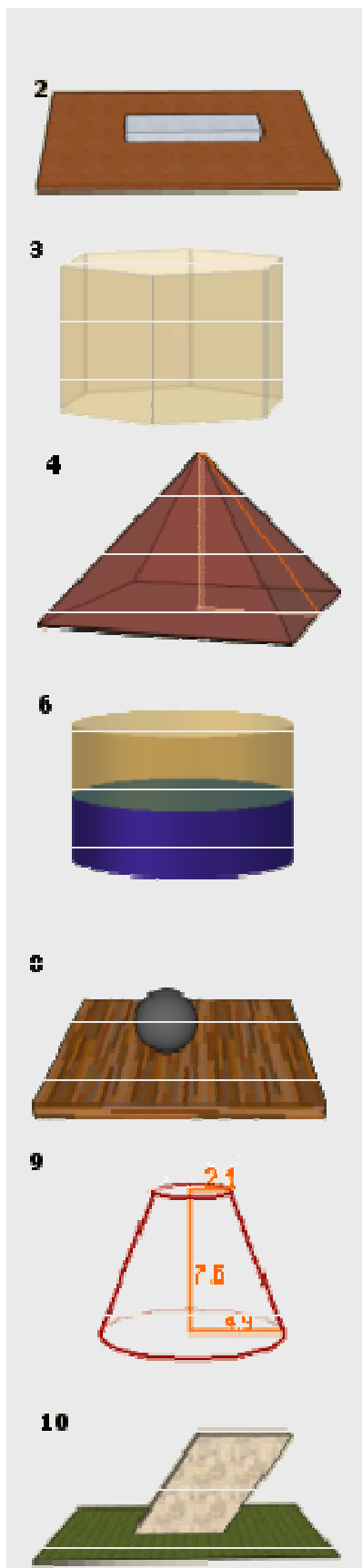
31. L'etiqueta lateral de paper, que envolta completament una llauna cilíndrica de tomata fregida, fa  $25 \times 13 \text{ cm}$ . Calcula el volum de la llauna.

32. Calcula el pes d'un fil cilíndric de coure de  $2 \text{ mm}$  de diàmetre i  $1350 \text{ m}$  de longitud, sabent que la densitat del coure és  $8,9 \text{ g/cm}^3$ .



# Volum dels cossos geomètrics.

## Autoavaluació



1. La capacitat d'un pantà és de  $295 \text{ hm}^3$ . Expressa aquesta capacitat en litres.
2. Calcula el pes en grams d'un lingot de plata de  $19 \times 4 \times 3 \text{ cm}$ . La densitat de la plata és  $10,5 \text{ g/cm}^3$ .
3. Calcula el volum del prisma de la figura, l'altura del qual és  $4 \text{ cm}$  i el costat de la base del qual fa  $2,4 \text{ cm}$ . L'apotema de la base fa  $1,6 \text{ cm}$ .
4. L'apotema d'una piràmide regular fa  $11 \text{ dm}$  i la base és un quadrat de  $15 \text{ dm}$  de costat. Calcula el seu volum.
5. Quants blocs cúbics de pedra, aproximadament, de  $50 \text{ cm}$  de aresta, fan falta per construir una piràmide regular amb base quadrada de  $208 \text{ m}$  de costat i  $101 \text{ m}$  d'altura?
6. S'aboquen  $19,8 \text{ cm}^3$  d'aigua en un recipient cilíndric de  $1,8 \text{ cm}$  de radi. Quina altura assolirà l'aigua?
7. Quantes copes puc omplir amb  $11 \text{ litres}$  de refresc, si el recipient cònic de cada copa té una altura interior de  $9 \text{ cm}$  i un radi interior de  $5 \text{ cm}$ ?
8. Quants quilograms pesa una bola de plom de  $17 \text{ cm}$  de radi? El plom té una densitat de  $11,4 \text{ g/cm}^3$ .
9. Calcula el volum d'un tronc de con de  $7,6 \text{ cm}$  d'altura, sabent que els radis de les seves bases fan  $4,9 \text{ cm}$  i  $2,1 \text{ cm}$ .
10. Calcula el volum de l'escultura de la imatge, sabent que les seves bases son rectangles de  $3 \times 12 \text{ dm}$  i la seva altura  $20 \text{ dm}$ .





# Volum dels cossos geomètrics.

## Solucions dels exercicis per practicar

1. a) 3 l  
b) 50.000.000 l  
c) 1,2 l  
d) 0,7 l
2. a) 10.000 cm<sup>3</sup>  
b) 10.000 cm<sup>3</sup>  
c) 30 cm<sup>3</sup>  
d) 1.500.000 cm<sup>3</sup>
3. 160 gots.
4. a) 6.000 m<sup>3</sup>  
b) 0,788 m<sup>3</sup>  
c) 80.000 m<sup>3</sup>  
d) 0,000016 m<sup>3</sup>
5. 342.000.000 m<sup>3</sup>
6. a) 0,034 km<sup>3</sup>  
b) 0,00344 m<sup>3</sup>  
c) 2.340.000 dm<sup>3</sup>  
d) 8 mm<sup>3</sup>  
e) 34,567 dm<sup>3</sup>  
f) 20.000 cm<sup>3</sup>
7. 24 ampolles.
8. a) 250 cm<sup>3</sup>  
b) 500 hm<sup>3</sup>  
c) 70 m<sup>3</sup>  
d) 350 l
9. Mig metre cúbic. Un cub de mig metre d'aresta té un volum de 0,125 m<sup>3</sup>.
10. 8.000 l
11. 28592,45 kg
12. 1,26 l
13. 8 cm
14. 400 minuts.
15. 0,31 l
16. 1407 vegades.
17. 29,5%
18. 8 gots.
19. 6,99 cm<sup>3</sup> de  
agua.
20. 1,35 m<sup>3</sup>
21. 657,7 l
22. 28,4 l
23. 77 peces
24. 282,5 minuts.
25. 300 m<sup>2</sup>
26. 3409,07 TN
27. 478,01 cm<sup>3</sup>
28. 168 cm<sup>3</sup>
29. 2,98 cm.
30. 3024 g
31. 646,54 cm<sup>3</sup>
32. 37,75 kg

## Solucions AUTOEVALUACIÓN

1. 295.000.000.000 l
2. 2.394 g
3. 46,08 cm<sup>3</sup>
4. 603,75 dm<sup>3</sup>
5. 11.652.437 blocs aprox.
6. 1,95 cm
7. 46 copes
8. 234,6 kg
9. 308,08 cm<sup>3</sup>
10. 720 dm<sup>3</sup>

No t'oblidis d'enviar les activitats al tutor ►

# 5

## ÀLGEBRA

### 5.1 Llenguatge algebraic

#### 5.1.1 Llenguatge formal i llenguatge literari

**Exercici 451.** Expressen en llenguatge algebraic:

- El doble d'un nombre.
- La resta d'un nombre menys cinc.
- El quadrat d'un nombre més un altre nombre.
- La cinquena part d'un nombre més cinc.

**Exercici 452.** Passeu a llenguatge algebraic aquestes frases:

- Dues vegades un nombre desconegut
- La suma d'un nombre desconegut i cinc
- La meitat d'un nombre menys la cinquena part d'aquest mateix nombre
- El quadrat d'un nombre
- El terç de la suma de dos nombres qualssevol

**Exercici 453.** Passeu a llenguatge algebraic:

- “La suma de tres i cinc és igual a vuit”
- “Cinc més un nombre és igual a deu”
- “Dues vegades un nombre més quatre és igual a vint”
- “El triple d'un nombre més quatre és trenta-quatre”
- “Dues vegades un nombre més dos és igual a quaranta-dos”
- “Cinquanta menys vint són trenta”
- “Tres vegades un nombre més tres és igual a trenta”

- h. “El doble d’un nombre més cinc és igual a quinze”
- i. “La resta de dos i un nombre desconegut és deu”
- j. “La suma d’un nombre desconegut i cinc és diset”

**Exercici 454.** Passeu a llenguatge algebraic les frases següents:

- a. “El doble d’un nombre més dos és igual a vint-i-quatre”
- b. “El triple d’un nombre més deu és igual a aquest nombre més dos”
- c. “La suma d’un nombre desconegut i dos és igual a dues vegades aquest nombre desconegut”
- d. “La resta d’un nombre desconegut i cinc és igual a cent”
- e. “El doble de la suma d’un nombre i cinc és igual a vint-i-quatre”
- f. “Un nombre desconegut més dos dóna quaranta-vuit”

**Exercici 455.** El nombre de litres de benzina consumits i el nombre de quilòmetres recorreguts es relacionen de la següent manera. Si diem  $n$  a un nombre genèric de litres consumits, quants de quilòmetres recorrerem si consumim  $n$  litres de benzina, segons la taula?

Litres	3	4	5	6	7	...	$n$
Quilòmetres	33	43	53	63	73	...	

**Exercici 456.** Relacioneu la frase amb l’expressió algebraica corresponent:

– Frases:

- a. La meitat d’un nombre
- b. La suma de dos nombres consecutius
- c. La resta d’un nombre desconegut i deu
- d. Deu vegades un nombre

– Expressions algebraiques:

- a.  $10x$
- b.  $\frac{x}{2}$
- c.  $\sqrt{x}$
- d.  $5 - x + 10$
- e.  $x:2$
- f.  $x \cdot 10$
- g.  $x + y$
- h.  $x - 10$
- i.  $10 - x$
- j.  $y + x$

**Exercici 457.** Escriviu en llenguatge algebraic:

- a. El triple d'un nombre més dos.
- b. Un nombre menys la seva meitat.
- c. El doble de la suma d'un nombre més tres.
- d. Tres menys la suma d'un nombre més el seu doble.
- e. Set més un nombre disminuït en quatre unitats.
- f. Un nombre més el seu quadrat.
- g. El doble d'un nombre.
- h. El quadrat d'un nombre.
- i. Un terç d'un nombre menys el doble d'un altre.
- j. Un nombre menys el seu triple.
- k. La suma de dos nombres consecutius.
- l. El quocient entre un nombre i un altre.
- m. El producte de dos nombres parells consecutius.
- n. El quocient entre dos nombres consecutius.
- o. El quadrat de la suma de dos nombres.
- p. El producte de dos nombres parells consecutius és 48.
- q. Uns pantalons i una camisa costen 80 € en total. La camisa costa 35 € menys que els pantalons.
- r. En augmentar 2 cm el costat d'un quadrat, la seva superfície augmenta  $24 \text{ cm}^2$ .
- s. La diferència entre els quadrats d'un nombre i el nombre anterior a aquest és 21.
- t. La suma de dos nombres és 22 i la seva diferència és 8.

## 5.1.2 Identitats i equacions

**Activitat 458.** (“Sempre, de vegades, mai”). Activitat manipulable: es tracta de classificar cartolines amb igualtats segons si aquestes passen sempre, a vegades o mai. Veure carpeta 01-Sempre-a-vegades-mai/

**Exercici 459.** Digueu si les igualtats següents són identitats o equacions:

- a.  $3x + 2 = 5$
- b.  $-2x + 5 = 4x + 5 - 6x$
- c.  $2x - 1 = 2x$
- d.  $3x - 1 = 4x - x - 1$
- e.  $2(x + 1) = 2x + 2$
- f.  $2x + 8x = 8x + 2x$
- g.  $6x = 2x \cdot 3x$
- h.  $10x = 2x \cdot 5$
- i.  $5x + 6 = 2x + 3x + 7$
- j.  $x^2 - 3 = 2x - 3$
- k.  $5x^2 + x = 2x^2 + 2x + 3x^2 - x$
- l.  $5x^3 = 2x^3 - (-3x^3)$

**Exercici 460.** Quin terme (o termes) manca per a què les igualtats següents siguin certes?

- a.  $3a \underline{\hspace{2cm}} = 6a$
- b.  $4a \underline{\hspace{2cm}} = 2a - 3b$
- c.  $4a \underline{\hspace{2cm}} + b = 6a - b + 1$
- d.  $\frac{a}{3} - b \underline{\hspace{2cm}} \frac{2a}{3} + 2b$
- e.  $\frac{a}{3} + \underline{\hspace{2cm}} = \frac{a}{2}$

**Exercici 461.** Diguen si les següents expressions són equacions o identitats. Justifiqueu la resposta.

- a.  $x + 3x = 4x$
- b.  $7x^2 - 5x^2 + 2 = 2x^2 + 2$
- c.  $10x - 1 = 9$

## 5.2 Equacions

### 5.2.1 Equacions senzilles i amb parèntesi

**Exercici 462.** Resoleu les equacions següents i comproveu-ne la solució

a)  $3x + 2 = 35$

c)  $56x + 33 = -23$

b)  $11x - 18 = 4$

d)  $5x + 25 = 125$

**Exercici 463.** Resoleu les equacions següents:

a)  $5x + 2 = 10x - 18$

d)  $-x - 20 = 8x + 781$

b)  $4x + 90 = -4 + 2x$

e)  $3x - 2 = 8x + 4 - 8x$

c)  $16x - 8 = x + 22$

f)  $\frac{x}{4} - 4 = 32$

**Exercici 464.** Resoleu:

a)  $3x + 5 = 7x - 2$

e)  $3(x + 2) = 5x$

b)  $8x - 10 = 8x - 10x + 2$

f)  $2(x - 1) = x + 5$

c)  $x - 2 = 4x + 5$

g)  $6x - 2x + 3x = 5(-x + 2)$

d)  $7x - 8 = 5x + 2$

h)  $8x = 7x + x + x - 2$

**Exercici 465.** Resoleu:

a)  $6x + 2 - x = 7x - 6 + 2x + 8 + 2x + 6$

f)  $7x + 3 - 4x + 8 = -3 + 4x + 19$

b)  $x + 2 - 2x + 5x + 2 = 6x - 3 + 4$

g)  $24x - 8 + 6x + 1 = 42x + 1$

c)  $-x + 2x - 1 + 5x + 4 = 7x + 2 + 40x - 81$

h)  $-2 - x + 10 + 8x = -4x + 24x$

d)  $28x - 34 + 20x - 100 = 10x - 2 + 35x$

i)  $2x + 5 - x + 2 = 2x + 2 + 14x$

e)  $80x - 20 + 70x = 79x - 2x - 93$

j)  $5x + 4 - 2x + 8 + 7x + 3 = -20x$

**Exercici 466.** Resoleu:

a)  $6(x + 2) - x + 2 - 8x = 7x - 2 - (7 - 2x) + 35$

b)  $-(x + 2) - 2(-3 - x) + 5x - 3 = 5(x + 2) - 6x - 16$

c)  $-3(x + 2) - 1 + 5(-x - 4) = -7(-5x - 2) + x - (-x + 2) + 51$

d)  $5(5x - 2) - 30 - 20(-3x + 2) = 5 - (10x - 2) + 5x + 183$

- e)  $8(x - 3) + 5 - 40x = 5 - (8x - 5) + 13$   
 f)  $5 - 3(4x - 1) + 6(x - 10) + 3 = 5 + 2(x + 2) - (10x - 5) - 64$   
 g)  $5(x - 2) + 5x - (2 - 5x) + 1 = 3(x - 2) + 3$   
 h)  $12 - 12(2 - 3x) + 120 = -48(x + 2) + 239$   
 i)  $1 - (x - 4) - (5 - 2x) - (-3 - 4x) = 6(2x - 3) - 7(-2x + 3)$

**Exercici 467.** Resoleu:

- a)  $3x - (x - 2) = 4x + 1$   
 b)  $4(x + 3) - (2x - 7) = 6x + 18$   
 c)  $5 - (3 - x) = 2(x + 2) - 3$   
 d)  $2x - (9x + 2) + 4x = 43 - x + 8 - x - 13$   
 e)  $2(x - 2) - (5 - x) = 3x + 2 - 6(x + 2)$   
 f)  $2x - (x - 3) - 2(5 - x) = 6 - x + 8x - 1$

**Exercici 468.** Resoleu:

- a)  $5x + 10 - 4x - 3x - 4 + 2x = 5x - 6x$   
 b)  $x - 1 + 2x - 2 - 3x + 4 = 5x - 6 + 7$   
 c)  $2x + 5x - 7 + 5x = 10x - 6$   
 d)  $x - 3x + 6 - 3x = 9x + 7 - 2x$   
 e)  $2x - 3x + 6 + x = 9 + x + 7$   
 f)  $9x - 81 + 25x - 70 - 45x - 91 = 0$

**Exercici 469.** Resoleu les equacions següents amb parèntesi:

- a)  $2(x + 4) - 3(-x - 2) + 3 = 4x + 16$   
 b)  $-2(1 - x) + 4 - x = -2(-2 - 2x) + 2x - 2$   
 c)  $-(1 - x) + 4(x + 2) = -1(-2 - x) - 2 + 11x$

**Exercici 470.** Resoleu les equacions següents amb parèntesi:

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $x - 5(x - 2) = 6x$          | f) $5(x + 4) = 7(x - 2)$       |
| b) $120 = 2x - (15 - 7x)$       | g) $3(x + 7) - 6 = 2(x + 8)$   |
| c) $6(x + 11) = 40 + 6(x + 2)$  | h) $60x + 1 = 3(3 + 4x)$       |
| d) $2(x - 17) = x - 3(12 - 2x)$ | i) $3(x + 8) = 6(x - 2) + 24$  |
| e) $x - 5(x - 2) = 6$           | j) $7(x - 18) - 3(x - 14) = 0$ |

k)  $3x - 4(x - 2) - 5 = x + 10 - (x + 5) + x$       l)  $5x - 3(x + 5) = 3x + 10$

**Exercici 471.** Resoleu:

$$5x + 80 - 3(5 - 7x) = 2x - 5(2x - 4) - (3 - x).$$

**Exercici 472.** Resoleu les equacions següents:

a)  $2x - 4 = 5$

f)  $x - (4 + 7x) = -80x - (9x + 24)$

b)  $5x - 2x + 1 = x + 3$

g)  $55(x - 9) + x = -4(x + 84) - 45x$

c)  $60x - 40 + 74x = 80x - 90x + 24$

h)  $4 - (4x - 11) + 56x = 2(x + 1)$

d)  $55x - 99x + 845 + x = -4x + 84 + 45x$

i)  $x + (2x - 20) = 4(x - 45)$

e)  $44x - 11 + 56x = 2x + 1$

**Exercici 473.** Resoleu:

$$x + 2x - 20 + 3x - 35 = 4x - 45 + 55x - 58 + 76x - 90.$$



— Solucions de “Equacions senzilles i amb parèntesi” —

---

462(a.)  $x = 11$  (b.)  $x = 2$  (c.)  $x = -1$  (d.)  $x = 20$

463(a.)  $x = 4$  (b.)  $x = -47$  (c.)  $x = 2$  (d.)  $x = -89$  (e.)  $x = 2$  (f.)  $x = 144$

464(a.)  $x = 7/4$  (b.)  $x = 6/5$  (c.)  $x = -7/3$  (d.)  $x = 5$  (e.)  $x = 3$  (f.)  $x = 7$  (g.)  $x = 5/6$  (h.)  $x = 2$

465(a.)  $x = -1$  (b.)  $x = 3/2$  (c.)  $x = 2$  (d.)  $x = 44$  (e.)  $x = -1$  (f.)  $x = -5$  (g.)  $x = -2/3$  (h.)  $x = 8/13$  (i.)  $x = 1/3$  (j.)  $x = -1/2$

466(a.)  $x = -1$  (b.)  $x = -1$  (c.)  $x = -2$  (d.)  $x = 3$  (e.)  $x = -7/4$  (f.)  $x = -1/2$  (g.)  $x = 2/3$  (h.)  $x = 5/12$  (i.)  $x = 2$

467(a.)  $x = 1/2$  (b.)  $x = 1/4$  (c.)  $x = 1$  (d.)  $x = -40$  (e.)  $x = -1/6$  (f.)  $x = -3$

468(a.)  $x = -6$  (b.)  $x = 0$  (c.)  $x = 1/2$  (d.)  $x = -1/12$  (e.)  $x = -10$  (f.)  $x = -22$

469(a.)  $x = -1$  (b.)  $x = 0$  (c.)  $x = 1$

470(a.)  $x = 1$  (b.)  $x = 15$  (c.) no té solució (d.)  $x = 2/5$  (e.)  $x = 1$  (f.)  $x = 17$  (g.)  $x = 1$  (h.)  $x = 1/6$  (i.)  $x = 4$  (j.)  $x = 21$  (k.)  $x = -1$  (l.)  $x = -25$

471  $x = -16/11$

472(a.)  $x = 9/2$  (b.)  $x = 1$  (c.)  $x = 761/84$  (d.)  $x = 6/49$  (e.)  $x = -20/83$  (f.)  $x = 53/35$  (g.)  $x = -13/50$  (h.)  $x = 160$

473  $x = 46/43$

---

## 5.2.2 Comprovació

### Exercici 474.

a. ¿És  $x = -2$  solució de l'equació

$$3x - (4x + 2) - 6(3 - x) = 7 \quad ?$$

b. ¿És  $x = \frac{1}{2}$  solució de l'equació

$$2(2x - 3) - (9 + x) = -25x \quad ?$$

Exercici 475. Resol i comprova:

a.

$$8x - 4x - 49 = 12x + 80 - x$$

b.

$$5 - (2 - x) = 4(x + 2) - 11$$

Exercici 476. Resol i comprova:

$$3(x - 2) + 3x + 4 = 5 - (x - 2) + 2x + 1$$

Exercici 477. Comproveu si  $x = -2$ ,  $x = 2$  o  $x = 0$  són solucions de les equacions següents:

a.  $2x - 6 + x = -15 + 2x + 9$

f.  $2x - 4(x + 3) = 5 + x$

b.  $2 - (2x + 3) = 5x + 13$

g.  $3 \cdot (6 + x) = 2 \cdot (x + 2) + 12$

c.  $5x - (50 + 2x) = x - 3$

h.  $4(x - 2) - x = 2 - 4(x - 2)$

d.  $45(-x - 2) - 2x - 4 = 0$

i.  $3x - 10 = x - 10 + 2x$

e.  $x - (2x - 3) + 2(2x - 3) = 3$

Exercici 478. Trobeu dos nombres que **no** siguin solució de les equacions següents:

a.  $6x - 4 = 50$

g.  $3x - 1 + 2x - 1 = 1 + 5x + 3$

b.  $-6x + 3 = 21$

h.  $50x + 30 = 80x + 20 - 60x$

c.  $\frac{x}{4} - 4 = 32$

i.  $89x - 8 - 4x + 45x = 44 - x$

j.  $44x - 45 + x = 45x - 2 + x$

d.  $6x - 3 + 30x = 9 - 2x$

k.  $x - 3 = 2x - 3$

e.  $2x - 4 + x = 6x - 3 + x$

l.  $89x - 78 + 17x = 64 + 4x + 12$

f.  $12x - 8 - 5x = 5x + 1$

Exercici 479. És cert que totes les equacions han de tenir solució? Per justificar la teva resposta, resol les equacions següents:

a.  $4x - 3 = 2x + 2$

b.  $4x - 3 = 2x + 2 + 2x$

c.  $6x - 2 = 2x - 1 + 4x - 1$

Reflexiona què surt en cada cas i *per què*?

**Exercici 480.** Resol les equacions següents i, si en té, comprova la solució:

a.  $3 \cdot (6x - 4) - x = 50$

c.  $-(6x - 3) + 30 \cdot (x - 9) - 2x = 0$

b.  $-6 \cdot (x + 3) - (2x + 3) = 21$

d.  $-2x - 4 + 5 \cdot (x - 3) = 6x - 3 + x$

Solucions de “Comprovació”

---

1. Exercici 476:  $x = 2$
  2. Exercici 477: (a.)  $x = 0$  és solució, (b.)  $x = -2$  és solució, (c.) Cap és solució, (d.)  $x = -2$ , (e.)  $x = 2$ , (f.) Cap és solució, (g.) Cap és solució, (h.)  $x = -2$ , (i.) Tots ho són (qualsevol nombre és solució)
-

## 5.2.3 Equacions amb denominadors

Exercici 481. Resol:

$$\frac{3x}{4} + x + 2x = 3 \left( \frac{x}{2} - 2 \right) + 3x + 3$$

Exercici 482. Resol les equacions següents:

a.

$$\frac{2x-5}{5} - \frac{x-1}{3} = x - 10$$

b.

$$\frac{5}{2}(4x-3) + \frac{3x}{5} = 10x - \left( \frac{x}{4} + 4 + \frac{x+1}{4} \right) - \frac{13}{4}$$

c.

$$2 - (3-x) - \frac{x+2}{3} - \frac{3-x}{5} = 8 + \frac{x-1}{12}$$

d.

$$3 \left( x + \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{3}(2-4x) = \frac{x}{4} + x - \frac{12-x}{2} + \frac{10x+4}{3}$$

e.

$$2 - (3-x) - \frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{12} - 1$$

Exercici 483. Resoleu aquestes equacions:

a.

$$\frac{x}{2} + 30 = 2x$$

d.

$$2 + \frac{x}{3} - 4 = \frac{2x}{3} - 11$$

b.

$$x - 1 = \frac{3x}{4}$$

e.

$$\frac{x}{3} + 4 - \frac{x}{2} = x - 10$$

c.

$$x - 20 = \frac{x}{3} + 2$$

f.

$$\frac{x}{3} + x - \frac{x}{2} + 2 = \frac{2x}{3} - \frac{5x}{4} + \frac{3x}{2}$$

g.

$$\frac{3x}{15} + x - \frac{x}{20} + 2 = -\frac{7x}{12} + x - 42$$

h.

$$\frac{2x}{6} + x - \frac{-10x}{15} + 2 = 2x - 2$$

i.

$$x + 5 = \frac{x + 3}{3}$$

j.

$$\frac{x}{2} + \frac{x - 3}{3} = 3$$

k.

$$\frac{x}{3} - \frac{x + 2}{2} + x + \frac{4x - 2}{2} = 3x - 7$$

l.

$$\frac{x + 4}{5} - \frac{x + 3}{4} = 1 - \frac{x + 1}{2}$$

m.

$$\frac{x}{3} - \frac{x - 2}{2} - \frac{-2x - 4}{2} + 4 = x + 3$$

n.

$$\frac{2x - 1}{2} + \frac{4x - 1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{x}{3} + \frac{6x - 1}{2}$$

o.

$$\frac{4x - 12}{-4} + \frac{x}{3} = x + \frac{9 - 2x}{3} - 3$$

p.

$$\frac{1}{2}(2x - 3) - x = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

q.

$$\frac{1}{3}(1 - 2x) + x - \frac{x}{6} = \frac{1}{4}(3x + 12) - \frac{8}{3}$$

r.

$$\frac{5x - 1}{6} = \frac{1}{3}(4 + x) + 1$$

s.

$$\frac{x + 2}{3} - 4 = \frac{x}{2} - 6x + 20$$

t.

$$\frac{x}{2} - \frac{2x + 7}{5} = 5$$

u.

$$\frac{x}{4} + 5 = \frac{7x}{12}$$

v.

$$x + \frac{2(x - 3)}{4} - \frac{5(x + 1)}{10} = 1$$

w.

$$\frac{x+8}{2} - \frac{x-4}{6} = 2$$

$$\frac{x-10}{2} - \frac{x-20}{4} - \frac{x-30}{3} = 5$$

y.

x.

$$\frac{3-x}{7} - x + \frac{3+2(x-1)}{14} = 5$$

**Exercici 484.** Resol:

$$\frac{3x}{8} + x + 2x - 6 = 3\left(\frac{x}{4} - 2\right) + 3x$$

**Exercici 485.** Resol:

a.

$$1 - (2-x) - \frac{x+3}{4} = \frac{x-1}{12} - 1$$

b.

$$\frac{2x-3}{3} + 5x - \frac{5x-3}{4} + 2 = 2(3x+1) - 5$$

c.

$$\frac{3}{2}(4x-3) + \frac{2x}{3} = 5x - \left(\frac{x}{4} + 4 + \frac{x+1}{2}\right)$$

d.

$$\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} - 2\left(x + \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{2}(2x-1) - \frac{269}{2}$$

e.

$$x - 1 = \frac{3x}{4}$$

f.

$$x - 20 = \frac{x}{3} + 2$$

g.

$$\frac{2x}{5} - \frac{5x}{10} - 6 = 4x + \frac{5x}{12} + 265$$

h.

$$670 + \frac{x}{3} - (3x + 2) = x + \frac{7x}{10} + 2(x - 3) - \frac{3x}{4}$$

Exercici **486**.

$$3x - 2(x + 3) + 4 - \left(-x + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{2} - \frac{1}{3}(3x - 6) + \frac{x}{4}$$



———— Solucions de “Equacions amb denominadors” ————

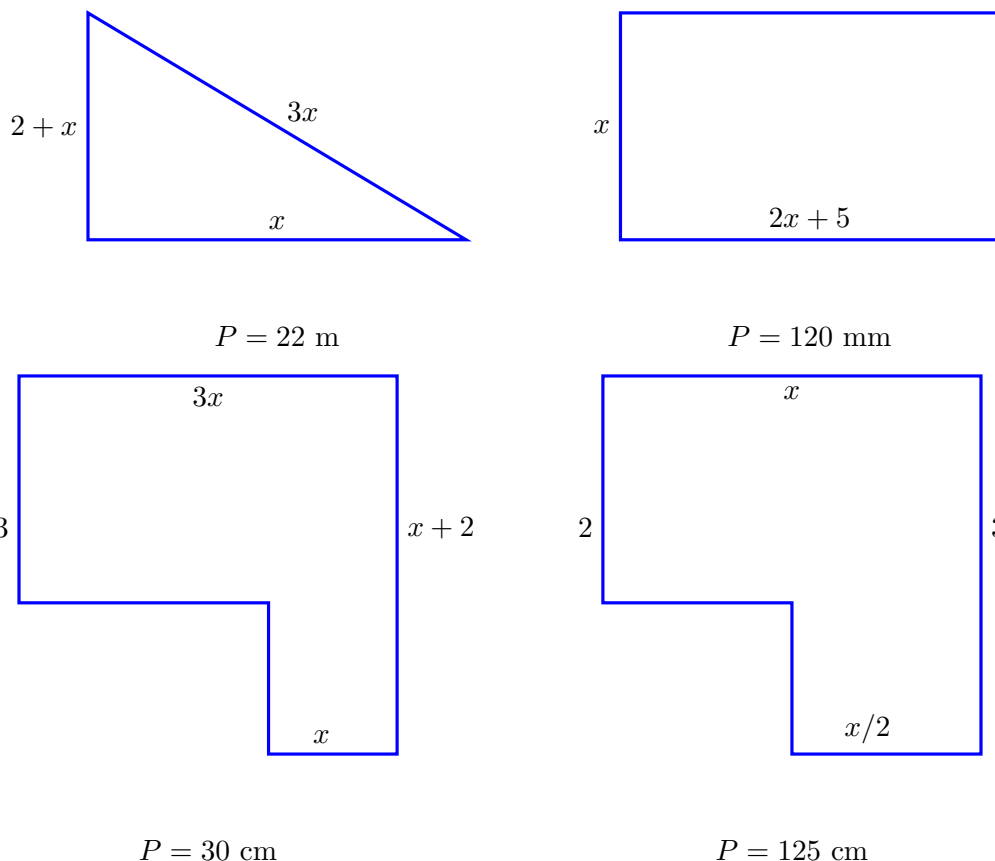
---

1. Exercici 481:  $x = 4$
  2. Exercici 482: (a.)  $x = 10$  (b.)  $x = 13$ , (c.)  $x = 13$  (d.)  $x = 8$  (e.)  $x = 13$
  3. Exercici 483: (a.)  $x = 20$  (b.)  $x = 4$ , (c.)  $x = 33$ , (d.)  $x = 27$ , (e.)  $x = 12$ , (f.)  $x = 24$ , (g.)  $x = -60$ , (h.) no té solució, (i.)  $x = -6$ , (j.)  $x = 24/5$ , (k.)  $x = 30$ , (l.)  $x = 1$ , (m.)  $x = 24$ , (n.)  $x = \frac{1}{2}$ , (o.)  $x = 3$ , (p.)  $x = -3$ , (q.)  $x = 0$ , (r.)  $x = 5$ , (s.)  $x = 4$ , (t.)  $x = 64$ , (u.)  $x = 15$ , (v.)  $x = 3$ , (w.)  $x = -8$ , (x.)  $x = 60$ , (y.)  $x = -\frac{9}{2}$
  4. Exercici 484:  $x = 0$
  5. Exercici 485: (a.)  $x = 1$ , (b.)  $x = 3$ , (c.)  $x = 0$ , (d.)  $x = 24$ , (e.)  $x = 4$ , (f.)  $x = 33$ , (g.)  $x = -60$ , (h.)  $x = 120$
  6. Exercici 486:  $x = 106/33$
-

## 5.2.4 Problemes

### 5.2.4.1 Problemes geomètrics

**Exercici 487.** Troba els costats d'aquestes figures sabent que el seu perímetre és el nombre que s'indica (figura 5.1):



Taula 5.1 Figures geomètriques de perímetre donat i costats desconeguts

**Exercici 488.** En un rectangle, la base és 2 cm més gran que l'altura. Si el perímetre del rectangle és igual a 20, quines són les seves dimensions?

**Exercici 489.** La base d'un triangle isòsceles fa la meitat del seus costats semblants. Si el seu perímetre és 10 cm, què val cada costat?

**Exercici 490.** En un rectangle, la base és el doble que l'altura. Si té com a perímetre 78 cm, quines dimensions té el rectangle?

**Exercici 491.** Un quadrat té perímetre 440, què val el costat?

**Exercici 492.** En un rectangle, l'altura fa el doble que la base més 1 cm. Si el seu perímetre és de 470, quines mesures té el rectangle?

**Exercici 493.** En un rectangle, l'altura és dues vegades la base menys 20 cm. Sabem que la meitat del perímetre del rectangle és igual a 130 cm. Quan mesura cada costat del rectangle?

**Exercici 494.** Tenim un rectangle  $A$  de base desconeguda i altura 9. I un rectangle  $B$  de base el triple que la base del rectangle  $A$  i altura 5. Ens diuen que els perímetres de  $A$  i de  $B$  són iguals. Què valen cada base de cada rectangle?

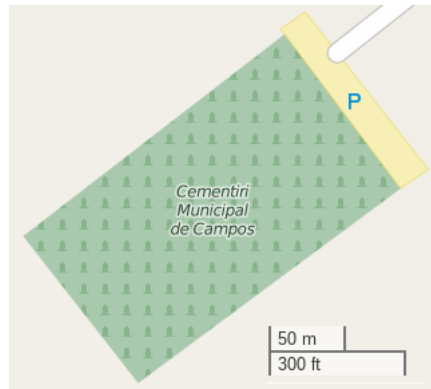
**Exercici 495.** L'altura d'un rectangle és igual a quatre vegades la seva base menys 4 cm. Si sabem que el perímetre és igual a 82, ¿quant fa cada costat? Quina és la seva àrea?

**Exercici 496.** En un rectangle, la base és dues vegades l'altura. Si la suma de la base més dues vegades l'altura és igual a 60 cm, què val cada costat del rectangle?

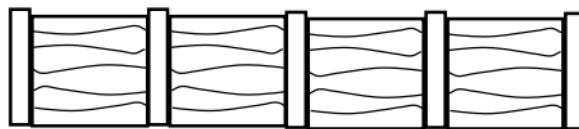
**Exercici 497.** En un rectangle, l'altura és dues vegades la base menys 20 cm. Sabem que el perímetre del rectangle és igual a 260 cm. Quan mesura cada costat del rectangle?

## 5.2.4.2 Problemes de situacions reals

Exercici 498. (El vallat del cementiri) Què costaria vallar el cementiri de Campos?



Dades:



- Cada pal costa 10 € i fa 0,5 m de llargària, mentre que cada tanca costa 18 € i mesura 2 m.
- Penseu que cada tanca ha d'estar entre dos pals

Exercici 499. Quin perímetre podríem vallar amb un pressupost de 1000 €? Nota: preneu les dades de l'exercici 498.

Exercici 500. Quants pals i quantes tanques necessitaríem si volguéssim vallar un terreny de 2000 m de perímetre? Nota: preneu les dades de l'exercici 498.

Exercici 501. Per enviar un telegrama, la web de Correus ens proporciona la informació següent (figura 5.2):

### Envío de documentos: telegrama



Régimen	Tarifa (€)	IVA (€)	Precio final (€)
<b>Régimen continental:</b> comprender los países de Europa, Turquía, Argelia, Egipto, Israel, Jordania, Líbano, Libia, Marruecos, Siria y Túnez			
– Por cada palabra (sin mínimo de percepción)	0,96	0,10	1,06
– Tarifa fija	29,54	3,10	32,64
<b>Régimen intercontinental:</b> comprender los países no incluidos en el régimen continental y que admitan esta modalidad			
– Tarifa por palabra (con un mínimo de percepción por importe de siete palabras)	3,28	0,68	3,96

Taula 5.2 Transcripció de les tarifes 2014 de Correus

- a. Quant costaria enviar un telegrama de 40 paraules a Europa?
- b. De quantes paraules podríem escriure en el telegrama si volguéssim gastar-nos 200 € com a màxim?  
I si l'enviéssim a Japó?

**Exercici 502.** Les tarifes per enviar un telefax a la web de Correus són (figura 5.3):

## Envío de documentos: fax



Régimen	Tarifa (€)	IVA (€)	Precio final (€)
<b>Nacional</b> (Península y Baleares): Entre oficinas de correos y terminales de usuarios telefax			
– Importe fijo por fax	1,22	0,26	1,48
– Importe por cada página	0,82	0,17	0,99
<b>Internacional - Zona A</b> (Península y Baleares): Europa, Turquía, Argelia, Libia, Marruecos y Túnez			
– Importe fijo por telefax	5,83	1,22	7,05
– Importe fijo por cada página	1,88	0,39	2,27
<b>Internacional - Zona B</b> (Península y Baleares): resto de países			
– Importe fijo por telefax	10,92	2,29	13,21
– Importe fijo por cada página	4,06	0,85	4,91

Taula 5.3 Transcripció de les tarifes 2014 de Correus

- a. Què costaria enviar un fax a Holanda de 5 pàgines?
- b. Quantes pàgines podríem enviar si disposéssim de 50 €? I si l'enviéssim a Líbia?

### 5.2.4.3 Problemes de trobar nombres

**Exercici 503.** N'Aina ha tret un 6, un 8 i un 4. Què ha de treure al següent examen per a tenir exactament un 5?

**Exercici 504.** Planteja i resol aquests problemes. En cada cas indica què representa  $x$ :

- Trobeu un nombre tal que deu vegades aquest nombre més 4 sigui igual a dues vegades aquest nombre més 44
- El doble d'un nombre més tres és igual a la resta de tres vegades aquest nombre menys 8. Quin és aquest nombre?
- La suma del nombre de bolles que té na Laura més 10 és igual a sis vegades el nombre de bolles que té, menys 10. Quants de bolles té na Laura?
- La suma de dos nombres consecutius és igual a 243. Quin són aquests nombres?
- Trobeu un nombre tal que la resta d'aquest nombre menys 2 sigui igual al doble d'aquest nombre, més 2

**Exercici 505.** Trobeu un nombre tal que la suma de la cinquena part d'aquest nombre, el doble d'aquest nombre, i 7 sigui igual a 458.

**Exercici 506.** En una entrevista, l'entrevistat va respondre que la meitat dels anys que tenia més 27 era igual al doble dels anys que tenia. Quants d'anys tenia l'entrevistat?

**Exercici 507.** Volem esbrinar la duració d'una cançó. L'únic que sabem és que si falta 1 minut per acabar, estam al tercer quart de la cançó.

**Exercici 508.** Quin és l'únic nombre tal que la suma entre ell i 5 és igual a la seva meitat més 10?

**Exercici 509.** Trobau un nombre,  $x$ , tal que el quadruple de  $x$  més 70 sigui igual a 60 més dues vegades  $x$

**Exercici 510.** El doble d'un nombre més cinc és igual a 251. Quin és aquest nombre?

**Exercici 511.** La suma d'un nombre i el seu doble és igual a 1287. Quin és aquest nombre?

**Exercici 512.** Un nombre menys dos és igual a la meitat d'aquest mateix nombre menys dotze. Quin és aquest nombre?

**Exercici 513.** El doble d'un nombre i cinc dóna 25. Quin és aquest nombre?

**Exercici 514.** La suma d'un nombre i deu és 25. Quin és aquest nombre?

**Exercici 515.** La resta de 10 i un nombre és 4. Quin és aquest nombre?

**Exercici 516.** La resta d'un nombre i quinze és igual a 48. Quin és aquest nombre?

**Exercici 517.** El triple d'un nombre més 10 és 43. Quin és aquest nombre?

**Exercici 518.** Quatre vegades un nombre més dos és 30. Quin és el nombre?

**Exercici 519.** El doble de la suma d'un nombre i 3 és 20. Quin és aquest nombre?

**Exercici 520.** La resta d'un nombre i la seva meitat dóna 5. Calcula el nombre

**Exercici 521.** Trobeu un nombre tal que si li sumam 20 és igual al seu doble

**Exercici 522.** Trobeu un nombre tal que el seu doble més dos és igual a 18.

**Exercici 523.** Quin és l'únic nombre tal que vuit vegades aquest nombre més el doble d'aquest nombre menys 4 és igual al doble de la resta d'aquest nombre menys 3?

**Exercici 524.** Trobeu un nombre tal que la seva meitat més el doble del resultat de sumar aquest nombre i 5 sigui igual a 50.

**Exercici 525.** La suma dos nombres consecutius és igual a 201. Quin són aquests nombres?

**Exercici 526.** Troba un nombre tal que ell i el seu doble siguin iguals a cinc vegades aquest nombre menys 10

**Exercici 527.** Troba un nombre tal que en restar-li 5 obtinguem el doble del nombre menys 12.

**Exercici 528.** Es pensen dos nombres. El segon és dues vegades el primer més 3. I sabem que entre els dos fan 33. Quin són aquests nombres?

**Exercici 529.** La meitat d'un nombre més 30 és igual a cinc vegades aquest nombre menys 24. Quin és aquest nombre?

**Exercici 530.** Un terç d'un nombre més quatre és igual a un quart d'aquest nombre més 6. Quins són aquests nombres?

**Exercici 531.** El doble d'un nombre més 3 és igual a la diferència del triple d'aquest nombre i 7. Quin és aquest nombre?

**Exercici 532.** El triple d'un nombre més 4 és igual al doble de la suma d'aquest nombre i 1, més 7. Quin és aquest nombre?

**Exercici 533.** Trobeu un nombre tal que el triple d'aquest nombre menys deu sigui igual al doble de la resta d'aquesta nombre i 5, més 5

**Exercici 534.** Trobeu un nombre tal que la suma d'aquest nombre i 2 és igual al doble de la diferència de 3 i aquest nombre, menys 10

**Exercici 535.** La meitat de la suma d'un nombre i 5 és igual al doble de la diferència d'aquest nombre i 1. Quin és aquest nombre?

**Exercici 536.** Cinc vegades la resta d'un nombre i 10, més tres vegades aquest nombre és igual al doble d'aquest nombre, menys 7. Quin és aquest nombre?

**Exercici 537.** El doble de la diferència d'un nombre i cinc és igual a la suma d'aquest nombre, 7 i el doble d'aquest nombre. Quin és aquest nombre?

**Exercici 538.** Quatre vegades un nombre, més 3 és igual al triple de la suma de la meitat d'aquest nombre i 3, menys 2. Quin és aquest nombre?

**Exercici 539.** La diferència de tres vegades un nombre i 5 és igual al doble de la suma d'aquest nombre i 2, més 1. Quin és aquest nombre?

**Exercici 540.** Trobeu un nombre tal que set vegades la diferència de 10 i aquest nombre és igual a quatre vegades aquest nombre més la meitat de la suma d'aquest nombre i 2.

**Exercici 541.** Deu vegades la suma d'un nombre i 6, més 15 és igual al triple de la diferència d'aquest nombre i 2, més 109. Troba a què és igual aquest nombre

**Exercici 542.** Trobeu un nombre tal que la meitat d'aquest nombre més 5 és igual a la meitat de la suma del doble d'aquest nombre i 5.

**Exercici 543.** Trobeu un nombre tal que dues vegades la suma d'aquest nombre més dos és igual a 4

**Exercici 544.** Quin nombre és tal que el doble de la suma d'aquest nombre més dos és igual a dotze vegades la resta d'aquest nombre menys 3?

**Exercici 545.** Quin és l'únic nombre tal que vuit vegades aquest nombre més el doble d'aquest nombre menys 4 és igual al doble de la resta d'aquest nombre menys 10?

**Exercici 546.** Quin és l'únic nombre tal que el triple d'aquest nombre menys 4 és igual al doble de la suma d'aquest nombre i dos?



#### 5.2.4.4 Problemes de sumar objectes

**Exercici 547.** Na Maria té el doble d'anys que na Marta més 5. En Martí té la meitat dels anys de na Marta menys 5. Si la suma dels anys d'en Martí i de na Maria és 100, quants d'anys tenen na Marta, na Maria i en Martí?

**Exercici 548.** Tres amics van al cine. El primer contribueix amb el doble del que contribueix el segon més 2 euros. I el tercer contribueix amb la meitat del que contribueix el segon menys 6. En total, l'entrada costa 20 euros. Quant paga cadascú?

**Exercici 549.** No sabem l'edat d'en Miquel, però sabem que és la meitat que la de son pare més 5, i que la suma de les edats d'en Miquel i de son pare és igual a 75. Quina edat té cadascun?

**Exercici 550.** L'edat d'en Damia és la meitat que la de sa mare més cinc. La suma de les edats d'en Damia i de sa mare és igual a 80. Quina edat té cadascun?

**Exercici 551.** En Pau té el triple de l'edat d'en Joan més 20 anys. Si en Pau té 80 anys, quants d'anys té en Joan? Resoleu-ho emprant equacions.

**Exercici 552.** Na Júlia té els mateixos anys que na Francisca més dos. Si entre les dues sumen 28 anys, quina edat té cadascuna?

**Exercici 553.** Na Laura té el doble d'anys que na Catalina. I na Berta té els mateixos anys que na Catalina menys quatre. Si entre les tres sumen 36, quants anys té cadascuna?

**Exercici 554.** En Pep té el triple dels anys que té en Toni més 10. I na Laura té 20 anys. Quina edat té cadascú si la suma de les edats dels tres és igual a 70?

**Exercici 555.** Tres amics: n'Imma, na Berta i en Joan compten el nombre de monedes que tenen a la butxaca. Na Berta té el triple de monedes que n'Imma. I en Joan té el doble de monedes que n'Imma més 15.

Si la suma de les monedes dels tres amics és igual a 55, quantes monedes té cadascú?

**Exercici 556.** En Carles té el doble de l'edat de na Pepita. I na Sebastiana té el triple d'anys que en Carles més 10. Quina edat té cadascú si la suma de les edats és exactament d'un segle?

**Exercici 557.** En Bernat té la meitat de l'edat que té na Paula, més 2. I na Loli té el doble d'anys que na Paula, menys 6. Quina edat té cadascú si sumen 38 anys?

**Exercici 558.** N'Alexandre té dos anys més que la seva dona. La dona de n'Andreu té dos anys menys que la dona de n'Alexandre. I n'Andreu té el doble dels anys que té n'Alexandre. Si sabem que la suma de les edats del matrimoni-Alexandre és igual la meitat de la suma de les edats del matrimoni-Andreu, més 10 anys, quina edat té cadascú?

**Exercici 559.** Es pensen tres nombres: el primer és igual al segon més 20. I el tercer és igual a la meitat de la suma del primer i el segon. Si sabem que la suma del primer més el segon és igual al tercer, més 20, quins són aquests nombres?

**Exercici 560.** Na Laura té el triple de l'edat de n'Antònia, més 4. I en Joan té la suma de les edats de na Laura i n'Antònia. Quina edat té cadascú si la suma de les tres edats és igual a 88?

**Exercici 561.** Na Lluïsa té el doble de l'edat de na Laura, més 8 anys. I n'Inès té la suma dels anys de na Laura i na Lluïsa. Quina edat té cadascuna si la suma de l'edat de na Lluïsa i n'Inès és igual a l'edat de sis vegades l'edat de na Lluïsa, més 6?

**Exercici 562.** Hi havia una oferta i ens regalaven per cada llibreta comprada 2 gomes, 3 llàpissos i 1 bolígraf. Quantes llibretes hem comprat si en total ens hem endut 490 objectes?

**Exercici 563.** Som tres amics. Cadascú té un nombre de monedes a la butxaca, i volem saber quin és. L'únic que sabem és que:

- Na Laura té deu vegades més monedes que en Joan.
- En Francesc té dues vegades les monedes que té en Joan menys 2
- La suma de les monedes d'en Joan, en Francesc i na Laura és 63

Quantes monedes té cadascú?

**Exercici 564.** Tenc el doble d'anys més un que el meu amic, i entre els dos sumam 70 anys. Quants d'anys té cadascú?

**Exercici 565.** Na Martina, n'Enric i na Sònia van a sopar. A l'hora de pagar, decideixen que n'Enric pagui el doble del que paga na Martina més 2 euros i na Sònia pagui un euro més que na Martina. Si el sopar costa 203 euros, què paga cadascú?

**Exercici 566.** Tres amics: n'Imma, na Berta i en Joan compten el nombre de monedes que tenen a la butxaca. Na Berta té el triple de monedes que n'Imma més 2. I en Joan té el doble de monedes que na Berta més 10. Si la suma de les monedes dels tres amics és igual a 66, quantes monedes té cadascú?

**Exercici 567.** Tres amics van al cine. El primer contribueix amb el doble del que contribueix el segon, més 2 euros. I el tercer contribueix amb el doble de la suma de la contribució del primer i del segon. En total, l'entrada costa 24 euros. Quant paga cadascú?

**Exercici 568.** Tres socis es reparteixen els beneficis segon el capital aportat. El primer se'n duu el doble del que se'n duu el segon, més 2000 euros. I el tercer se'n duu el triple del que se'n duu el primer, més 20 000 euros. Què se'n duu cadascun si en total s'han de repartir 118 000 euros?

**Exercici 569.** La meva germana té un any menys que jo i el meu germà el doble de la meva edat, més un. Si dues vegades l'edat de la meva germana més tres vegades l'edat del meu germà és igual a nou vegades la meva edat, menys deu, ¿quina edat té cadascú?

**Exercici 570.** Na Laura té la meitat dels anys de na Jèssica més 5, i na Magdalena en té 20. Quina edat té cadascú si la suma de les edats dels tres és igual a 55?

**Exercici 571.** Na Marina té el doble d'anys que na Margalida. I n'Antònia té la meitat de la suma de les edats de na Margalida i na Marina. Si dues vegades la diferència entre els anys de na Marina i na Margalida és igual a l'edat de n'Antònia més 5, quina edat té cadascuna?

**Exercici 572.** Na Laura té el doble dels anys d'en Guillem, més 10 anys. I en Antoni té el triple dels anys de na Laura. Si la suma de les edats és de 130, quants anys té cadascú?

### 5.2.4.5 Problemes de passar objectes

**Exercici 573.** A la butxaca tenia un nombre indeterminat de caniques. Li en vaig donar 7 a un amic meu i me'n varen quedar la meitat del que tenia. Quantes caniques tenia?

**Exercici 574.** Quantes monedes tenc a la butxaca si sé que si n'hi donc 20 a un company, me'n queden un terç del que tenia més 2?

**Exercici 575.** Hi ha 26 persones que estan dividides en dos grups: grup *A* i grup *B*. Volem saber el nombre de persones que estan al grup *A* i l'únic que sabem és que si se'n van 4 persones del grup *A* al grup *B*, aleshores hi haurà el mateix nombre de persones als dos grups.

**Exercici 576.** En Pep i jo tenim respectivament 10 i 20 euros. Quants d'euros he de donar a en Pep per a què jo tenguí els mateixos euros que en Pep més 5?

**Exercici 577.** Hi ha dos grups: grup *A* i grup *B*, que tenen 20 i 43 persones, respectivament. Quantes persones han de passar del grup *B* al grup *A* per a què després hi hagi en *A* la meitat de persones que a *B*?

**Exercici 578.** En Vicenç té 20 bolis. I na Laura en té 16. Quants de bolis ha de donar en Vicenç a na Laura per a què na Laura tenguí dos bolis més que en Vicenç?

**Exercici 579.** En un vaixell hi ha 30 homes. En un altre n'hi ha 100. Quants d'homes han de passar del segon a primer per a què el segon tenguí la meitat de tripulació del primer, més 10?

**Exercici 580.** En una gàbia tenc 50 gallines i en una altra 110. Quantes gallines he de passar de la primer a la segona per a què en la segona tenguí set vegades més de gallines que en la primera?

**Exercici 581.** En la butxaca esquerra tenc vint-i-cinc euros i en la dreta, cent trenta-cinc. Quants d'euros he de passar de la primer a la segona per a què la segona tenguí nou vegades més que la primera?

**Exercici 582.** Na Sònia té 25 anys i na Raquel en té 15. Quants d'anys han de passar per a què na Raquel tenguí la meitat dels anys que tindrà na Sònia?

**Exercici 583.** En una gàbia tenc 50 gallines i en una altra 15. Quantes gallines he de passar de la primer a la segona per a què en la segona tenguí el doble de gallines que en la primera, més 5?

**Exercici 584.** Al pati tenim dues fileres d'alumnes: la primera de 30 i la segona de 45 alumnes. Quants alumnes han de passar de la segona a la primera per a què en la segona filera hi hagi exactament un alumne més que a la primera filera?

**Exercici 585.** En Lluís té dos munts de papers: en el primer té 25 fulls mentres que en el segon en té 56. Quants de fulls del primer al segon ha de passar per a què al primer munt tenguí exactament un quart dels fulls que tenguí al segon munt, més 1?

**Exercici 586.** Tenim dos petrolers: el primer transporta el triple del que transporta el primer, més 200 l. En un moment determinat, el primer petrolier passa 5000 litres al segon. Si en aquest moment, sabem que el primer petrolier transporta el doble de litres que el primer, menys 2800 litres, ¿quina quantitat de litres transportaven originàriament cada petrolier?

**Exercici 587.** Tenc dues butxaques: la dreta i l'esquerra, amb 20 i 44 monedes respectivament. ¿Quantes monedes he de passar de la butxaca esquerra a la dreta per a què el nombre de monedes de la butxaca esquerra sigui el triple de les monedes que tenc a la butxaca dreta menys 42?

**Exercici 588.** La gent d'una classe o bé fa teatre o bé fa mecànica com a optativa. Hi ha 13 persones que fan teatre i 25 que fan mecànica. Quantes persones han de passar de la classe de mecànica a la de teatre per a què a la classe de mecànica hi hagi el doble de persones que a teatre menys 16?

**Exercici 589.** Hi ha dos grups: grup  $A$  i grup  $B$ , que tenen 20 i 43 persones, respectivament. Quantes persones han de passar del grup  $B$  al grup  $A$  per a què després hi hagi en  $B$  el doble de persones que a  $A$ ?

**Exercici 590.** El meu germà assegura que si li donc 22 euros, tindrà el doble del que té ara mateix menys un euro. Quants doblers té el meu germà ara?

**Exercici 591.** Tenim dos dipòsits: un amb 5 litres i l'altre amb 17 litres. Passam una quantitat desconeguda del segon al primer. Una vegada passats, els litres que hi ha al segon dipòsit són iguals als litres del primer dipòsit més dues vegades el que hem passat del segon al primer dipòsit. Quants de litres hem passat d'un a l'altre dipòsit?

**Exercici 592.** Tenim dos capses  $A$  i  $B$  amb 10 i 81 bombons cadacuna. Quants de bombons hem de passar de  $B$  a  $A$  per a què en  $A$  hi hagi la meitat dels bombons de  $B$ , més 1?

**Exercici 593.** A la classe de Matemàtiques hi ha 25 alumnes, mentres que a la classe de Ciències naturals n'hi ha 14. Quants d'alumnes han de passar de la classe de Ciències naturals a la de Matemàtiques per a què, després del canvi, a la classe de Matemàtiques hi hagi el quintuple dels alumnes de la classe de Naturals, menys 3?

**Exercici 594.** Na Laura té un compte corrent amb 24000 euros, mentres que en Jaume en té un altre amb 12500 euros. Quants de doblers ha de donar na Laura a en Jaume per a què en Jaume tengui la meitat de la resta dels doblers de na Laura i 1500?

**Exercici 595.** A l'embassament de Cúber hi ha  $125.000 \text{ m}^3$  d'aigua, mentres que al Gorg Blau  $335.000 \text{ m}^3$ . Quants metres cúbics hem de trasvassar del Gorg Blau a Cúber per a què la diferència dels litres del Gorg Blau menys els litres de Cúber sigui 200 metres cúbics?

**Exercici 596.** En Lluís té 25 CD i na Sònia 34. Quants de CD ha de donar na Sònia a en Lluís per a què en Lluís tengui els CD que tindrà na Sònia més la suma de la quantitat de CD que li ha donat na Sònia i 2?

**Exercici 597.** Tenim tres fileres:  $A$  de 15 persones,  $B$  de 25 persones i  $C$  de 40 persones. Es produeix un canvi: passen un nombre indeterminat de persones de  $C$  a  $A$ . Després d'aquest canvi, sabem que la suma del nombre de persones de  $B$  i  $C$  és igual al doble de les persones  $A$ , menys 10. ¿Quantes persones s'han canviat de filera?

**Exercici 598.** Al grup  $A$  hi ha el doble de persones del grup  $B$ , menys 3. Es produeix un canvi: se'n van 15 persones de  $B$  a  $A$ . Deprés del canvi, sabem que el doble de les persones que hi ha a  $A$  més les persones que hi ha a  $B$  és igual a 109, ¿quantes persones hi havia originàriament a cada grup?

**Exercici 599.** Tenc el doble de caniques que la meva germana. Si me'n dóna 10, llavors tindrà el cinc monedes més que la meva germana. Quantes monedes teníem cadascú?

**Exercici 600.** A la butxaca esquerra tenc el triple de monedes que a la butxaca dreta, més 5. Pas la meitat de les monedes que tenc a la butxaca dreta a la butxaca esquerra. Si, després d'aquesta passada, la suma de les monedes de la butxaca esquerra i la butxaca dreta és igual a 45, quantes monedes tenc a cada butxaca?

**Exercici 601.** En Robert té la meitat de les monedes de na Berta. Si na Berta li dona un terç, llavors en Robert tindrà el triple de monedes que na Berta, més 10. Quantes monedes tenien originàriament?

**Exercici 602.** En Pau té el triple de les accions que té en Llorenç. Si en Llorenç li dona un terç de les accions que té, llavors en Llorenç tindrà una cinquena part de les accions que tindrà en Llorenç. Quantes accions tenien originàriament?

**Exercici 603.** A la butxaca esquerra tenc 10 monedes i a la dreta 20. Quantes monedes he de passar de la butxaca esquerra a la dreta per a què a la dreta tengui el quadruple de monedes de l'esquerra, més 5.

1. Exercici 497: la base fa 50 cm i l'altura, 80 cm
2. Exercici 526: 5
3. Exercici 527: 7
4. Exercici 528: 10 i 23
5. Exercici 529: 12
6. Exercici 530: 24
7. Exercici 531: 10
8. Exercici 543: 0
9. Exercici 545: -2
10. Exercici 546: 8
11. Exercici 550: en Damià en té 30 i la seva mare, 50
12. Exercici 556: 10, 20 i 70
13. Exercici 557: 8, 12, 18
14. Exercici 558: D: 20, A: 22, DJ: 20, J: 44
15. Exercici 561: na Lluïsa té 10 anys
16. Exercici 566: 5, 17 i 44
17. Exercici 567: el primer, 6 euros; el segon, 2 €; i el tercer, 16 euros
18. Exercici 568: el segon se'n duu 10.000 €
19. Exercici 569: Jo tenc 11 anys
20. Exercici 570: 15, 20 i 20
21. Exercici 571: 20, 10 i 15
22. Exercici 572: en Guillem té 10 anys
23. Exercici 578: 3
24. Exercici 579: 50
25. Exercici 580: 30
26. Exercici 581: 10
27. Exercici 582: 5
28. Exercici 583: 30
29. Exercici 585: 8
30. Exercici 586: 36.200 i 12.000
31. Exercici 589: 3
32. Exercici 592: 21
33. Exercici 593: 7
34. Exercici 594: 2500
35. Exercici 595: 5
36. Exercici 596: 11
37. Exercici 597: 15
38. Exercici 598:  $A = 27$ ,  $B = 20$
39. Exercici 599: 15 i 30
40. Exercici 601: 60 i 30
41. Exercici 602: 15 i 45
42. Exercici 603: 5

## 5.3 Resolució d'equacions de 2n grau

### – Completant quadrats

En general, la transformació no es pot fer de cap. Per passar una equació de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  a una equació de la forma  $A(x - B)^2 + C = 0$  usarem la fórmula:

$$A = a \qquad B = \frac{-b}{2a} \qquad C = c - AB^2$$

Per exemple, l'equació  $2x^2 - 4x + 10 = 0$  es transformaria en  $2(x - 1)^2 + 8 = 0$ .

### – Fórmula de segon grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad (5.2)$$

**Exercici 604.** Resoleu les equacions de 2n grau següents:

a.  $3x^2 + 2x = 5x - 2$

b.  $10x - 8x = x^2 - 5$

c.  $9x - 8 = 7 - x^2$

d.  $8x^2 - 2 = 10x^2 - 5x$

g.  $(x - 2)^2 - 8 = 20x$

j.  $(x - 5)^2 = 5x^2$

e.  $(x - 2)^2 - 5 = 10$

h.  $5(x - 1)^2 = 2$

f.  $3(x + 4)^2 = 10$

i.  $(x - 1)^2 = -4$

**Exercici 605.** Resoleu les equacions de segon grau següents:

a.  $3x - 5x^2 = 2x - 490$

d.  $4x - (2x^2 - 5x) = \frac{x}{2}$

f.  $\frac{x}{2} + 3(x^2 + 2) = 311$

b.  $7 - (x - 3) = x^2 - 4x$

e.  $-3x^2 + 432 = 0$

c.  $x - \frac{x^2}{2} = x^2 - 3$

**Exercici 606.** Resoleu les equacions següents:

a.  $9x^2 - 225 = 0$

c.  $10 = -6x^2$

b.  $5x^2 = 10$

d.  $6x^2 + 27 = 9x^2$

**Exercici 607.** Resoleu les equacions següents:

a.  $3x^2 + 2x = -2x$

c.  $-9x^2 + 81x - 4 = -4$

b.  $3x^2 - x = -5x^2 + x$

d.  $-20x = 8x^2 - 2 + 2x^2 + 2$

**Exercici 608.** Resoleu les equacions següents:

a.  $4x^2 + 2x - 4 = -2x + 4$

d.  $-2x^2 + 4x - 3 = -2x + x^2$

b.  $9x^2 - 63x + 90 = 0$

e.  $2x^2 + 4x + 1 = -1$

c.  $-x^2 - 3x + 10 = x^2 + 3x - 10$

f.  $2x + 1 = -2 - x^2$

**Exercici 609.** Digueu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

a.  $x = -2$  és solució de l'equació  $x^2 - 2x - 1 = 0$

b.  $x = \frac{1}{2}$  és solució de l'equació  $4x^2 - 1 = 0$

c.  $x = 2$  i  $x = 0$  són solucions de l'equació  $x^2 = 4x$

d.  $x = -1$  és la única solució de l'equació  $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Nota: podeu comprovar si el nombre assenyalat és o no solució de l'equació en comptes de trobar totes les solucions de l'equació.

**Exercici 610.** Resoleu:

a.

$$\frac{3x - 1}{2} + \frac{x^2}{3} + 5 = x^2 + 3$$

b.

$$\frac{x}{3} - 5(1 + x^2) = 311$$

**Exercici 611.** Reduïu i resoleu les equacions següents:

a.

$$3(x + 2) + 4x^2 - 4 = 8 - x(1 - x) + 7x$$

d.

$$\frac{x^2 + 1}{3} - \frac{x - 2}{2} = 0$$

b.

$$5x^2 + 2(x^2 + x) - 4 = \frac{5x^2}{2} + 11x^2$$

e.

$$7x + 3 + 5x^2 = -3x^2 + 4x + 35 + 3x$$

c.

$$2x(x + 1) - 2(x + 2) = 0$$

f.

$$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{5} = 2(x + 1)$$

**Exercici 612.** Resoleu:

a.  $2x^2 + 2x - 4 = 0$

h.  $2x^2 - 5x + 2 = 0$

o.  $x(x + 5) = 0$

b.  $3x^2 - 27 = 0$

i.  $2x^2 - 5x - 7 = 0$

p.  $4x = 3x^2$

c.  $2x^2 + 6x = 0$

j.  $3x^2 - 5x + 4 = 0$

q.  $x^2 = 121$

d.  $x^2 - 6x + 8 = 0$

k.  $9x^2 + 6x + 1 = 0$

r.  $5x^2 - 7x = 0$

e.  $-x^2 + 2x + 8 = 0$

l.  $3x^2 - 6x + 2 = 0$

s.  $x^2 + x = 3x - x^2$

f.  $-x^2 - 4x - 6 = 0$

m.  $x^2 - 6 = 30$

g.  $15x^2 + 2x - 8 = 0$

n.  $3x^2 - 115 = 185$

**Exercici 613.** Reduïu i resoleu les equacions següents:

a.  $2x + 4x - x^2 + 7 = x^2 + 2x - 9$

b.  $-x + 4 - x^2 - 1 + x = -2x^2 + 19$

c.  $2x^2 + x - 3 + 3x - 8 + 2x = 4x + x^2 - 11$

d.  $x^2 - 3x = -x^2 + 2x - x^2 - 1 - 4x^2 + 2 + 5x^2 - 3$

e.  $-x^2 - 3x = x^2 + 2x + 3x + 6$



f.  $2x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 1 + 2x - x^2 + x + 1$

g.  $-x^2 - 3x - x^2 + 2 = 2x^2 - 14 - 3x$

h.  $24x^2 - 3x - x^2 + 2 = -6x^2 - 41x^2 - 29x^2 + 22 - 13x - x^2$

**Exercici 614.** Resoleu:

a.

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{13x}{4} = -\frac{1}{2}$$

c.

$$(x + 2)^2 + 3x - 5 = 0$$

d.

b.

$$(x + 2)(x - 3) + 3x = (2x - 4)(x + 2)$$

$$-2x^2 + x + 23 = -4x^2 - 11x + 7$$

**Exercici 615.** Resoleu les equacions següents:

a.  $(3x - 1)^2 = 0$

d.  $(x - 5)^2 = 0$

b.  $(x - 3)(x - 8) = 0$

e.  $(x - 2)(x + 2) = 7$

c.  $(2x - 1)^2 = 25$

f.  $\frac{(x-1)(x+1)}{3} = \frac{(x-1)^2}{2}$

## 5.4 Plantejament d'equacions de 2n grau

**Exercici 616.** Trobeu les dimensions dels quadrats següents:

a. Un quadrat que té àrea igual a  $25 \text{ m}^2$

c. Un quadrat d'àrea  $160.000 \text{ km}^2$

b. Un quadrat que té àrea igual a  $20 \text{ cm}^2$

d. Un quadrat d'àrea  $10,24 \text{ cm}^2$




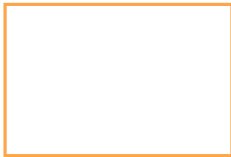

**Exercici 617.** Trobeu les dimensions d'aquestes figures amb les condicions donades

a)









$$\text{Àrea} = 50$$

L'altura és la meitat que la base

- b)   $\text{\`{A}rea} = 27$  La base és un terç de l'altura
- c)   $\text{\`{A}rea} = 300$  L'altura és el triple que la base
- d)   $\text{\`{A}rea} = 10.000$  L'altura és un quart que la base
- e)   $\text{\`{A}rea} = 86.400$  L'altura és el doble d'un nombre desconegut i la base és el triple d'aquest mateix nombre
- f)   $\text{\`{A}rea} = 225$  L'altura fa la meitat que la base

**Exercici 618.** Trobeu les dimensions d'aquestes figures.

- a)   $\text{\`{A}rea} = 15$  L'altura medeix 2 metres més que la base
- b)   $\text{\`{A}rea} = 50$  La base fa sis metres menys que l'altura

c)		$\text{\`{A}rea} = 231$	L'altura mesura deu cent\u00edmetres m\u00e9s que la base
d)		$\text{\`{A}rea} = 7.301$	L'altura mesura $x$ i la base $3x + 2$
e)		$\text{\`{A}rea} = 300$	L'altura \u00e9s $3/4$ de la base
f)		$\text{\`{A}rea} = 71,5$	L'altura fa 2 cent\u00edmetres m\u00e9s que la base

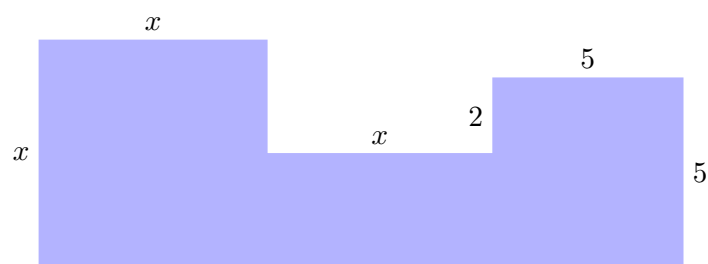
**Exercici 619.** L'\u00e0rea d'un quadrat \u00e9s 1024. Qu\u00e8 val el seu costat?

**Exercici 620.** Calculeu la longitud dels catets d'un triangle rectangle is\u00f2sceles d'\u00e0rea  $50 \text{ m}^2$ .

**Exercici 621.** En un rectangle, la base fa tres cent\u00edmetres m\u00e9s que l'altura. Si l'\u00e0rea \u00e9s de  $1.720 \text{ cm}^2$ . Qu\u00e8 val cada costat?

**Exercici 622.** En un rectangle, l'altura \u00e9s quatre cent\u00edmetres m\u00e9s curta que la base. Si l'\u00e0rea \u00e9s de  $70 \text{ cm}^2$ , quines s\u00f3n les dimensions del rectangle?

**Exercici 623.** Calculeu el valor de  $x$  sabent que l'\u00e0rea total de la figura 5.1 \u00e9s igual a  $79 \text{ m}^2$ :



**Figura 5.1** Composici\u00f3 de diversos rectangles

**Exercici 624.** En un rectangle, la base \u00e9s 3 cm m\u00e9s curta que l'altura. Calculeu les dimensions del rectangle si sabem que la seva \u00e0rea \u00e9s de  $70 \text{ cm}^2$ .

**Exercici 625.** Trobeu  $x$  per a que l'\u00e0rea de la figura 5.2 sigui igual a  $54 \text{ m}^2$ :

**Exercici 626.** L'\u00e0rea d'un quadrat \u00e9s 324. Qu\u00e8 val el seu costat?

**Exercici 627.** En un rectangle, la base fa dos cent\u00edmetres m\u00e9s que l'altura. Si l'\u00e0rea \u00e9s de  $2808 \text{ cm}^2$ . Qu\u00e8 val cada costat?

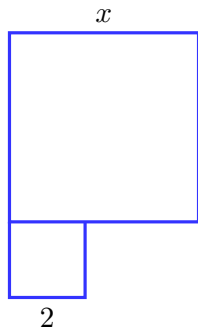


Figura 5.2 Composició de dos quadrats

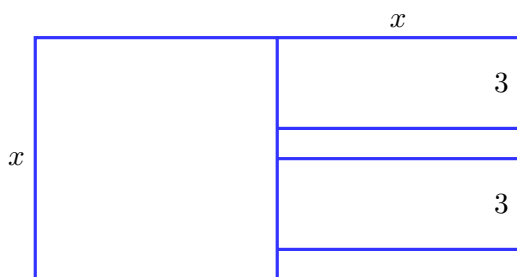
**Exercici 628.** En un rectangle, l'altura és deu centímetres més curta que la base. Si l'àrea és de  $1200 \text{ cm}^2$ , quines són les dimensions del rectangle?

**Exercici 629.** En un rectangle de  $4 \text{ cm}$  de perímetre, sabem que la base és igual al quadrat de l'altura. Calcula les seves dimensions.

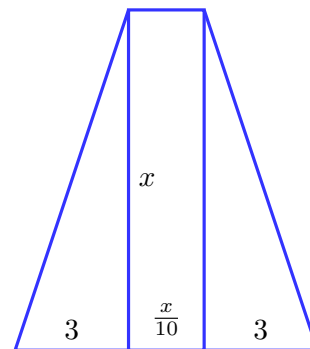
**Exercici 630.** En un rectangle de  $600 \text{ m}$  de perímetre, sabem que l'altura és igual a dues vegades el quadrat de la base. Calculeu les seves dimensions.

**Exercici 631.** Calculeu el valor de  $x$  sabent que l'àrea total de la figura és igual al valor que s'indica.

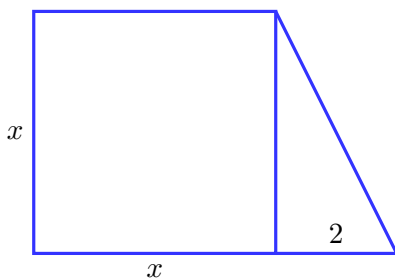
a.  $112 \text{ m}^2$ :



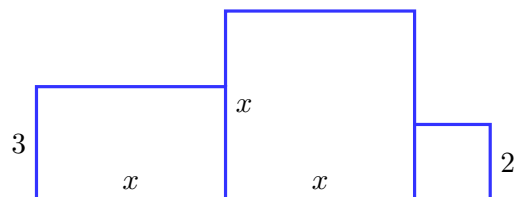
c.  $1540 \text{ m}^2$ :



b.  $20 \text{ m}^2$ :



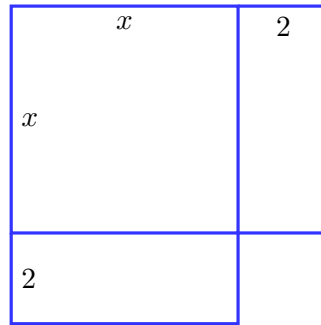
d.  $44 \text{ m}^2$ :



**Exercici 632.** L'àrea d'un quadrat és  $655,36 \text{ cm}^2$ . Què val el seu costat?

**Exercici 633.** En un rectangle, la base és igual a tres vegades l'altura. Si la seva àrea és 300, trobeu les dimensions del rectangle.

**Exercici 634.** Quan passarà que l'àrea d'aquest terreny (figura 5.3) serà igual a  $4,485 \text{ m}^2$ ? Quina àrea tendria si  $x$  fos igual a 3 m?



**Figura 5.3** Terreny format per composició de rectangles

# 6

## FUNCIONS

### 6.1 Pla cartesià

**Exercici 635.** (a.) Representeu al pla cartesià els punts següents:  $A = (1, 4)$ ,  $B = (4, 1)$ ,  $C = (-5, 2)$ ,  $D = (-3, -1)$ ,  $E = (6, -3)$ ,  $F = (0, 2)$ ,  $G = (-2, 0)$ ,  $H =$  origen de coordenades, i (b.) digueu a quin quadrant pertanyen.

**Exercici 636.** Escriviu les coordenades dels punts següents (figura 6.1):

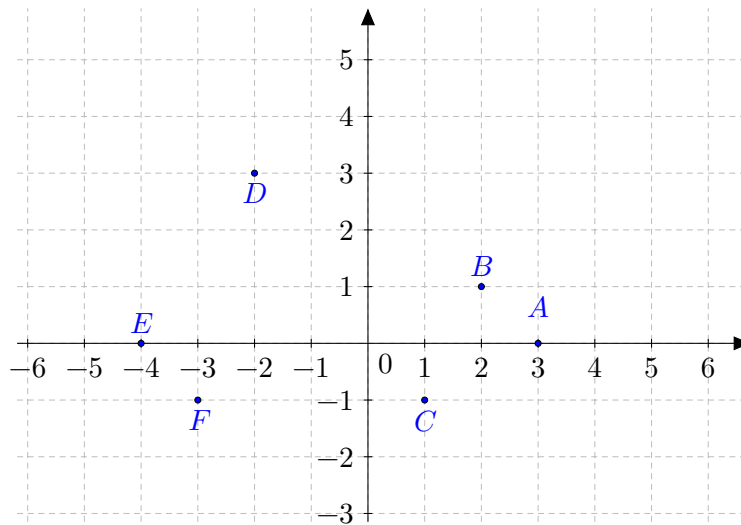


Figura 6.1 Punts al pla cartesià

**Exercici 637.** Representeu al pla cartesià els punts següents:  $A = (1, 2)$ ,  $B = (2, 1)$ ,  $C = (1, 1)$ ,  $D = (2, 2)$ ,  $E = (-1, 2)$ ,  $F = (1, -2)$ ,  $G = (0, 2)$ ,  $H = (1, 0)$ ,  $I = (0, 0)$ ,  $F = (-2, -3)$ . Digueu a quin quadrant pertanyen

**Exercici 638.** Quines coordenades tenen els punts següents (figura 6.2):

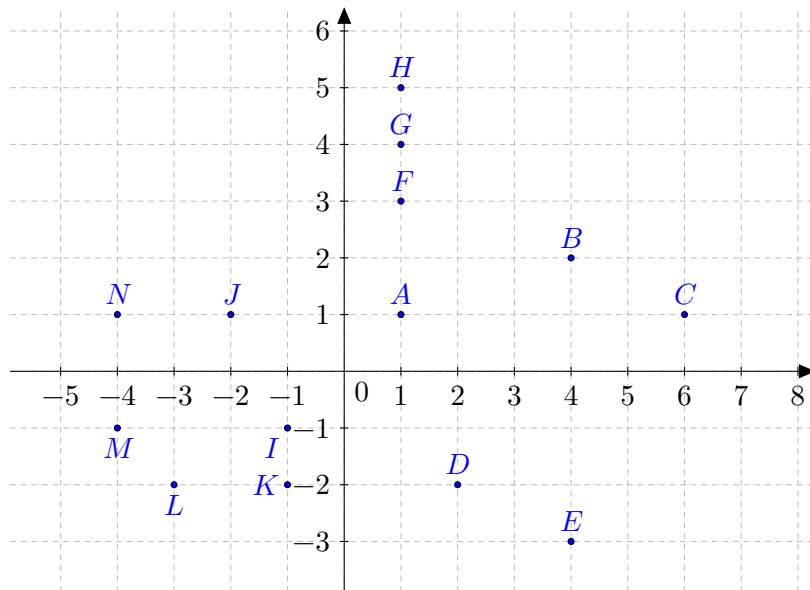


Figura 6.2 Punts al pla cartesià

**Exercici 639.** Representeu al pla cartesià els punts següents i digueu a quin quadrant pertanyen:  $A = (5, 6)$ ,  $B = (-3, 4)$ ,  $C = (7, -3)$ ,  $D = (-1, -5)$ ,  $E = (0, -2)$ , i  $F =$  origen de coordenades.

**Exercici 640.**

a. Representeu al pla cartesià els punts següents:  $A = (1, 2)$ ,  $B = (2, 1)$ ,  $C = (-3, 2)$ ,  $D = (-4, -1)$ ,  $E = (2, -3)$ ,  $F = (0, 3)$ ,  $G = (-2, 0)$ ,  $H =$  origen de coordenades

b. Digueu a quin quadrant pertanyen

## 6.1.1 Representació de funcions

**Exercici 641.** Representeu gràficament:

a.  $y = 3x - 9$

d.  $y = x^2 - 2$

g.  $y = x^2 - x$

b.  $y = 2x + 1$

e.  $y = 60/(x + 1)$

h.  $y = 3x + 6$

c.  $y = 10/x$

f.  $y = x - 2$

i.  $y = \sqrt{x} + 2$

**Exercici 642.** Representeu gràficament les funcions següents:

a.  $2x^2 + 4y = 12$

b.  $8x - 5y = 10$

c.  $x \cdot y = -30$

**Exercici 643.** Quines de les funcions següents donen lloc a rectes i quines no:

a.  $y = 2x - 4$

d.  $y = -x - 2$

f.  $y = \frac{x}{2}$

b.  $y = 2x$

e.  $y = x^2$

c.  $y = 2$

g.  $y = 0,5x$

j.  $y = \frac{5}{x} - 3$

m.  $6x - 10y + x^2 = 2y + x^2$

h.  $y = \frac{x}{x} + 1$

k.  $y = x^3 - 3$

n.  $x = 2y - 3$

i.  $y = \frac{2x^2}{x} + 1$

l.  $3x - 5y = 2x + 2$

o.  $2y + x = 3y - 3x$

**Exercici 644.** Digueu si les gràfiques corresponents a les funcions següents són creixents o decreixents. Com ho sabeu?

a.  $y = 2x + 4$

e.  $y = -2$

h.  $y = \frac{x}{3} + 2$

b.  $y = -2x + 4$

f.  $y = -2x$

c.  $y = 2x - 4$

g.  $y = -4$

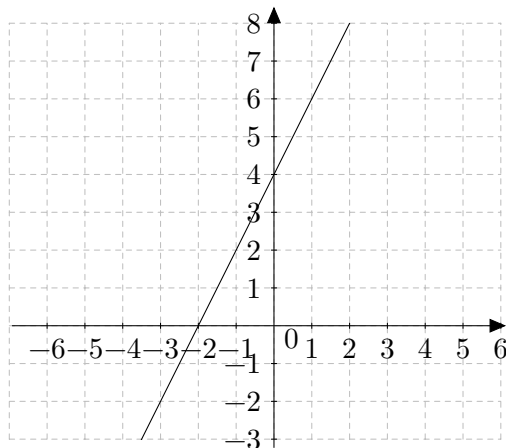
i.  $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{5}$

d.  $y = -2x - 4$

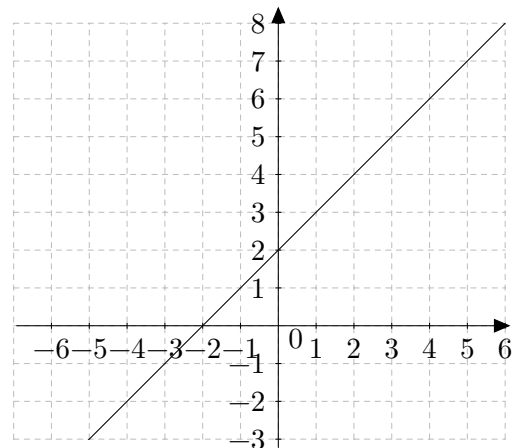
**Exercici 645.** Representeu gràficament les funcions de l'exercici anterior (exercici 644).

**Exercici 646.** Identifiqueu el gràfic amb la fórmula corresponent: (a.)  $y = x + 2$  (b.)  $y = 2x + 4$  (c.)  $y = 2x$  (d.)  $y = -x + 2$  Digueu el motiu d'aquesta identificació.

Gràfiques:

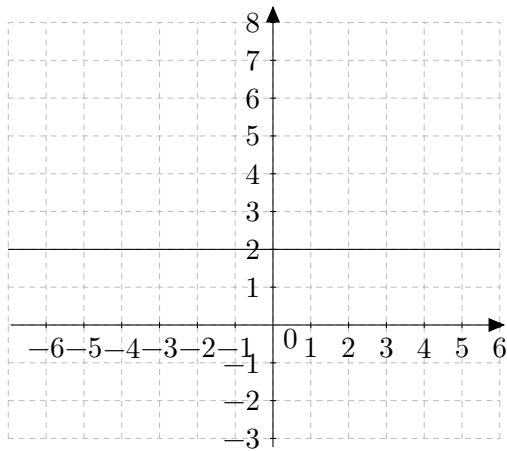


a

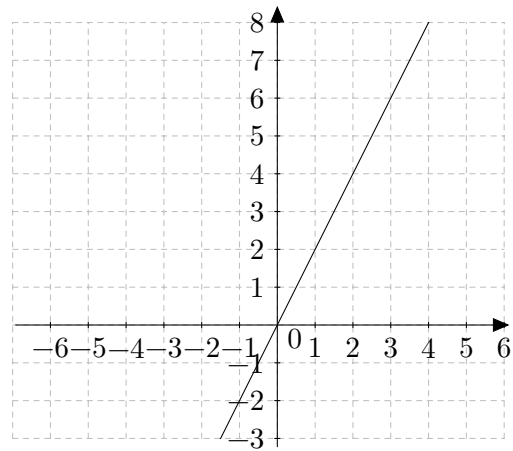


b

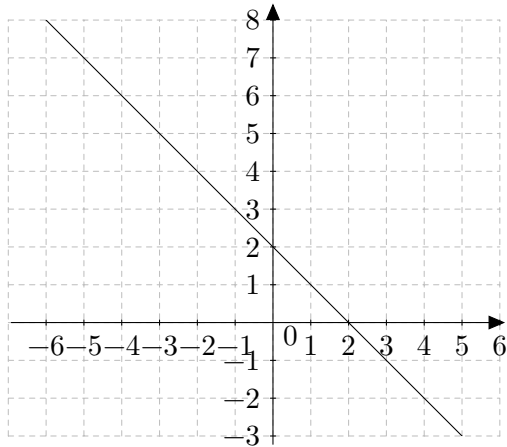




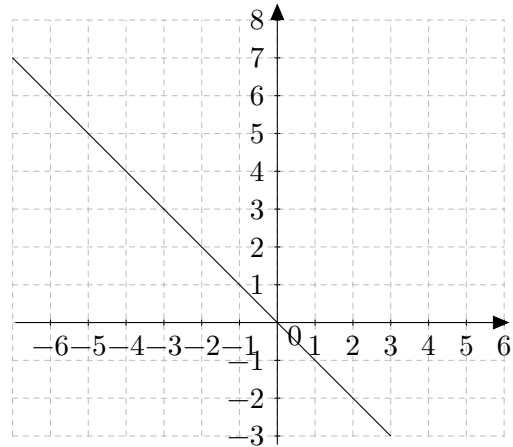
c



d



e



f

Quines fórmules tenen els gràfics que no estan emparellats amb cap fórmula anterior?

**Exercici 647.** Identifiqueu el gràfic amb la seva fórmula:

Fórmules:

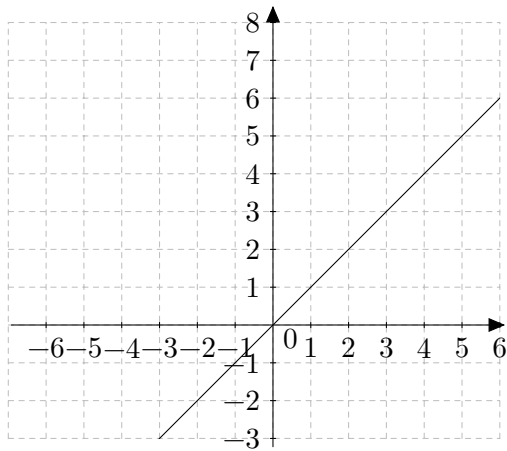
a.  $y = x$

b.  $y = 2x$

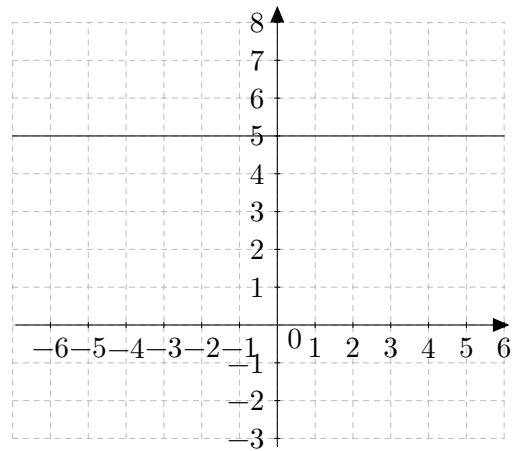
c.  $y = 5$

d.  $y = -x + 1$

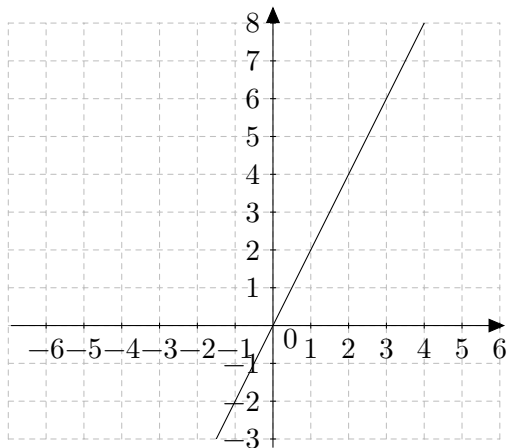
Gràfiques:



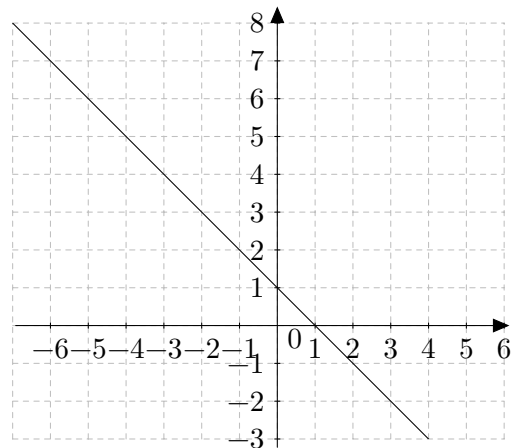
a



b



c



d

**Exercici 648.** Quina fórmula dóna lloc a una recta amb major pendent? Per què? Quina creix i quina decreix?

- (a.)  $y = 2x + 3$ , (b.)  $y = 4x + 3$
- (a.)  $y = 5x + 10$ , (b.)  $y = 5x + 20$
- (a.)  $y = -5x + 12$ , (b.)  $y = 5x + 12$
- (a.)  $y = 20x + 100$ , (b.)  $y = 20x$ , (c.)  $y = -20x$ , (d.)  $y = 10x + 200$

**Exercici 649.** Diguen quan les funcions següents donen lloc a rectes o a corbes. Justifiqueu la resposta:

- $y = 3x$
- $y = 0.1x$
- $y = -7$
- $y = -2x - 1$
- $y = -x - 1$

f.  $y = \sqrt{x}$

g.  $y = \frac{2x}{3}$

h.  $y = \frac{5}{4x}$

i.  $2x - y = 2y + 3x$

j.  $2x - y = 2y + 2x$

k.  $4x + 7y = y - x^2 + 5x$

l.  $2x^2 + y = 2x^2 - 7$

m.  $2x - 5y = y + 20$

n.  $y = 9x - \frac{x}{3}$

o.  $y = 2x + \frac{3}{5}$

## Solucions

Exercici 649.

(a.) recta ( $a = 3, b = 0$ ), (b.) recta ( $a = 0,1, b = 0$ ), (c.) recta ( $a = 0, b = -7$ ), (d.) recta ( $a = -2, b = -1$ ), (e.) recta ( $a = -1, b = -1$ ), (f.) corba, (g.) recta ( $a = \frac{2}{3}$ ), (h.) corba, (i.) recta ( $a = \frac{1}{3}$ ), (j.) recta ( $a = 0, b = 0$ ), (k.) corba, (l.) recta ( $a = 0, b = -7$ ), (m.) recta ( $a = \frac{2}{6}, b = \frac{20}{6}$ ), (n.) recta ( $a = \frac{28}{3}, b = 0$ ), (o.) recta ( $a = 2, b = \frac{3}{5}$ )

## 6.2 Modelització

### 6.2.1 Funcions lineals

**Exercici 650.** Un model de cotxe determinat consumeix 20 litres cada 100 quilòmetres.

- Trobeu la relació que hi ha entre el nombre de quilòmetres recorreguts i els litres consumits
- Digueu quina és la variable dependent i la variable independent
- Feis la seva representació gràfica
- Quants de litres s'haurien d'haver posat al dipòsit per recórrer 224 km?
- Si en el dipòsit hi hagués 24 litres, quina distància es podria recórrer?

**Exercici 651.** 2,5 metres de tela costen 48 €. Trobeu una fórmula que relacioni el nombre de metres de tela que es compren i els euros que costen. Representeu-la gràficament

**Exercici 652.** Representeu gràficament la relació que existeix entre el nombre de cavalls a una granja i el nombre de pinso que mengen si sabem que 12 cavalls mengen 100 quilògrams de pinso.

**Exercici 653.** Per fer un pastís, necessitam 250 g de farina per a cada 100 g de sucre.

- Quina relació hi ha entre els grams de sucre i els grams de farina. Expresses aquesta relació amb una expressió algebraica
- Representeu gràficament aquesta relació
- Quina és la variable dependent i la variable independent?
- Què es necessitaria per fer una coca amb 400 g, 300 g i 1000 g de sucre?

**Exercici 654.** Per fer la massa del pa, per a cada dos quilògrams de farina hem de posar 500 ml d'aigua.

- Quina relació existeix entre els litres d'aigua i els quilògrams de farina de la massa de pa?
- Quina és la variable dependent i la variable independent?
- Trobeu la representació gràfica

**Exercici 655.** (canvi €-\$) Els euros i els dòlars són monedes. A dia d'avui, 1 euro equival a 1,36 dòlars.

- Feis una gràfica que relacioni els euros i els dòlars. Com a mínim representeu 8 punts.
- Es poden unir els punts de la gràfica? Raoneu la resposta.

**Exercici 656.** (batecs) Quantes vegades batega el cor d'una persona al llarg de la seva vida? En quin moment s'arriba als 10.000 batecs? Nota: podeu aproximar el nombre de batecs per minut, mesurant el vostres batecs per minut.

**Exercici 657.** (batecs 2) Podríeu refinar la vostra estimació de l'exercici 656 sobre quan s'arriba als 10.000 batecs emprant la fórmula de Haskell-Fox del nombre de batecs màxim ( $HR$ ) que una persona pot tenir?

$$HR = 220 - \text{edat}$$

## 6.2.2 Funcions afins

**Exercici 658.** (capses de xocolata) N'Estefania està ajudant a la banda de música dels seus amics a recaptar diners per a fer una gira. El grup decideix vendre tabletas de xocolata. Cada tableta es ven per 1,50 € i cada caixa conté 20 tabletas. D'altra banda, cada caixa els costa 0,20 €.

- Existeix una relació entre el nombre de capses venudes i els diners recaptats?
- Feis el gràfic que relaciona aquestes dues quantitats?
- Calculeu quants de diners s'hauran recaptat si es venen 100 capses de xocolata
- Al final la banda ha recaptat 2.831 €. Quantes capses han venut?

**Exercici 659.** (capses de xocolata 2) La banda de l'exercici anterior (exercici 658) decideix canviar de proveïdor: ara cada capsa els costa 0,10 €, però decideixen abaixar el preu de la tableta fins a 1,10 €. Guanyaran més o menys?

**Exercici 660.** (clics) Els ingressos de la pàgina [www.matematiques.org](http://www.matematiques.org) són deguts als conceptes següents:

- ★ 10 euros al mes fixos, degut a l'aportació dels fundadors
- ★ 0,32 euros per cada clic sobre la publicitat de la pàgina

Quina funció relaciona el nombre de clics sobre la publicitat de la pàgina i els ingressos? Si els ingressos de la pàgina han estat de 458 €, quants de clics s'han fet a la pàgina?

**Exercici 661.** (factura del gas) En la factura del gas d'una ciutat es paga una quantitat fixa de 15 €, i 0,75 € per a cada metre cúbic consumit. (a.) Quan es paga per 3 m<sup>3</sup>? I per 5 m<sup>3</sup>? (b.) Representeu la funció metres cúbics consumits-cost (c.) Quina és la variable dependent i independent? (d.) Què s'hagués consumit si s'hagués pagat 200 €?

**Exercici 662.** (anunci per paraules) Un anunci per paraules en un diari costa 0,80 € per paraula, i s'estableix un mínim de cinc paraules per a poder ser admés.

- Elaboreu una taula i una gràfica de la funció que relaciona el nombre de paraules amb el preu de l'anunci.
- Quines són les variables del gràfic?
- Quantes paraules s'han d'emprar en un anunci per a què costi 20 €?

**Exercici 663.** (crixada telèfon) Per fer una cridada de telèfon tenim els costos següents:

- ★ Simplement per l'establiment de cridada, 1,50 euros
- ★ Per cada minut, 0,320 euros

Trobeu la funció que relaciona el cost d'una cridada de telèfon i el número de minuts que conversam. Quants minuts podríem parlar si tenguéssim 20 €?

**Exercici 664.** (una granja de vaques) En una granja, tenim que:

- ★ Les despeses fixes (llum, telèfon, etc) representen 240 euros
- ★ Dotze vaques mengen 450 kg de pinso al mes

Tenint en compte que un kg de pinso val 1,32 €, calculeu la funció que relaciona les despeses en el mes i el número de vaques de la granja.

- Si tenim 250 vaques, quines despeses tendrem?
- Si volem que els costos de la granja com a màxim siguin 10.000 €, quantes vaques podríem tenir?

**Exercici 665.** (vins d'Oporto) En aquesta carta de vins d'Oporto (figura 6.3), tenim el darrer preu tapat:

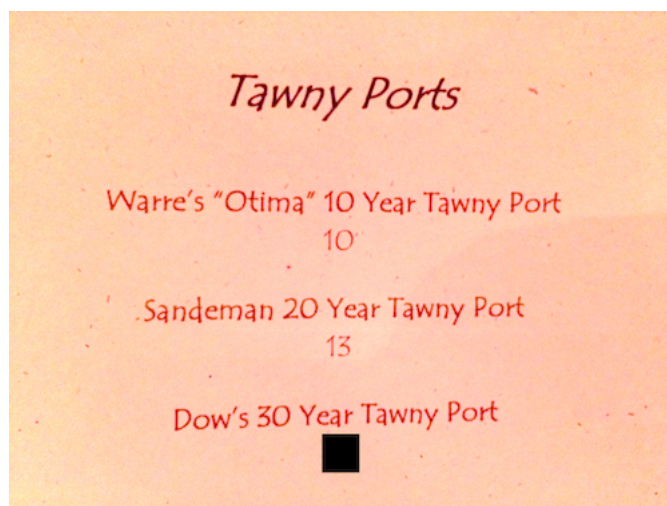


Figura 6.3 Carta de vins (en anglès)

- Quin és el darrer preu? Es pot establir de qualque manera?
- Què valdria un vi que tinguéssim 42 anys? I un vi de 137?
- Es pot establir una fórmula que relacioni els anys i el preu del vi?
- Podeu saber quants anys tindrà un vi que costi 25€?

**Exercici 666.** (dilatació) La longitud  $L$  d'una barra de metall és una funció lineal en funció de la temperatura  $T$ , on  $L$  es mesura en centímetres i  $T$  en graus Celsius. S'han realitzat les mesures següents:  $L = 124,91$  quan  $T = 0$ , i  $L = 125,11$  quan  $T = 100$ .

- Trobeu una fórmula que doni  $L$  en funció de  $T$ .
- Quina serà la longitud de la barra quan la temperatura sigui de  $20^\circ$ ?
- A quina temperatura s'hauria d'encalenticar la barra per a què fes 125,17 cm de llarg?

**Exercici 667.** (predicció dels cotxes) Sabem que l'any 2012, es varen vendre 20.000 cotxes a un concessionari, i que l'any 2014, es varen vendre 40.000.

- a. Podeu saber quants cotxes es vendran l'any 2020?
- b. Aproximeu el nombre de cotxes venuts l'any 2010
- c. Si segueix aquest ritme, hi haurà algun any en que el nombre de cotxes venuts sobrepassi el milió?

**Exercici 668. (nàufrag)** Un nàufrag decideix intentar partir de la illa on està. Si va a una velocitat de 2 m/s amb una balsa, quina funció relaciona el temps que passa i la distància a la que es troba de la illa? Representeu-la gràficament.

Abans de partir, el nàufrag veu un vaixell a la deriva a 200 metres que, segons els seus càlculs, va a una velocitat de 1 m/s. Serà capaç d'agafar el vaixell en algun moment? Si la resposta és afirmativa, quan?

**Exercici 669. (manteniment del jardí)** Per pagar el manteniment del jardí d'una comunitat de veïns, hem de pagar 100 € al mes fixos i 10 euros per hora treballada. Què ens costarà al mes en funció de les hores que hi fan feina?

**Exercici 670. (preus de l'autoescola)** En l'autoescola Ramírez les tarifes són les següents:

Preu de cada classe .....	15 €
Preu de la matrícula .....	150 €

- a) Si hem utilitzat els serveis de Ramírez i amb 5 classes hem obtingut el carnet. Què hem pagat?
- b) Quan haguéssim pagat si haguéssim fet 6 classes? I amb 7 classes?
- c) Feis una gràfica que relacioni el que costa obtenir el carnet segons el nombre de classes rebudes
- d) Si volem gastar com a màxim 2000 €, quantes classes podrem fer?

### 6.2.3 Comparativa de productes

**Exercici 671. (repartidors de publicitat)** En Joan i n'Albert firmen un contracte per repartir publicitat. En Joan cobra 20 € al dia fixos i 0,2 € per a cada fulla repartida. N'Albert cobra 10 euros per dia fixos i 0,3 € per a cada fulla.

- a) Expresses que guanyaran en Joan i n'Albert amb una fórmula
- b) Qui guanyarà més?

**Exercici 672. (cartutxos de tinta)** En el mercat hi ha dues classes d'impressores:

IMPRESSORA A	IMPRESSORA B
Cost impressora..... 70 €	Cost impressora..... 40 €
Cartutx (20 ml).....10 €	Cartutx (10 ml).....20 €

**Taula 6.1** Costos de les impressores

Quina impressora és més cara? (podeu suposar que gasten el mateix, és a dir, que el podeu imprimir el mateix nombre de folis amb la mateixa quantitat de tinta)

**Exercici 673.** (cartes al banc) El banc ens cobra 0,60 € cada any de manteniment de la llibreta més un 0,01€ per cada carta que ens envien. Com canvia el que ens cobren en funció del nombre de cartes? Si un altre banc ens cobra 0,20 € cada any per manteniment i 0,05€/carta enviada, a quin banc ficariem els doblers?

**Exercici 674.** (companyies de telèfon) La companyia de telèfons mòbils Wiffone cobra 0,10 € per establiment de cridada i 0,02 € per segon, mentres que la companyia Telephone en cobra 0,20 per establiment de crida i 0,01 € per segon.

- Trobeu la fórmula que permet saber què pagam per segon parlat en cada companyia
- Quina és la variable dependent i la independent?
- Com varia el cost al llarg del temps?

**Exercici 675.** (discoteca) Per anar a una discoteca ens cobren 10 € a l'entrada i 3 € per consumició. Per quan *ens sortirà* la nit en funció del nombre de beures?. Representeu-ho gràficament Serà aquesta discoteca més barata que una altra que només ens cobra 20 € d'entrada i tenim barra lliure?

**Exercici 676.** (jugador de futbol) Un jugador de futbol cobra:

- ★ 10.000 euros per any
- ★ 1.000 euros per a cada partit guanyat

Però el club de futbol li vol fer una oferta que cobri 15.000 l'any en total. Aquest jugador vos demana la vostra opinió. Quin consell li donaríeu?

**Exercici 677.** (companyies telefònica) La companyia de telèfons mòbils Rodafone cobra 0,10 euros per establiment de cridada i 0,02 € per segon, mentres que la companyia Elgo cobra 0,70 euros per establiment de cridada i 0,01 euros per segon.

- Trobeu la fórmula que permet saber què s'ha de pagar per segon parlat en cada companyia
- Quina és la variable dependent i quina la variable independent?
- Trobeu en quins trams la primera companyia és més cara que la segona.
- Quina companyia és més cara si parlem 3 minuts?

**Exercici 678.** (companyia telefònica) La companyia de telèfons mòbils Wiffone cobra 0,05 € per establiment de cridada i 0,05 € per segon, mentres que la companyia Telephonic en cobra 0,30 per establiment de crida i 0,001 € per segon.

- Trobeu la fórmula que permet saber què pagam per segon parlat en cada companyia
- Quina és la variable dependent i la independent?
- Representeu gràficament cada funció

**Exercici 679.** (perímetres de rectangles) Tenim les figures següents:

- Un rectangle de base igual a cinc vegades l'altura.
- Un rectangle de base igual a dues vegades l'altura més deu.  
Compareu els seus perímetres.

**Exercici 680.** (manteniment del jardí) Per pagar el manteniment del jardí d'una comunitat de veïns, es tenen dues ofertes de companyies diferents: amb la primera es paguen 100 euros al mes fixos i 10



euros per hora treballada dels operaris. Amb la segona, s'han de pagar 200 € fixos al mes i 5 euros per hora treballada.

- Trobeu com canvia el que es cobra en funció del nombre d'hores facturades
- Representeu les funcions gràficament
- Raoneu sobre quina oferta convendria més triar (suposant que, en tot moment, es tria l'oferta més barata)

**Exercici 681.** (els telegrams) Per enviar un telegrama, la web de Correus ens proporciona la informació següent (figura 5.2):

## Envío de documentos



Régimen	Tarifa (€)	IVA (€)	Precio final (€)
<b>Régimen continental:</b> comprender los países de Europa, Turquía, Argelia, Egipto, Israel, Jordania, Líbano, Libia, Marruecos, Siria y Túnez			
* Por cada palabra (sin mínimo de percepción)	0,96	0,10	1,06
* Tarifa fija	29,54	3,10	32,64
<b>Régimen intercontinental:</b> comprender los países no incluidos en el régimen continental y que admitan esta modalidad			
* Tarifa por palabra (con un mínimo de percepción por importe de siete palabras)	3,28	0,68	3,96

Taula 6.2 Transcripció de les tarifes 2014 de Correus

- Què és més barat, enviar un telegrama continental o intercontinental? De què depèn?
- Quan és exactament igual de car?

**Exercici 682.** (comissions del banc) Per fer un recàrrec a la *cibertargeta*, Caixabanc ens cobra de les comissions següents:

RECÀRREC DE LA CIBERTARGETA	
Menys de 100 €.....	1 €
100 € o més .....	un 1%

- Què ens cobrarien si haguéssim d'ingressar 20 €? I per 120 €?
- Què hem ingressat si ens han cobrat 23,5€?
- Quina quantitat ens convé més ingressar? Podeu representar gràficament la relació doblers ingressats-comissions per fer-vos-ne una idea.
- Podeu comparar-lo amb un altre banc que només cobrès 2 €, independentment de l'ingressat?

## Solucions

- ★ Exercici 665. Representeu gràficament la recta que passa per  $(10, 10)$  i  $(20, 13)$  i trobeu  $f(30)$ . Aquest seria el preu lògic de venda. La fórmula seria  $f(x) = (x - 10) \cdot 3 + 10$ .
- ★ Exercici 667. L'any 2020, hi havia 100.000 cotxes, l'any 2013, 30.000 cotxes (la recta és  $y = 10.000x - 20.100.000$ ). L'any 2110 es produiran un milió de cotxes

## 6.3 Representació de funcions

**Exercici 683.** Representeu gràficament les funcions següents i digueu el tipus de funció del que es tracte (funció afí, funció quadràtica, funció de proporcionalitat inversa o funció exponencial):

- a.  $y = 2x + 3$
- b.  $y = 2/x$
- c.  $y = -5/x$
- d.  $y = x^2 - 5$
- e.  $y = 2^x$
- f.  $y = 5x - 2$
- g.  $y = -4/x$
- h.  $y = (\frac{1}{4})^x$
- i.  $y = -5x^2 - 5$

**Exercici 684.** Representeu gràficament les funcions següents:

- a. La funció que a cada nombre li assigna el seu nombre qualsevol
- b. La funció que a cada nombre li assigna 100 entre aquest nombre
- c. La funció que resulta d'elevat 0.8 a un nombre qualsevol
- d. La funció que a cada nombre li assigna la meitat d'aquest nombre menys cinc
- e. La funció que sorgeix de repartir 100 entre un nombre qualsevol
- f. La funció que a cada nombre li assigna el seu quadrat més 2
- g. La funció que a cada nombre li assigna el seu terç
- h. La funció que resulta d'elevat 3 a un nombre qualsevol
- i. La funció que a cada nombre li assigna la meitat del seu quadrat

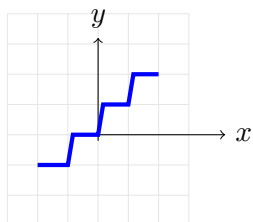
**Exercici 685.** Dels tipus de funcions següents, investeu-vos tres funcions de cada tipus. Representeu-la gràficament en l'interval  $[-2, 2]$ .

**Exercici 686.** Podríeu trobar les expressions algebraiques, la taula de valors i la descripció verbal equivalents a les funcions dels exercicis 683, 684?

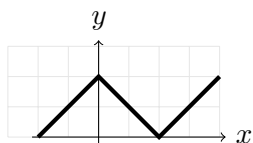
**Exercici 687.** Trobeu  $f(0)$ ,  $f(1)$  i  $f(-1)$  de les funcions dels exercicis 683, 684 i 685.

## 6.4 Elements d'un gràfic

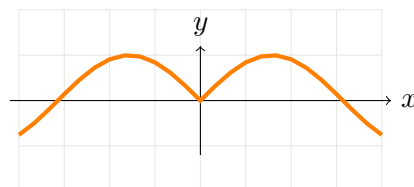
**Exercici 688.** Calculeu (a.) el domini de definició, (b.) els intervals de creixement i decreixement, (c.) els màxims i mínims, (d.) punts de talls amb els eixos, (e.) continuïtat i (f.) simetries dels gràfics de les funcions dels exercicis 685 i dels gràfics següents:



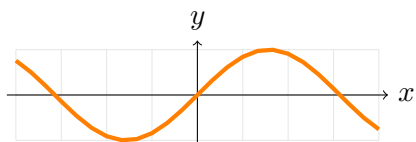
a



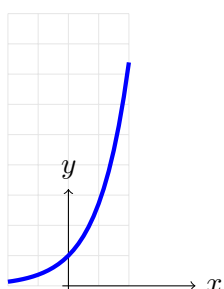
b



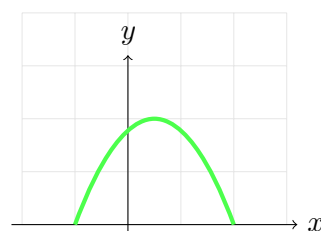
c



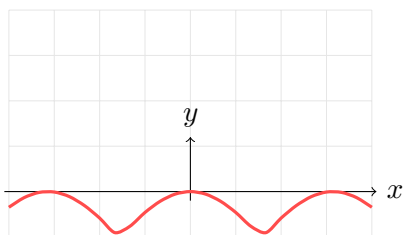
d



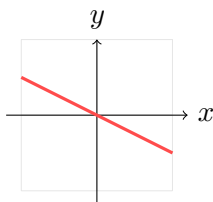
e



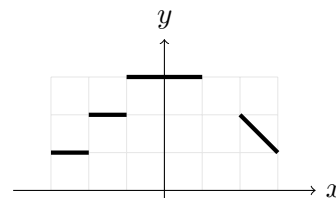
f



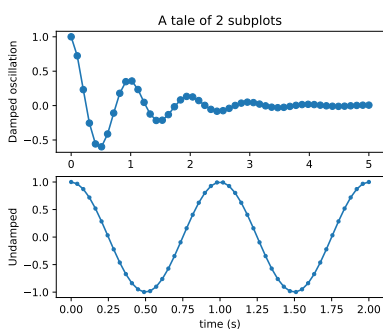
g



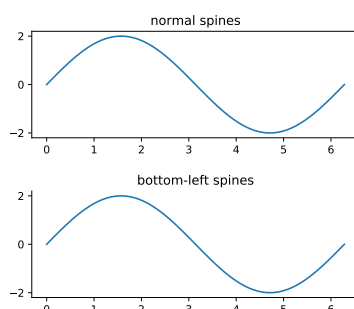
h



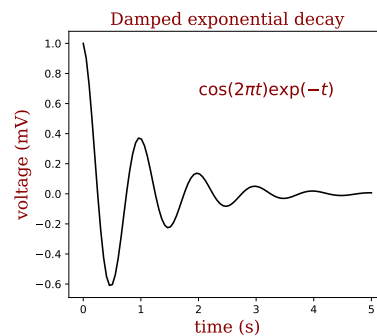
i



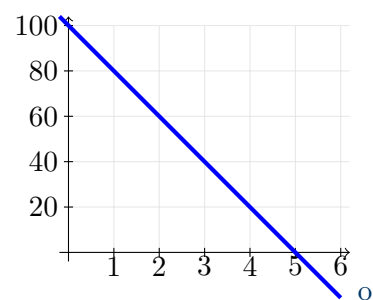
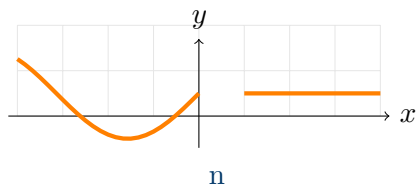
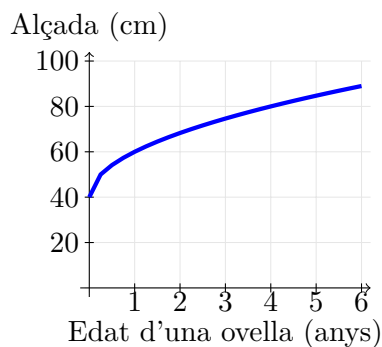
j



k



l

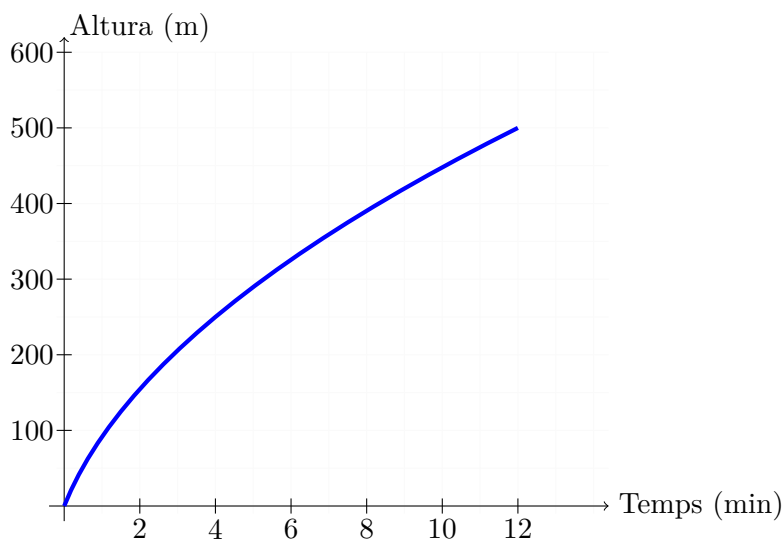


m

## 6.5 Gràfic $\rightarrow$ interpretació

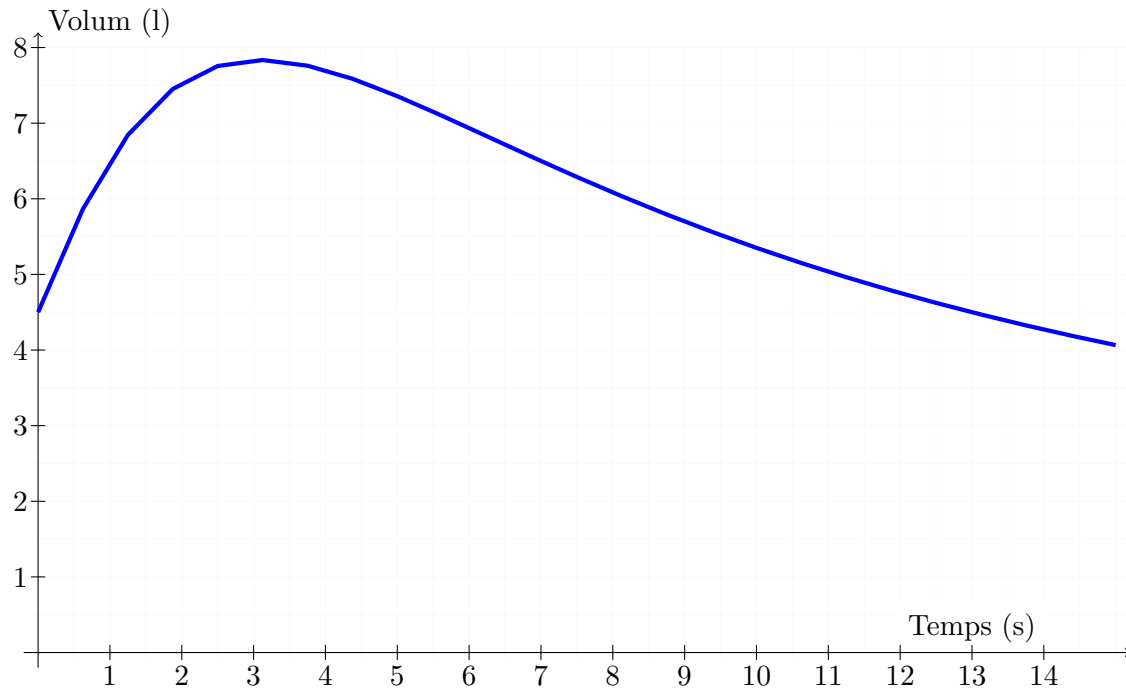
**Activitat 689.** (*Interpretant gràfiques de distància-temps*). Activitat en grup. (vegi's el fitxer específic de l'activitat).

**Exercici 690.** Es molla un globus que s'eleva i, a l'assolir certa altura, rebenta. La gràfica següent representa l'altura, amb el pas del temps, en la que es troba el globus fins que rebenta.



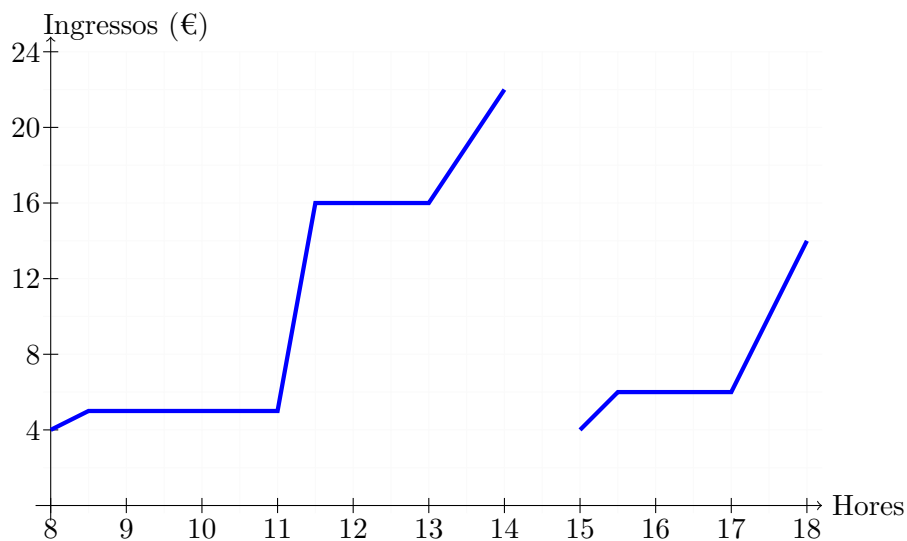
- A quina altura rebenta el globus?
- Quan tarda en rebentar des de que l'amollam?
- Quines variables intervenen?
- Quina escala s'utilitza per a cada variable?
- Quin és el domini de definició d'aquesta funció?
- Quin és el seu recorregut
- Quina altura guanya el globus entre el minut 0 i el 4? I entre el 4 i el 8? En quin d'aquests intervals creix més ràpidament la funció?

**Exercici 691.** Per mesurar la capacitat espiratòria dels pulmons es fa una prova que consisteix en inspirar al màxim i després espirar tan ràpid com sigui possible en un aparell que s'anomena "espiròmetre". Aquesta corba indica el volum d'aire que entra i surt dels pulmons.



- Quin és el volum en el moviment inicial?
- Quin temps va durar l'observació?
- Quin és la capacitat màxima dels pulmons d'aquesta persona?
- Quin és el volum als 10 segons després d'iniciar-se la prova?

**Exercici 692.** En la porta d'un col·legi hi ha una parada de laminadures. En aquesta gràfica es veu la quantitat de doblers que hi ha a la caixa al llarg d'un dia:



- A quina hora comencen les classes pel matí?
- A quina hora és el pati? Quant dura?
- La parada es tanca al migdia i l'amo s'enduu els doblers a casa. Quins varen ser els ingressos aquest matí?
- Quin és l'horari d'horabaixa del col·legi?
- Aquesta funció és contínua o discontinua?

**Exercici 693.** Na Marta, en Marc, n'Elena i en Lluís comenten com ha anat la seva anada al l'institut aquest matí.

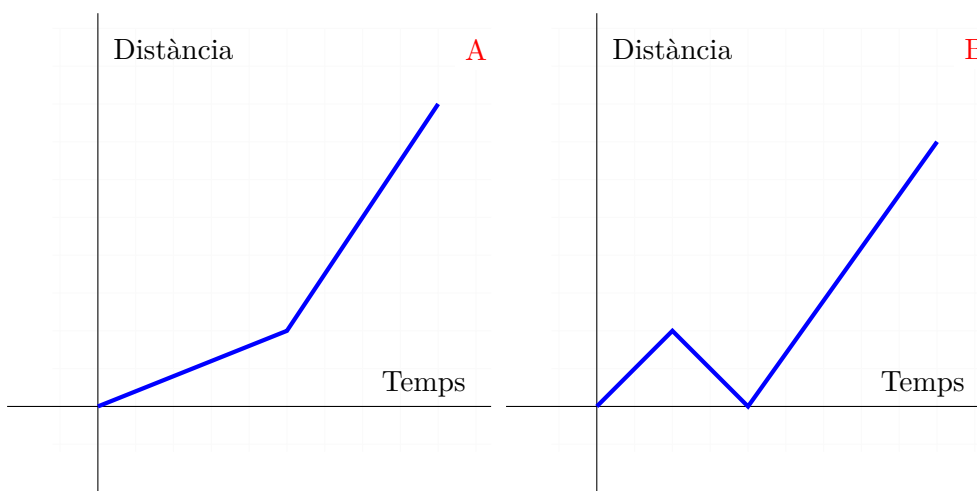
**MARTA:** Vaig anar amb motocicleta; però se m'oblidà un treball que havia d'entregar i vaig haver de tornar a ca meva. Després vaig córrer tot el que pogué fins a arribar a l'escola.

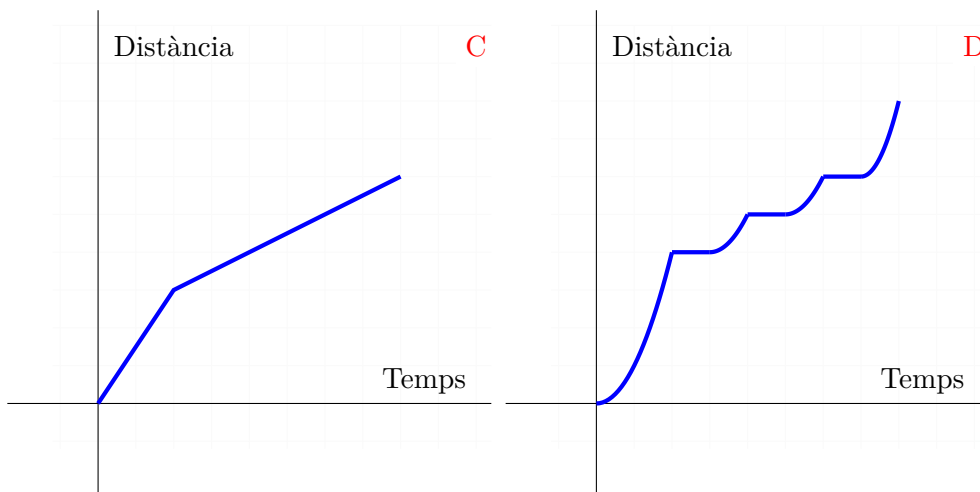
**MARC:** Ma mare me va dur en cotxe; però ens trobàrem un embús en el semàfor que hi ha a la meitat de camí i ens va retardar molt.

**ELENA:** Me vaig trobar en el portal de ca nostra un amic que anava a un altre col·legi. Vàrem fer junts una part del camí i, quan ens vàrem separar, vaig haver de fer més via perquè, amb la xerrada, se me va fer tard.

**LLUÍS:** Vaig sortir de casa molt aviat perquè havia quedat amb na Maria i era tard. Després vàrem fer el camí junts amb més calma.

Els quatre van al mateix col·legi i cadascuna d'aquestes gràfiques mostra, *en distint ordre*, la trajectòria que han duit a terme des de la sortida de les seves cases fins a l'entrada al col·legi. En totes les gràfiques s'ha utilitzat la mateixa escala.





- Quina és la gràfica que relaciona amb la descripció que ha fet cadascú?
- Qui viu més aprop del col·legi?
- Qui va tardar menys en arribar-hi?

## 6.6 Funció exponencial

### 6.6.1 Càlcul de $f(x_0)$

**Exercici 694.** Trobeu el terme desè de la sèrie numèrica: 2, 4, 8, 16, 32, .... Podríeu trobar el terme 20è? Podríeu enunciar la regla de formació?

**Exercici 695.** Donades les funcions (a.)  $y = 2^x$ , (b.)  $y = 3^x$ , (c.)  $y = 0,5^x$ , (d.)  $y = 0,1^x$  i (e.)  $y = 1,5^x$ , calculeu (a.) la  $y$  per a  $x = 2$ , (b.) la  $y$  que correspon a  $x = 0$ , (c.) la  $y$  que correspon a  $x = -1$ , (d.)  $y(1)$ , (e.)  $y(3)$  i (f.)  $y(0,5)$ .

**Exercici 696.** Determineu la fórmula de la funció exponencial on cada terme enter s'obté aplicant un augment percentual del 10% respecte de l'anterior. Podeu calcular els 10 primers termes? I el terme 40è?

**Exercici 697.** Donades les funcions (a.)  $f(x) = 10^x$ , (b.)  $g(x) = 0,25^x$ , (c.)  $h(x) = 4^x$ , (d.)  $t(x) = 0,2^x$  i (e.)  $u(x) = 5^x$ , calculeu els valors de les funcions per a  $x = 1, 2, 3, -1, -2, -3$ . Noteu alguna relació entre les funcions  $g(x)$  i  $h(x)$ ? I entre les funcions  $t(x)$  i  $u(x)$ ?

**Exercici 698.** Determineu la fórmula de la funció exponencial determinada per la progressió:

- Pas 1  $\rightarrow$  20 cm,
- Pas 2  $\rightarrow$  5% més de 20 cm = 21 cm,
- Pas 3  $\rightarrow$  5% més de 21 cm = 22,05 cm
- ...

Trobeu el terme 15è.

**Exercici 699.** Calculeu el valor de la  $f(t)$  per a  $t = 2$ ,  $t = 5$ ,  $t = 0$  i  $t = -2$  per a (a.)  $f(t) = 0.2^t$ , (b.)  $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ , (c.)  $f(t) = 12^t$  i (d.)  $f(t) = 0.3^t$

**Exercici 700.** Determineu la fórmula de la funció exponencial determinada per la progressió: (1.) Pas  $1 \rightarrow 6$  l, (2.) Pas  $2 \rightarrow$  un 25% menys de  $6$  l =  $4,5$  l, (3.) Pas  $3 \rightarrow$  un 25% menys del pas  $2 = 3,375$  l (4.) ... . Trobeu el terme 15è.

**Exercici 701.** Donada la funció  $f(x) = 0,7^x$ , determineu les coordenades dels punts  $P = (-2, a)$ ,  $Q = (-1, b)$ ,  $R = (1,55, c)$  i  $S = (3,9, d)$  que pertanyen a la seva gràfica.

**Exercici 702.** (la paradoxa de Zenó) Zenó plantejava la següent paradoxa:

“una persona vol caminar 1 metre. Però en comptes de fer-ho d’una tirada, en primer terme camina la meitat del camí, després camina la meitat de la meitat, i així successivament.

D’aquesta manera mai arribaria a assolir el punt d’arribada, ja que és necessari una infinitat de passos per arribar-hi, però la distància de partida era finita”

Això suposava per a Zenó una paradoxa. Podríeu calcular quina distància caminaria a la passa 11a? I si el recorregut fos de 8 quilòmetres en comptes d’un metre? I si en comptes de caminar la meitat cada cop el personatge de la paradoxa recorregués un dos cinquens?

**Exercici 703.** Donada la funció  $f(x) = 3 \cdot 2^x$ , trobeu (a.)  $f(2)$ , (b.)  $f(0,25)$ , (c.)  $f(0,8)$ , (d.)  $f(0)$ , (e.)  $f(-1)$  i (f.)  $f(-10)$ .

## 6.6.2 Determinació de $f(x)$ i càlcul de $f(x_0)$

**Exercici 704.** Determineu la funció exponencial  $f(x) = a^x$  si sabem que  $f(2) = 16$ . Trobeu  $f(3)$ .

**Exercici 705.** Sabem  $f(x)$  és una funció exponencial. Trobeu  $f(5)$  si sabem que:

a.  $f(2) = 81$

c.  $f(3) = 27$

e.  $f(4) = 625$

b.  $f(3) = 0,008$

d.  $f(4) = 0,4096$

f.  $f(6) = 0,015625$

**Exercici 706.** Determineu la funció exponencial  $f(x) = a^x$  si sabem que  $f(x)$  passa pel punt  $P = (1, 3)$ .

**Exercici 707.** Si  $f(x) = a^x$  és una funció exponencial, calculeu el paràmetre  $a$  si sabem que passa pel punt  $P = (7, 3)$ .

**Exercici 708.** Determineu la funció exponencial  $f(x) = a^x$  si sabem que passa pel punt  $P = (2,5, 0,1)$ . Podem esperar un valor de  $a$  major o menor que 1?

## 6.6.3 Representació gràfica

**Exercici 709.** Representeu gràficament les funcions exponencials dels exercicis 695 i 697.

**Exercici 710.** (a.) Emparelleu les expressions algebraiques, les taules de valors i les expressions verbals (hi pot haver més d’un emparellament). (b.) Podeu representar gràficament aquestes funcions?

A. Expressió algebraica

a.  $y = 2^x$

b.  $y = 3^x$

c.  $y = 0,5^x$

d.  $y = 5 \cdot 2^x$

B. Taules de valors



a.

$x$	1	2	3	4
$f(x)$	3	9	27	81

b.

$x$	0	2	5
$f(x)$	5	20	160

c.

$x$	0	2	3	6
$f(x)$	1	0,25	0,125	0,015625

d.

$x$	0	1	3	-2
$f(x)$	1	2	8	0,25

### C. Expressions verbals

- La població inicial és de 5 homes i cada any s'incrementa la població un 2%
- La població inicial és de 5 homes i cada any s'incrementa el doble la població
- Cada terme enter és el doble de l'anterior
- Cada terme enter és un 300 % l'anterior
- La població inicial és de 5 homes i cada any s'incrementa la població un 200%
- Cada vegada, feim la meitat

**Exercici 711.** Relacioneu les funcions exponencials següents amb el tipus de gràfic (creixent, decreixent o constant):

a.  $f(x) = 2^x$

e.  $y = \frac{2^x}{3}$

b.  $y = 5^x$

c.  $y = 0,1^x$

f.  $y = \frac{5^x}{2}$

d.  $y = 1^x$

g.  $f(x) = 10^x$

**Exercici 712.** Representeu gràficament les funcions dels exercicis 698 i 700.

## 6.7 Funció quadràtica

Recordem de cursos anteriors que una funció de l'estil  $y = ax + b$  donava lloc a una recta i que totes<sup>3</sup> les rectes al pla cartesià venien donades per funcions d'aquest estil. Aquestes funcions s'anomenaven funcions afins. Per tant, totes les altres funcions donen llocs a corbes. Ocupem-nos tot seguit de les funcions que tenen un factor de segon grau en la seva fórmula, és a dir, que tenen  $x^2$  però no tenen cap potència d'exponent major.

★  $y = x^2$

Aquesta funció dona lloc a la gràfica següent (figura 6.4):

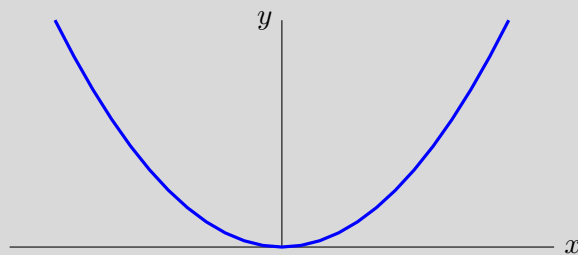


Figura 6.4 Paràbola  $y = x^2$

Aquest tipus de corba es coneix com a *paràbola* i es caracteritza perquè tots els punts de la corba estan a la mateixa distància d'un punt fix, anomenat *focus*, i una recta, anomenada *directriu* (vegeu ??). Té la propietat que qualsevol *raig* vertical que incideix a la paràbola va a parar al focus. Això és utilitzat a les antenes parabòliques per amplificar les senyals.

Existeix un punt singular: el vèrtex de la paràbola, on la paràbola passa de decreixer a créixer.

A continuació anirem complicant aquesta fórmula, mica en mica, i veurem que leix corbes resultants també donen lloc a paràboles. A més, les transformacions de la fórmula correspondran a moviments geomètrics d'aquesta paràbola base.

★  $y = (x - B)^2$

Aquesta transformació correspon a una translació vertical de la paràbola. La paràbola es mou  $B$  unitats a la dreta. O sigui, el seu vèrtex es mou a la posició  $(B, 0)$ . Vegeu figura

★  $y = (x - B)^2 + C$

Aquesta transformació fa que el vèrtex de la paràbola pugi verticalment  $C$  unitats. Per tant, el vèrtex d'aquesta paràbola queda situat a  $(B, C)$ . Vegeu figura

★  $y = A(x - B)^2 + C$

La introducció del paràmetre  $A$  fa que cada valor de  $(x - B)^2$  es multipliqui per  $A$ . Per tant, si  $|A|$  és major que 1, això farà que s'obtingui un valor major que si no es tingués  $A$ . Per tant,  $y$  tindrà un valor major i, llavors, la paràbola serà més tancada. En el cas, en que

<sup>3</sup> Excepte les rectes verticals.

$|A| < 1$ , la paràbola serà més oberta, més *gruixada*. En definitiva, el paràmetre  $A$  determina l'*obertura* de la paràbola. Vegeu figura

▷ Si  $A > 0$ , la paràbola és *còncava*.

▷ Si  $A < 0$ , la paràbola és *convexa*.

En general per a representar una paràbola es determinen: (a.) Orientació (b.) Vèrtex (c.) Punts de tall amb els eixos. Vegem com determinar aquests components per una paràbola genèrica.

★ Per  $y = A(x - B)^2 + C$

▷ Orientació:

- Si  $A > 0$ , la paràbola és còncava.
- Si  $A < 0$ , la paràbola és convexa.

▷ Vèrtex: el vèrtex té coordenades  $(B, C)$

▷ Punts de tall amb els eixos:

- El punt de tall amb l'eix  $Y$  es troba substituïnt  $x = 0$  a la fórmula  $y = A(x - B)^2 + C$ .
- El punt de tall amb l'eix  $X$ , anàlogament, es troba fent  $y = 0$  a l'equació  $y = A(x - B)^2 + C$ .

★ Per  $y = ax^2 + bx + c$

▷ Orientació:

- Si  $a > 0$ , la paràbola és còncava.
- Si  $a < 0$ , la paràbola és convexa.

▷ Vèrtex: El vèrtex és el punt  $(x_v, y_v)$  i s'obté amb la fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = y(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

▷ Punts de tall amb els eixos:

- El punt de tall amb l'eix  $Y$  es troba substituïnt  $x = 0$  a la fórmula  $y = ax^2 + bx + c$ .
- El punt de tall amb l'eix  $X$ , anàlogament, es troba substituïnt  $y = 0$  a l'equació  $y = ax^2 + bx + c$ .

Notem que sempre podem passar d'una forma a altra d'una paràbola usant les transformacions que vàrem veure a l'apartat de les equacions de 2n grau (equació 5.1, pàgina 179).

## 6.7.1 Representació gràfica de funcions quadràtiques

**Exercici 713.** Representeu gràficament les funcions següents:

- a.  $y = (x - 2)^2 + 3$                       c.  $y = -(x + 2)^2 - 4$                       e.  $y = -10x^2 - 20x$   
 b.  $y = -2(x - 3)^2 + 5$                       d.  $y = -4x^2 - 8x + 12$                       f.  $y = 2x^2 - 4x - 1$

**Exercici 714.** Representeu les funcions següents:

- a.  $y = x^2 + 2$                       d.  $y = 3(x - 1)^2$                       g.  $y = 2x^2 - 8x$   
 b.  $y = (x - 2)^2$                       e.  $y = -x^2 + x - 10$                       h.  $y = (x - 1)(x + 2) + 3$   
 c.  $y = 2x^2 - x + 2$                       f.  $y = (x + 3)^2 + 1$                       i.  $y = -2(x - 3)^2 - 10$

En cada cas, trobeu el vèrtex de la paràbola.

**Exercici 715.** Representeu:

- a.  $y = 2x^2 + 12x + 16$                       e.  $y = -x^2 + 2x - 2$   
 b.  $y = x^2 - 2x + 1$                       f.  $y = -3x^2$   
 c.  $y = -x^2 - 2x - 4$                       g.  $y = 2x^2 - 8$   
 d.  $y = x^2 - 2x$                       h.  $y = -(x + 10)^2 - 10$

## 6.7.2 Càlcul del vèrtex, orientació i punts de tall amb els eixos

**Exercici 716.** Trobeu la curvatura, el vèrtex i els punts de talls amb els eixos d'aquelles funcions que donin lloc a paràboles:

- a.  $y = 2x^2 + 2x - 12$                       i.  $y = -x^2 + 2$   
 b.  $y = -x^2 - 3x - 2$                       j.  $y = -2x^2 + 7$   
 c.  $y = 3x^2 + 9x$                       k.  $y = -x^2 + 25$   
 d.  $y = -3x^2 + 9$                       l.  $y = -x^2 - 25$   
 e.  $y = 3x^2 + 9$                       m.  $y = x^2 - 2x + 3$   
 f.  $y = -x^2 - 2x - 4$                       n.  $y = (x - 2)^2 + 3(x - 3)$   
 g.  $y = -x^2 - 3x - 2$                       o.  $y = 3(x - 3)^2 - 3x^2$   
 h.  $y = -x^2$

**Exercici 717.** Trobeu el vèrtex de la paràbola que té com a fórmula  $y = -x^2 + 4$

**Exercici 718.** Trobeu el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de les paràboles:

- a.  $y = (x + 2)^2 + 2$                       d.  $y = -2(x + 3)^2 + 5$   
 b.  $y = (x - 2)^2 + 2$                       e.  $y = -5(x - 3)^2 - 5$   
 c.  $y = 4(x - 2)^2 - 3$                       f.  $y = -2(x - 1)^2$

**Exercici 719.** Trobeu el vèrtex i els punts de tall amb els eixos de les paràboles:

- a.  $y = -(x + 2)^2$                       d.  $y = (x - 1)^2 - 1$   
 b.  $y = (x - 1)(x - 2)$                       e.  $y = 2(x - 1)(x + 3)$   
 c.  $y = (x - 2)^2 - 1$                       f.  $y = 2(x - 1)(x - 2) - 2$

## 6.8 Funcions afins

TODO Interpolació: CFGS

# 7

## MODELITZACIÓ

### 7.1 Models exponencials

**Exercici 720.** (increment de sou) Per conveni col·lectiu, el sou dels treballadors d'una empresa s'incrementa a raó del 2% anual. Si a hores d'ara el sou d'un treballador és de 1000 €, què cobrarà aquest treballador després de 10 anys? I de 20 anys? I de 40 anys? En quin moment passarà dels 2000 €?

**Exercici 721.** (IPC) L'Índex de Preus al Consum (IPC) d'Espanya l'any 2017 ha estat del 3%. Això vol dir que el preu d'un producte s'ha encarat un 3% aquest any respecte l'any anterior. Si assumim que aquest serà l'IPC dels pròxims anys, (a.) què costarà d'aquí 10 anys un producte que ara val 1 €? (b.) I d'aquí 20 anys? (c.) Quin tant per cent s'haurà encarat? (d.) Quan sobrepassarà el producte els 2 €?

**Exercici 722.** (població de bacteris) El creixement d'una població de bacteris es modelitza habitualment mitjançant una funció exponencial. En concret, a cada generació es doblen el nombre de bacteris de la generació anterior (es considera la *generació 0* el bacteri primigeni).

a. Trobeu el nombre de bacteris que hi haurà a les primeres 10 generacions

b. A partir de quina generació el nombre de bacteris serà superior a un milió?

**Exercici 723.** (població d'EUA) Segons l'Oficina del Cens dels Estats Units d'Amèrica, des del 1910 a 2010 la població dels EUA va créixer un 1,5% més cada any. Si sabem que la població l'any 1910 era de 92.228.531 habitants, podeu calcular la població dels anys 1911, 1912, 1920, 1950 i 2010?

**Exercici 724.** (ISO 216) El format de paper **DIN A** és un dels més usats. Té la particularitat de què cada *format* s'obté doblant el paper del format anterior per la meitat.

a. Podríeu calcular les mesures d'un hipotètic DIN A 11? I per un DIN A 12? I per un DIN A 20?

b. En quin moment el format DIN A seria més petit que  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ ?

**Exercici 725.** (virus mortal) Recentment s'ha descobert un nou virus, del qual per ara no hi ha cap vacuna. La malaltia va començar amb un portador inicial, que la va adquirir a través d'una mossegada de simi. Es sap que, de mitjana, una persona infecta a tres persones noves abans de morir. Això es considera una *passa de creixement del virus*.

a. Quantes persones s'infectaran a la passa 2? I a la 3? I a la 10? I a la 20?

b. Quantes persones hauran estat infectades des del començament fins a la passa 10?

c. Quantes passes són necessàries per a infectar a tota la població espanyola: 46.468.102 habitants?

**Exercici 726. (radioactivitat)** Els elements radioactius es descomponen seguint un model exponencial:

$$Q(t) = Q_0 A^{-t}, \text{ on}$$

★  $Q_0$  és la quantitat de material radioactiu que tenim al principi, és a dir, la quantitat per a  $t = 0$ .

★  $A$  és una constant que depèn del material radioactiu<sup>4</sup>

★  $t$  són el temps transcorregut (en segons)

Si sabem que un element concret té una constant  $A = 2$ , trobeu la quantitat de material radioactiu que tendrem quan hagin passat 20 segons.

**Exercici 727. (cultiu bacterià)** En un cultiu bacterià sabem que cada bacteri dona lloc a dos bacteris cada minut. Si sabem que a hores d'ara hi ha 2 ml de bacteris a un recipient: (a.) Determineu la quantitat de bacteris hi haurà després de 3 minuts i després d'1 hora? (b.) En quin moment haurem sobrepassat el litre de bacteris?

**Exercici 728. (població d'un país)** La població d'un país (mesurada en milions d'habitants) creix exponencialment de la forma  $P(t) = 30 \cdot e^{0,01t}$ , on la variable  $t$  representa els anys transcorreguts des de l'any base 1980.

a. Calcula la població pels anys 1980 a 1995

b. En quin any la població duplicarà la de 1980?

c. En quin any la població duplicarà la de 1990?

**Exercici 729.** Recentment s'ha inaugurat el Palau de congressos de Palma. L'any passat el varen visitar 10500 persones. Es preveu que aquesta quantitat s'incrementa un 2,5% cada any.

a. Calculeu quantes persones visitaran el Palau de congressos d'aquí 10 anys.

b. Quant de temps ha de passar per a què el visitin més de 50000 persones.

**Exercici 730.** La població mundial que té accés a internet s'incrementa en un 10% cada cinc anys. Si sabem l'any 2019 hi ha 4021 milions de persones.

a. Quantes persones tindran accés a internet d'aquí 20 anys?

b. En quants d'anys hi haurà 8000 milions de persones connectades?

**Exercici 731.** El banc ens dona un interès d'un 1,1% anual. Si decidim posar-hi 1200 €, en quant de temps tendrem més de 5000 €?

**Exercici 732.** A Mallorca, el professor de Matemàtiques i el de Ciències Socials han estat mossegats per un zombie. La propagació dels zombies es fa mitjaçant una mossegada mortal. Sabem que de mitjana un zombie mossega a 5 persones (això es considera un passa de la transmissió).

a. Calculeu el nombre de zombies que hi haurà a la passa 12

b. En quin moment hi haurà un apocalipsi zombie a Mallorca: tots els habitants de Mallorca esdevendran zombies?

Dades necessàries: la població de Mallorca és de 1.176.627 persones.

<sup>4</sup> Està relacionada amb la *constant de descomposició exponencial*.

**Exercici 733.** Un grup de cinc amics vol propagar una notícia sobre un acte benèfic a través de WhatsApp. Decideixen que cadascun d'ells li envii a a 3 amics i dir-los que la reenviïn a tres amics més. Si no tenim en compte les possibles repeticions, en quant de temps la notícia arribarà a 10000 persones?

**Exercici 734.** La matrícula del CEPA Camp Rodó creix un 1% anual. Sabem que l'any 2000 va ser de 400 alumnes. Quants d'alumnes s'han matriculat l'any 2019? Quants d'alumnes es matricularan l'any 2025? En quin any hi haurà una matrícula de 6000 alumnes?

**Exercici 735.** El Govern de les Illes Balears redueix la despesa un 2% anual. Si l'any 2019 va ser de 5.457 milions, quants doblers gastarà el Govern l'any 2050?

**Exercici 736.** El consum d'aigua per habitant a les Illes Balears és de 119 litres per dia. En una campanya de conscienciació un grup de 100 persones decideixen fer l'esforç de reduir aquest consum en un 2% anualment.

- Quants litres consumeixen les 100 persones en l'any actual?
- Quants litres consumiran aquest grup de persones al cap de 10 anys (anualment)? Quina quantitat consumirà diàriament una persona d'aquest grup?
- Quina variació de consum hauran experimentat? De forma absoluta, en tant per cent, per persona i dia.

## 7.2 Models quadràtics

### 7.2.1 Aplicació de la fórmula de segon grau

**Exercici 737. (Dipòsit d'aigua)** Es vol construir un dipòsit en forma de prisme de base quadrada. Per motius legals, no es pot fer el dipòsit amb una altura major que 10 m. (a.) Quina hauria de ser el costat de la base si es vol que el seu volum sigui de  $1000 \text{ m}^3$ ? (b.) Si al final es construeix un dipòsit de 4 m d'amplària, quin serà el seu volum?

**Exercici 738. (El safareig)** Es vol construir un safareig. Per falta d'espai, no el podem fer més llarg que 5 metres. D'altra banda, per qüestions estètiques, volem que l'alçada faci un metre més que d'amplada. Amb aquestes restriccions, quin volum tendria el safareig si fes 1 metre d'amplada? Quina capacitat tendria?

Si volem que el safareig tengui una capacitat de 43.750 l, quines han de ser les seves dimensions?

**Exercici 739.** Un cub i una esfera tenen l'aresta i el radi iguals. Si sabem que l'àrea de l'esfera és de  $400 \text{ m}^2$ , què val l'àrea del cub?

**Exercici 740. (El tanc de combustible)** Es vol pintar un tanc de combustible amb una pintura anticorrosiva (figura 7.1).



Figura 7.1 Tanc de combustible

- Quina quantitat de pintura necessitarem?
- Quin diàmetre hauria de tenir el dipòsit si volguéssim gastar 10.000 litres de pintura?

Dades necessàries: (a.) El diàmetre del dipòsit és de 5 m (b.) La seva alçada és de 10 m.

**Exercici 741.** (Les piràmides egípcies) La **piràmide de Keops**, de base quadrada, té una altura de 146 metres i el costat de la seva base és de 230 m.

- Si la omplíssim d'aigua, quina quantitat d'aigua hi cabria?
- Quina quantitat de pintura necessitariem per pintar-la?
- En quants de metres hauríem d'acursar la piràmide per a què tengués un volum de 1000 m<sup>3</sup>?

### 7.2.1.1 Caiguda lliure

La caiguda lliure consisteix en deixar anar un objecte des d'una altura determinada fins que toqui el terra. Aquest objecte només està sotmès a la força de la gravetat. Es suposa que la resistència a l'aire és nul·la.

Es suposa que l'origen de coordenades està enterra. Si deixem anar un objecte des d'una altura inicial  $h$ , la fórmula que relaciona l'altura que té l'objecte en funció del temps és:

$$s = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

on  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Exercici 742.** Quants de segons tardarà a tocar el terra un cos que es llança des d'una altura de 20 metres? A quina alçada es trobarà el cos al cap de 2 segons?

**Exercici 743.** Calculeu quan tocarà el terra una bomba que es llanci des d'una distància de 1000 metres?

**Exercici 744.** Un paracaigudista es llança des de 5000 metres d'alçada. Si ha d'ejectar el paracaigudes als 1500 metres, a quina alçada es trobarà en aquest moment? Quant de temps tardarà a arribar a aquesta alçada?

### 7.2.1.2 Distància de frenada



La distància de frenada és la distància que recorre un vehicle fins que s'atura si inicialment anava a una certa velocitat  $v$ . Aquesta distància es pot calcular amb la fórmula:

$$d = \frac{v^2}{100},$$

on la distància resultant  $d$  serà en metres i la velocitat  $v$  estarà expressada en  $km/h$ .

En aquesta fórmula es suposa que la via on circula el vehicle no té inclinació, és a dir, que el vehicle circula per un terreny totalment horitzontal. També es suposa que el temps de reacció és instantani i que l'adherència és **òptima**.

La fórmula anterior es pot reescriure com

$$d = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

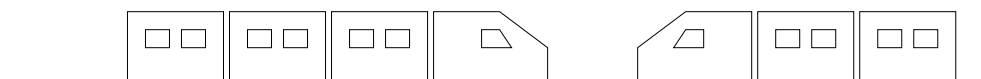
Això suposa una regla pràctica: dividir la velocitat a la que anam entre deu i fer el seu quadrat. D'aquesta manera, tendríem que si anàssim a 42 km/h, aleshores hauríem de deixar, aproximadament,  $4 \cdot 4 = 16$  m de distància de seguretat. Si anàssim a 100 km/h, aleshores n'hauríem de deixar  $10 \cdot 10 = 100$  m.

**Exercici 745.** Calculeu la distància de frenada d'un cotxe que viatja a 80 km/h

**Exercici 746.** Si un cotxe va a 120 km/h quina distància necessita per frenar en sec? Tendrà temps d'evitar un accident que es troba a 100 metres?

**Exercici 747.** Un motorista va a 50 km/h. A 20 metres de distància, el semàfor es posa en groc. Si frena en sec, s'aturarà abans o després del semàfor?

**Exercici 748.** Xocaran aquests dos trens?



Sabem que el primer va a 20 km/h i el segon a 10 km/h i que la distància que els separa en el moment que tots dos frenen és de 200 metres.

## 7.2.2 Problemes d'optimització

**Exercici 749.** (el preu de les bicicletes) Es vol dissenyar un nou model de bicicletes. Basant-nos en altres models de bicicleta i en la pròpia experiència es sap que la funció de demanda és

$$\text{Unitats venudes} = 70.000 - 200 \cdot P,$$

on  $P$  és el preu de la bicicleta.

- Quin serà el benefici màxim que podem obtenir? (noteu que el benefici serà la multiplicació del preu de venda de cada unitat pel nombre d'unitats venudes).
- Fins quan tendrem beneficis (no perdre en el negoci)?

**Exercici 750.** (el preu de l'entrada) A un municipi es vol programar un concert d'estiu. Es decideix contractar a un grup famós i que aquest toqui a l'estadi de futbol de la localitat, en previsió de la considerable afluència, que té una capacitat de 10.000 persones. Es convoca un ple extraordinari a l'ajuntament per debatre un únic punt: "Quin ha de ser el preu de l'entrada del concert". Després de molt de discutir es decideix fixar el preu que faci màxim els doblers recaptats. Però l'únic que es sap és que: quan més car sigui el preu de l'entrada més poca gent la comprarà. Podeu ajudar a trobar aquest preu?

Podeu suposar que per cada dos euros de pujada, baixarà un 10% el nombre de vendes. I que si l'entrada és gratuïta, aleshores l'estadi s'omplirà.

**Exercici 751.** (la capsa de cartró) Els costos de producció d'una capsa de cartró depenen de la seva àrea: cada centímetre quadrat de capsa costa 0,01 €. Es vol fabricar una capsa ortoèdrica com s'indica a la figura següent (figura 7.2), tenint en compte que els estàndards imposen que la mitjana aritmètica de l'amplada i l'alçada sigui igual a 50 cm. Quin serà el cost màxim? Quines mesures tendria la capsa en aquest cas?

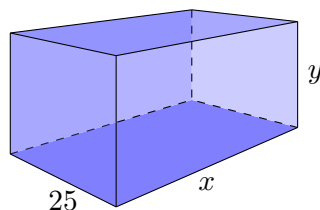


Figura 7.2 Esboç de la capsa de cartró

**Exercici 752.** (el moment de vendre) Una cooperativa agrícola ha de vendre els tomàquets el més aviat possible, quan els preus són alts i el deteriorament és baix. Ara mateix, la cooperativa té 25 tones a la seva disposició i pot afegir-ne dues tones a la setmana d'espera. El benefici actual és de 250 € per tona, però es redueix a raó de 15 € per tona per cada setmana que es retarda. Quan s'han de vendre els tomàquets per tenir el benefici màxim?

**Exercici 753.** (la tarifa de transports) Una companyia de transports cobra 1,25 € per trajecte. Actualment té una mitjana de 10.000 usuaris per dia. L'empresa necessita per augmentar els ingressos, però estima que, per cada 0,10 € d'augment en la tarifa, l'empresa perdrà 500 usuaris. Què ha de cobrar l'empresa per maximitzar els ingressos?

**Exercici 754.** Es vol un recipient en forma d'ortoedre de tal manera que el seu volum sigui màxim. L'única restricció que és un costat ha de mesurar 10 cm i els altres dos costats sumats són iguals a 25 cm. Quines són les mesures d'aquest ortoedre?

**Exercici 755.** (l'edifici de menor cost) Es vol construir un magatzem amb el menor cost possible. Es sap que:

- El magatzem ha de tenir 20 metres de façana
- Cada metre que es construeix en alçada costa 25 € i cada metre que es construeix en amplada costa 5 €

Com han de ser la fondari i l'alçada del magatzem si el constructor vol que li costi exactament 5000 € i vol maximitzar el seu volum?

Quin volum màxim s'aconseguiria? Quants de litres hi cabrien?

# 8

## PROBABILITAT

### 8.1 Àlgebra de successos

**Exercici 756.** Es llancen dos daus i es multiplica el nombre de punts obtinguts en cadascun.

- Quants de resultats es poden obtenir?
- Descriu l'espai mostral.
- Escriu dos esdeveniments que siguin elementals i dos que siguin compostos

**Exercici 757.** Tenim un dau de 4 cares numerades de l'1 al 4. El tirem una vegada. Escriuiu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles esdeveniments classificats pel seu nombre d'elements.

**Exercici 758.** Tenim un dau de 6 cares blanc, en el qual s'han escrit a les cares les lletres següents:  $A$ ,  $A$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $B$ ,  $C$ . Escriuiu tots els esdeveniments possibles.

**Exercici 759.** Determineu el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 48

- Amb numeració inferior a 4
- De bastos i més gran que 4
- Figures d'oros o bastos

Si aquests conjunts de cartes són, respectivament,  $A$ ,  $B$  i  $C$ , calculeu (a.)  $A \cup B$ , (b.)  $A \cap B$ , (c.)  $A \setminus B$ , (d.)  $B \setminus A$ , (e.)  $A^c$ , (f.)  $B^c$  i (g.)  $C^c$ .

**Exercici 760.** En una baralla espanyola, enumereu i compteu les cartes dels esdeveniments:

- |                |                   |
|----------------|-------------------|
| a. Oros i sets | d. Figures        |
| b. Oros o sets | e. Oros o figures |
| c. Set d'oros  | f. Oros i figures |

Feis la intersecció, la unió i la diferència del primer amb els altres esdeveniments. I trobeu el contrari de cadascun d'ells.

**Exercici 761.** Per a un dau de sis cares, escriuiu els esdeveniments: (a.) obtenir parell, (b.) obtenir senar, (c.) obtenir parell i major que 3, (d.) obtenir parell o major que 3, (e.) obtenir parell però que no sigui major que 3, (f.) obtenir el contrari de parell i major que 3. Calculeu els seus successos complementaris i feis la unió, la intersecció i la diferència d'aquests esdeveniments de manera que, com a màxim, calculeu set operacions diferents.

**Exercici 762.** Es llança una ruleta de 12 costats, numerats de l'1 al 12, i s'observa el resultat obtingut.

- Trobeu l'espai mostral.
- Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:
 

– $A =$ “obtenir un nombre parell”	– $E =$ “obtenir un nombre major que 4”
– $B =$ “obtenir un nombre senar”	– $F =$ “obtenir un nombre menor que 6”
– $C =$ “obtenir un múltiple de 3”	– $G =$ “obtenir un múltiple de 3 i 4”
– $D =$ “obtenir un múltiple de 5”	
- Calculeu els seus esdeveniments contraris.
- Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d' $A$  amb cadascun dels altres esdeveniments.
- Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

**Exercici 763.** Digueu quins d'aquests successos són successos impossibles i quins són successos segurs (n'hi ha que no són ni segurs ni impossibles):

- la suma del resultat de dos daus és 1
- llancem tres monedes i surten una cara i dues creus
- agafem una fitxa de dòmino a l'atzar i la suma de punts és més gran de 1
- llancem dues monedes i el nombre de cares menys el nombre de creus és més petit o igual a dos
- llancem dos daus i la resta de punts és 6
- llancem un dau de 8 cares i el resultat es més petit que 10
- llancem 10 monedes i obtenim 10 cares més que creus
- llancem dos daus i la multiplicació dels punts és múltiple de 7
- en el sorteig de la primitiva surt premiat el número 65478
- llancem dos daus i la multiplicació dels dos números es menor de 40

## 8.2 Experiments simples

**Exercici 764.** En l'experiment consistent a llançar un dau cúbic i observar-ne la puntuació, considerem els esdeveniments següents:

- |                               |                                    |
|-------------------------------|------------------------------------|
| A. “Obtenir un múltiple de 3” | C. “Obtenir un nombre senar”       |
| B. “Obtenir un divisor de 4”  | D. “Obtenir un nombre menor que 5” |

Calculeu:

- |           |           |                  |                  |
|-----------|-----------|------------------|------------------|
| a. $p(A)$ | c. $p(C)$ | e. $p(A \cup C)$ | g. $p(A \cap B)$ |
| b. $p(B)$ | d. $p(D)$ | f. $p(A \cap C)$ | h. $p(A^c)$      |

**Exercici 765.** En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

- Sota

- b. Copa o oros
- c. Copa i oros
- d. Figura i espasa
- e. Figura o espasa
- f. Cavall o espasa

**Exercici 766.** En una bossa hi ha 5 bolles vermelles, 10 bolles negres i 5 bolles blaves. En treiem una i miram de quin color és. Calculeu la probabilitat de:

- a. Treure una bolla vermella
- b. Treure una bolla negra o blava
- c. Treure una bolla que no sigui blava.

**Exercici 767.** En una rifa de mil nombres (del 000 al 999) es sorteja un viatge. Calculeu:

- a. La probabilitat de guanyar el premi si comprem cinc nombres
- b. La probabilitat que el nombre premiat acabi en 5

**Exercici 768.** En una bossa hi ha deu boles numerades de l'1 al 10. Si extraiem una bola de la bossa, calculeu la probabilitat de:

- a. Treure un 7
- b. Treure un nombre menor que 7
- c. Treure un nombre no inferior 7
- d. Treure un múltiple de 5
- e. Treure un divisor de 6
- f. Treure un nombre primer

**Exercici 769.** En una capsa hi ha vuit bolles numerades consecutivament com segueix: 2, 4, 6, ..., 16. Si diem  $A =$  “treure un nombre menor o igual que 10” i  $B =$  “treure un múltiple de 3”:

- a. Escriu els elements de  $A$  i de  $B$
- b. Calcula la probabilitat de:

- |       |         |              |
|-------|---------|--------------|
| – $A$ | – $A^c$ | – $A \cup B$ |
| – $B$ | – $B^c$ | – $A \cap B$ |

**Exercici 770.** (Pràctica dels complementaris) Completeu la taula següent:

Experiència	Esdeveniment	Probabilitat	Complementari	Probabilitat
Tirar un dau	Surt parell			
Tirar un dau	Surt un 6			
Tirar un dau	Surt un 3 o un 6			
Prendre una carta de póquer			Surt comodí	
Tirar una moneda			Surt cara	
		1/6		5/6
Triar dia de gener				30/31
Triar dia d'abril		1/2		
Triar una vocal		2/5		3/5
Prendre una carta de la baralla espanyola	Surt múltiple de tres			
Prendre una carta de la baralla espanyola		9/48		
		1/2		1/2
	Surt la $Z$			27/28
			Surt la $X$	

**Exercici 771.** (dòmino) En un joc de dòmino, s'estreu una fitxa a l'atzar. Trobeu la probabilitat de què (a.) la suma de punts sigui 6, (b.) almenys un dels dos nombres sigui un 4, (c.) la suma de punts sigui un múltiple de tres, (d.) la resta dels punts d'una banda i l'altre doni 6, (e.) la suma de punts sigui un nombre imparell

**Exercici 772.** (les lletres d'una paraula) Escrivim cada una de les lletres de la paraula "CAVALLE-RESCA" en un paper i les posem en una bossa. N'extraiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què (a.) treure la lletra  $A$ , (b.) treure la lletra  $E$ , (c.) treure la lletra  $L$ , (d.) treure una vocal, (e.) treure una consonant.

**Exercici 773.** (el centre escolar) En un centre escolar hi ha 1000 alumnes repartits segons s'hi indica a la taula 8.1. Calculeu la probabilitat que si triem una persona a l'atzar, aquesta persona: (a.) sigui home, (b.) jugui a futbol, (c.) sigui home i jugui a bàsquet, (d.) sigui home que juga a bàsquet i futbol, (e.) sigui dona que juga a futbol però no a bàsquet .

Tret	Dones	Homes
Usen ulleres	146	135
No usen ulleres	368	351
Juguen a futbol	335	53
Juguen a bàsquet	229	169
No practiquen cap esport	97	298

**Figura 8.1** Trets de les persones d'un centre escolar

Nota: potser podeu servir els diagrames de Venn.

**Exercici 774.** (l'urna) D'una bossa que conté 3 bolles blanques, 2 bolles vermelles i 4 bolles negres, en traiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat dels esdeveniments següents:

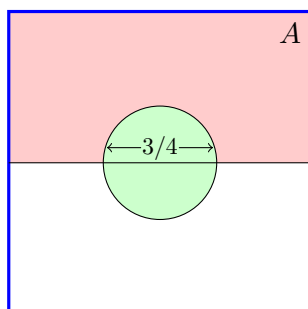
- Obtenir una bolla blanca.
- Obtenir una bolla vermella o negra.
- Obtenir una bolla que no sigui negra.

**Exercici 775.** (una altra urna) D'una bossa que conté 4 bolles blanques i 3 bolles verdes, en traiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què: (a.) es tregui una bolla blanca; (b.) es tregui una bolla vermella; (c.) no es tregui cap bolla

**Exercici 776.** (caramels) Tenim una bossa amb 23 caramels: 7 són de maduixa, 4 de menta i la resta de taronja. Calculeu la probabilitat de treure a l'atzar un caramel de taronja.

**Exercici 777.** (delegat i subdelegat) Una classe de 10 alumnes, on hi assiteix regularment n'Alícia, fan les votacions per a escollir delegat i subdelegat. Sabem que n'Alícia no és delegada (s'ha presentat voluntari una altra persona). Determineu la probabilitat de què sigui subdelegada (sabent que no hi pot haver acumulació de càrrecs).

**Exercici 778.** (Els altres paracaigudistes) Els paracaigudistes realitzen pràctiques d'aterratge en precisió: intenten aterrar al centre d'aquest camp de  $1 \text{ km}^2$ . Quina probabilitat tenen d'encertar?

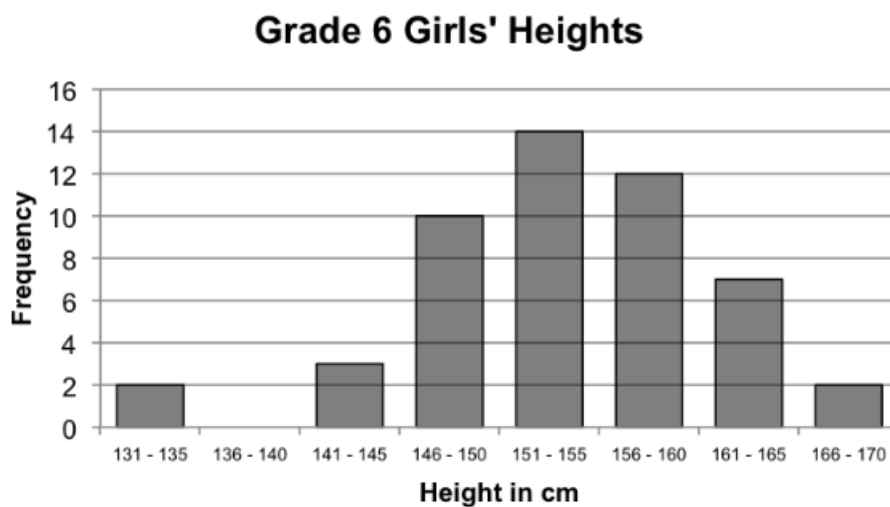


- ★ Quina probabilitat hi ha de què no aterrin al centre?
- ★ Quina probabilitat hi ha de què aterrin a l'àrea  $A$  (la regió nord del rectangle que no està inclosa dins el cercle)?

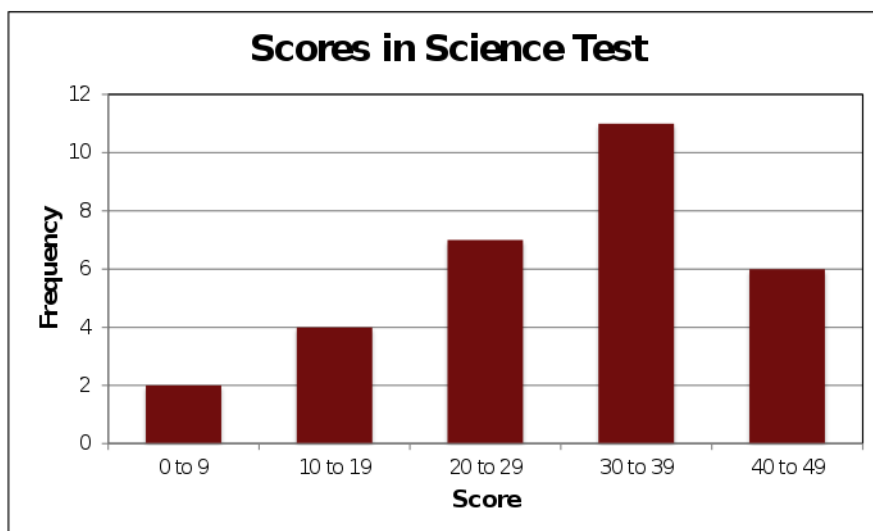
**Exercici 779.** (Les alçades de les noies de 6è) Aquesta gràfica mostra les freqüències de l'alçada d'un grup d'al·lotges de 6è de primària (figura 8.1). Totes les alçades han estat arrodonides al centímetre més pròxim (totes les qüestions estan referides a les alçades arrodonides, no a les exactes). Quina probabilitat tenim que una al·lotja d'aquesta classe faci més que 1,50 m?

**Exercici 780.** (Els resultats del test) Aquesta gràfica mostra el nombre de preguntes correctes d'un test de 50 preguntes (figura 8.2). Quina probabilitat tenim que una persona hagi tret un resultat major que 25?

## 8.3 Experiments compostos



Taula 8.1 Alçades de les nines de 6è de primària



Taula 8.2 Nombre d'encerts d'un test de 50 preguntes

**Exercici 781.** En una bossa hi ha dues boles blanques i tres de negres. Se n'extreuen dues sense devolució i se n'observa el color. Calculeu la probabilitat de què:

- Les dues boles siguin blanques
- Siguin de colors diferents
- Totes dues siguin del mateix color
- Almenys una sigui negra

**Exercici 782.** Tenim una urna amb tres bolles blaves i dues bolles verdes. Extreiem una bolla, *no* la tornem a l'urna i en tornem a extreure una altra.

- Quina és la probabilitat que les dues boles siguin blaves?
- I que siguin verdes?
- I que n'hi hagi una de cada color?



**Exercici 783.** En un concurs, a un participant que ha quedat eliminat se li dóna una última oportunitat. Amb els ulls embenats, ha de triar una de les urnes següents a les quals hi ha bolles blanques i bolles negres, i treure una bolla d'aquesta urna:

a. L'urna 1 conté 3 bolles blanques i 4 bolles negres

b. L'urna 2 conté 2 bolles blanques i 1 bolla negra

Treure una bolla blanca li permet continuar en el concurs. Quina és la probabilitat de què pugui continuar?

**Exercici 784.** Una de les proves d'unes oposicions consisteix a desenvolupar un tema dels setanta que componen el temari. El dia de la prova s'extreuen dues boles d'una bossa que conté setanta boles numerades de l'1 al 70. Els participants han de triar un dels dos temes corresponents a les boles que han sortit i desenvolupar-lo.

Si un participant ha estudiat 25 temes, quina és la probabilitat que almenys una de les dues boles que s'extreuen correspongui a un dels temes estudiats?

**Exercici 785.** S'extreuen dues cartes d'una baralla espanyola de 48 cartes sense devolució. Quina és la probabilitat que s'obtinguin dos reis?

**Exercici 786.** En una reunió hi ha quinze homes i vint dones. Sabem que hi ha cinc homes fumadors i quatre dones fumadores. Si triem una persona de la reunió a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui una dona fumadora?

**Exercici 787.** En un examen hi ha dues preguntes de tipus test amb quatre respostes possibles cadascuna, de les quals només una és correcta. Si triem les respostes d'aquestes dues preguntes a l'atzar, quina probabilitat tenim d'encertar-les totes dues? I d'encertar-ne almenys una?

## 8.4 Probabilitat condicionada

**Exercici 788.** Un lladre a l'escapar de la policia ho pot fer pels carrers  $A$ ,  $B$  o  $C$  amb probabilitats del 0,25, 0,6 i 0,15, respectivament. La probabilitat de ser agafat són de 0,4, 0,5 i 0,6 si intenta escapar pels carrers  $A$ ,  $B$  i  $C$  respectivament.

a. Trobeu la probabilitat de què la policia agafi el lladre

b. Si el lladre finalment ha estat agafat, quina és la probabilitat de què ho hagi estat en el carrer  $A$ ?

**Exercici 789.** En una classe hi ha 40 persones, distribuïdes de la manera següent:

Sexe	Dretans	Esquerrans
Dona	15	4
Home	15	6

Calculeu les probabilitats següents:

a. Una persona sigui al · lota

b. Una persona sigui dretana

c. Una al · lota sigui esquerrana

d. Sigui al · lot sabent que és esquerrà

**Exercici 790.** En una oficina, el 70% dels empleats són asturians. D'entre aquests, el 50% són homes, mentre que dels que no són asturians, només són homes un 20%.

- Quin percentatge d'empleats són asturians i dones?
- Calculeu la probabilitat de què un empleat de la oficina sigui dona
- Si en Fernando treballa a l'oficina, quina és la probabilitat de què sigui asturià?

**Exercici 791.** Un jugador de bàsquet acostuma a encertar el 80% dels seus tirs des del punt de llançament de personals. Si tira tres vegades:

- Calculeu la probabilitat de què encesti dues vegades
- Calculeu la probabilitat de què no encesta cap pic
- Sabent que ha encertat en el tercer tir, quina és la probabilitat de què hagi encertat en el segon tir?

**Exercici 792.** Una urna conté 4 bolles blanques, 1 de vermella i 5 de negres. Es considera l'experiment aleatori de treure dues bolles a l'atzar i anotar el color. Calcula les probabilitats:

- Que surti una bolla blanca i negra
- Que no surti una bolla vermella en cap cas
- Que la primera bolla sigui negra sabent que la segona és blanca

**Exercici 793.** En una classe de 4t d'ESO hi ha 8 al·lots i 12 al·lotes. Cinc al·lots i vuit al·lotes llegeixen habitualment el diari. Si triem a l'atzar un estudiant, calcula la probabilitat de què:

- Llegeixi el diari i sigui home
- No llegeixi el diari o sigui home
- Sigui home sabent que llegeix el diari
- Llegeixi el diari saben que és home

**Exercici 794.** En una capsa de bombons hi ha 5 bombons amb un embolcall blanc i 15 amb un de negre. Hi ha dotze bombons, 2 blancs i 10 negres, que estan farcits de licor. Si treiem un bombó a l'atzar, calcula la probabilitat de què el bombó

- Tengui l'embolcall negre i sigui farcit
- Tengui l'embolcall blanc i no sigui farcit
- Tengui l'embolcall blanc sabent que és farcit
- Sigui farcit sabent que té l'embolcall negre.

**Exercici 795.** En una guarderia hi ha 10 nins i 12 nines. Si 6 nins saben caminar i 6 nines *no* en saben, calcula la probabilitat que, si triem una persona a l'atzar, sigui nin i no sàpiga caminar. Quina probabilitat hi ha de què sabent que no sap caminar, sigui nin?

**Exercici 796.** En un dinar, hi ha 28 homes i 32 dones. Han triat carn 16 homes i 20 dones i la resta ha triat peix. Si triem una persona a l'atzar, calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:

- Que sigui home
- Que hagi menjat peix
- Que sigui home i hagi menjat peix
- Que hagi menjat peix sabent que hem elegit un home

**Exercici 797.** A una classe d'ESPA assisteixen regularment a classe un 50% de les persones. D'aquestes, aproven Matemàtiques un 90%. Si no assisteixen regularment a classe només aproven 1 de cada 10 persones. Determineu

- la probabilitat de què aprovi Matemàtiques
- la probabilitat de què hagi assistit a classe sabent que ha aprovat

**Exercici 798.** Un restaurant té contractats a dos cambrers: Javier i Ana per atendre el servei del menjador. Ana posa el servei el 70% dels dies i es confon al col·locar els coberts només el 5% dels dies. Mentre, Javier col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

- Aquest matí, l'encarregat del restaurant ha passat revista al servei. Quina és la probabilitat de què trobi algun servei mal col·locat?
- Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i vol trobar quina és la probabilitat de què hagi estat en Javier

**Exercici 799.** Certa persona compra tots els dies el diari local, comprant-lo indistintament en un de les botigues,  $A$  i  $B$ , que estan més pròximes a ca seva. El 80% dels dies el compra a la botiga  $A$ .

- Quina proporció dels dies compra el diari a la botiga  $B$ ?
- Quina probabilitat hi ha de què compri dos dies el diari a la botiga  $A$ ?
- Quina és la probabilitat de què dos dies consecutius compri el diari a dues botigues diferents?

**Exercici 800.** La probabilitat de què un aficionat al futbol vagi al camp municipal a veure un partit és del 90% quan es disputa en cap de setmana i el 50% si té lloc en un dia laborable. La probabilitat de què un partit es jugui en cap de setmana és la mateixa que se jugui entre setmana.

- Cert partit es celebrarà la setmana que ve en un dia encara sense determinar. Calculeu la probabilitat de què els aficionats vagin a veure'l al camp
- Si finalment un aficionat va anar a veure el partit, quina és la probabilitat de què aquest hagi estat en cap de setmana?

**Exercici 801.** En una capsula estan desats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

- Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?
- Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, quina és la probabilitat de què funcionin els dos correctament?
- Si el segon no funciona correctament, quina és la probabilitat de què el primer tampoc ho faci?

**Exercici 802.** El 25% de les famílies de certa comunitat autònoma espanyola no surt fora de la mateixa durant les vacances d'estiu. El 65% estiuja per la resta de l'estat i el 10% restant se'n va a l'estranger. Dels qui queden a la seva comunitat, només un 10% no usa cotxe en els desplaçaments. Aquesta quantitat augmenta al 30% entre els que surtin per la resta d'Espanya, i al 90% entre els que viatgen a l'estranger.

- Calculeu el percentatge de famílies d'aquesta comunitat que utilitza el cotxe en els seus desplaçaments d'estiu
- Una família no usa cotxe en les seves vacances d'estiu. Quina és la probabilitat de què surti de la comunitat movent-se per la resta d'Espanya?

**Exercici 803.** Un grup de 40 persones acabar de prendre un bus. D'aquests, només 10 són fumadors. Entre els fumadors, el 70% es mareja durant el viatge. I entre els qui no fumen, aquesta quantitat baixa al 40%.

- Quina probabilitat hi ha que dues persones siguin fumadores ambdues?
- Quina és la probabilitat de què un viatger no es maregi?

**Exercici 804.** Dos joves aficionats als jocs d'atzar es troben realitzant un solitari amb una baralla espanyola. Extreuen una carta de la baralla i volen saber quina és la probabilitat d'obtenir rei condicionat a què s'hagi tret figura

**Exercici 805.** En un país s'ha constituït una comissió parlamentària integrada per deu membres, dels quals set pertanyen al partit governant i la resta al partit de l'oposició. Entre els set membres del partit governant hi ha quatre homes; dos entre els del partit de l'oposició. El president de la comissió s'elegeix per sorteig entre els seus integrants. Celebrat el sorteig, es sap que el president triat ha estat un home. Quin partit té més possibilitats de dirigir la comissió?

**Exercici 806.** S'ha fet un estudi d'un nou tractament sobre 120 persones que pateixen certa enfermetat. Trenta d'elles ja han patit l'enfermetat amb anterioritat. Entre les persones que l'han patida anteriorment, el 80% ha reaccionat positivament al nou tractament. De les que no la han patida amb anterioritat, el percentatge de la reacció positiva ha estat del 90%.

- a. Si triem a l'atzar un pacient, quina és la probabilitat de què no reaccioni positivament al nou tractament?
- b. Si un pacient ha reaccionat positivament al tractament, quina és la probabilitat de què no hagi patit l'enfermetat amb anterioritat?

## 9

# ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

## 9.1 Introducció a l'Estadística

**Activitat 807.** (Espanya a Eurovisió) Quins resultats ha tengut Espanya a Eurovisió? Per respondre a aquesta pregunta hem de cercar les dades de la classificació d'Espanya durant la història d'Eurovisió<sup>5</sup> (figura 9.1):

Potser ens interressi respondre a les preguntes següents:

- Quantes vegades hem participat
- Quantes vegades hem quedat primer?
- Quantes vegades hem quedat darrer?
- Quina és la posició a la què normalment ens classifiquem?
- No totes les vegades tenia el mateix mèrit quedar al cap de la classificació: al principi hi havia molt menys països participants que al final. Podem calcular el *mèrit de la classificació* en cada any?

Per respondre a aquestes preguntes:

- Feis grups de 2 o 3 persones
- Discutiu què heu de fer durant 10 minuts
- Poseu en comú les opinions consensuades

## 9.2 Població i mostra

Fins ara hem vist, més o menys, què és l'estadística: per analitzar una situació ens hem fet preguntes i les hem contestat ordenant, comptant i agrupant les dades. També hem calculat *paràmetres estadístics* (mitjana aritmètica i moda) que tenen un significat real en l'estudi.

Però l'estudi fet tenia dues particularitats:

- ★ Ens donaven les dades (provenien d'una font externa)
- ★ I, a més, el conjunt de les dades que teníem era igual al total de les dades a estudiar (la població era el conjunt de participacions d'Espanya a Eurovisió)

<sup>5</sup> El sistema de puntuació ha variat al llarg de la història i, per això, no els podem tenir en compte.

Any	Gènere interpret	Classificació	Participants	Any	Gènere interpret	Classificació	Participants
1961	D	9	16	1962	H	13	16
1963	H	12	16	1964	H	12	16
1965	D	15	18	1966	H	7	18
1967	H	6	17	1968	D	1	17
1969	D	1	16	1970	H	4	12
1971	D	2	18	1972	H	10	18
1973	D	2	17	1974	H	10	17
1975	D	10	19	1976	H	16	18
1977	H	9	18	1978	H	9	20
1979	D	2	19	1980	D	12	19
1981	H	14	20	1982	D	10	18
1983	D	20	20	1984	D	3	19
1985	D	15	19	1986	H	10	20
1987	D	19	22	1988	H	11	21
1989	D	6	22	1990	D	5	22
1991	H	4	22	1992	H	14	23
1993	D	11	25	1994	H	18	25
1995	D	2	23	1996	H	20	23
1997	H	6	25	1998	H	16	25
1999	D	23	23	2000	H	18	24
2001	H	6	23	2002	D	7	24
2003	D	8	26	2004	H	10	24
2005	D	21	24	2006	D	21	24
2007	H	20	24	2008	H	16	25
2009	D	23	25	2010	H	15	25
2011	D	23	25	2012	D	10	26
2013	D	25	26	2014	D	10	26

Taula 9.1 Classificació d'Espanya a Eurovisió des de 1961. Font [Wikipedia](#)

Ara bé, hi ha casos en què aquestes dues particularitats no es compleixen: (a.) és necessari fer una enquesta per a obtenir les dades a estudiar i (b.) és poc viable recollir totes la informació. Per això, l'enquesta es realitza a un conjunt reduït del total, que s'anomena *mostra*, a la que es fa l'enquesta.

**Activitat 808.** (Enquesta d'intenció de vot) Volem determinar quin partit guanyarà les pròximes eleccions. Per saber-ho hem de fer una enquesta. És impossible fer-la a totes les persones de Mallorca. Quan acabàssim, potser ja s'haurien celebrat les eleccions! (nota: calculeu què tardaríeu!).

- ★ Quines preguntes faríeu?
- ★ Com triaríeu les persones a enquestar? Quantes en triaríeu?
- ★ Una vegada demanades les preguntes, quin seria el pròxim pas?

**Activitat 809.** (Nombre de televisors) Si volem saber la quantitat de televisors que es tenen a les llars de Mallorca, quin tipus d'enquesta heu de fer?

## 9.2.1 Població i mostra

L'*estadística* és la part de les matemàtiques que s'encarrega de recopilar, ordenar, i agrupar les dades de diversos objectes a estudiar i, posteriorment, a interpretar-les. Per interpretar les dades es fan ús de gràfiques i càlcul de diversos paràmetres (per exemple la mitjana aritmètica).

Població:	Són <i>tots</i> els elements que són objecte d'estudi
Mostra:	La <i>part</i> de la població de la qual recopilem les dades i estudiem. Poques vegades coincideix amb la població. Una bona mostra necessita ser suficientment heterogènia per a poder representar la població. Es pot determinar el tamany mínim necessari per a què una mostra tingui la representativitat necessària amb un marge d'error.
Grandària:	<i>Nombre</i> d'elements de la població o de la mostra.
Variable estadística:	Cadascuna de les <i> propietats </i> o característiques que volem estudiar d'un conjunt de dades.

Existeixen dues branques de l'estadística:

- ★ L'*estadística descriptiva*, que simplement descriu i interpreta les característiques del grup d'estudi, tal com és. Fa un *retrat* de la població.
- ★ L'*estadística inferencial* que intenta fer prediccions i justificar que la mostra s'adeqüa a la població, de manera que les característiques de la mostra siguin les mateixes que les característiques de la població.

**Exemple 4.** Volem fer una enquesta entre totes les persones residents de Mallorca per saber quin peu calcen. Com que no es factible fer l'enquesta a tots els habitants (són més de 800.000 persones) es tria a 1000 persones a l'atzar en una enquesta telefònica.

Població:	Habitants de Mallorca
Mostra:	Cent persones triades aleatòriament i enquestades telefònicament
Grandària:	Grandària de la població: 873.414 Grandària de la mostra: 100
Variable estadística:	Nombre de sabata

**Exercici 810.** Volem fer un estudi estadístic de la talla de calçat que usen els alumnes de 3r d'ESO d'un institut.

- a. Quina seria la població?
- b. Tria'n una mostra. Quina grandària té?
- c. Trobes que la teva mostra és una *bona* mostra, o sigui, que representa l'institut?

**Exercici 811.** Assenyala en quin cas és més convenient estudiar la població sencera o una mostra:

- La longitud dels pernys que, sense interrupció, produeix una màquina
- L'estatura de tots els turistes en un any
- El pes d'un grup de cinc amics

**Exercici 812.** El titular d'un diari és "El pes mitjà dels espanyols és de 69 kg"

- Com creus que s'ha arribat a aquesta conclusió? Quina mostra s'ha pres?
- Quines característiques ha de tenir la mostra? Podrien ser tots els individus de la mateixa edat? Si tots són dones, seria correcte la mostra?

**Exercici 813.** Volem fer un estudi del nombre d'hores que els alumnes dediquen a la lectura

- Tria'n una mostra
- Quina grandària té la mostra?
- Quina és la població

**Exercici 814.** Si es vol fer un estudi estadístic de la talla de calçat que usen els alumnes d'ESPA del CEPA Sud:

- Quina seria la població?
- Tria'n una mostra. Quina grandària té?

**Exercici 815.** Quines poblacions i mostres correspondrien si intentéssim donar resposta a les preguntes següents:

- Quantes bombetes defectuoses hi ha a una fàbrica?
- Quina és la intenció de vot de les pròximes eleccions?

**Exercici 816.** Què passa si es menteix a una enquesta? Reflexioneu sobre en quines de les afirmacions següents esteu d'acord:

- A les enquestes no es menteix. Les persones sempre diuen la veritat
- Un bon enquestador detecta si l'enquestat menteix
- En cas de detectar que un enquestat menteix, aquest s'ha d'eliminar de l'enquesta
- Les persones que menteixen a una enquesta són la minoria. Per tant, no són importants
- Les mentides es compensen: si un enquestat diu  $B$  quan realment pensa  $A$ , potser un altre enquestat dirà  $A$  quan pensa  $B$ . L'estadística juga a què, a grans trets, aquestes trampes es compensen

**Exercici 817.** Indiqueu quan la població coincideix amb la mostra i quan no. Raoneu la resposta:

- Rendiment d'un esportista
- Enquestes electorals
- Notes dels exàmens d'un grup de persones
- Registres meteorològics
- Gols per partit d'un equip de futbol
- Cens de població (característiques de la població d'una determinada regió)
- Enquestes d'opinió
- Nombres que surten a la loteria
- Estudi del *perfil* de les persones que fan una certa activitat (per exemple, que utilitzen el Facebook™)



## 9.2.2 Tipus de variables estadístiques

Tipus	Propietats	Exemples
Qualitatives	Els valors de la variable no són nombres sinó <i>qualitats</i>	Sexe (home/dona), color dels cabells (ros, moreno, ...)
Quantitatives	Els valors que pren la variable són <i>nombres</i> . N'hi ha de: ★ discretes ★ contínues	Pes, nombre de germans, etc.
Discretes (quantitatives)	En cada tram, la variable només pot prendre en nombre de valors <i>finit</i>	Nombre d'amics (pot ser 1, 2, 3, ... però no 2,5)
Contínues (quantitatives)	Entre dos valors qualsevols, la variable pot prendre <i>tots</i> els valors <sup>6</sup>	Estatuta dels habitants de Campos (entre 1,70 i 1,80 hi ha 1,75, 1,715, etc.)

**Exemple 5.** Exemples de tipus de variables són

- Variable qualitativa: mes de naixement, carrer en què es viu, marca de cotxe, partit polític, major o menor d'edat, etc.
- Variable quantitativa discreta: edat, nombre de fills, nombre de llançaments triples en un partit de bàsquet, talla de pantalons, etc.
- Variable quantitativa contínua: pes, temps emprat per a realitzar una tasca, velocitat, etc.

**Exercici 818.** En un partit de bàsquet, digues 5 variables estadístiques que hi apareguin. Almenys una de cada classe.

**Exercici 819.** Determina el tipus de variable estadística:

- |                            |                                             |
|----------------------------|---------------------------------------------|
| a. Any de naixement        | e. Estat civil                              |
| b. Color dels cabells      | f. Perímetre de la cintura                  |
| c. Professió d'una persona | g. Pes del cervell                          |
| d. Perímetre toràctic      | h. Nombre de vegades que ha viatjat en avió |

**Exercici 820.** Classifica aquestes variables segons el tipus:

- |                                     |                                             |
|-------------------------------------|---------------------------------------------|
| a. Comunitat autònoma de residència | c. Professió del pare                       |
| b. Nombre de veïnats d'un edifici   | d. Consum de benzina cada 100 km d'un cotxe |

**Exercici 821.** De les variables següents, quines són discretes?

- |                       |                                                                              |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| a. Nombre de mascotes | d. Ingressos diaris en una fruiteria                                         |
| b. Talla de calçat    | e. Quilograms de carn consumits al menjador d'un col·legi durant una setmana |
| c. Perímetre cranial  |                                                                              |

**Exercici 822.** Indica el tipus de variable estadística que estudiam i digues, en cada cas, quina és la població i la mostra

- a. El programa favorit dels membres de la teva família
- b. La talla del calçat de les alumnes d'ESO
- c. La temperatura mitjana diària de Binissalem
- d. L'edat dels habitants d'un país
- e. El tamany mitjà de les pedres d'un torrent
- f. El sexe dels habitants d'un poble
- g. Els diners setmanals gastats pels teus amics
- h. Els efectes d'un nou medicament en l'ésser hu-  
mà
- i. El color dels cabells dels teus companys de classe

**Exercici 823.** Determina si les variables estadístiques següents són qualitatives o quantitatives:

- a. Any de naixement
- b. Color dels cabells
- c. Professió d'una persona
- d. Perímetre del tòrax
- e. Estat civil
- f. Marca del cotxe preferit
- g. Estatura
- h. Nombre de vegades que ha viatjat amb avió una persona
- i. Longitud del dit polsa
- j. Hores que dorm una persona
- k. Hora a la que es desperta una persona

### 9.2.3 Recompte de dades

#### Taula de freqüències

Una vegada feta una enquesta hem de *recomptar* les dades, sobretot si el nombre de dades és molt gran. És a dir, anotem el valor i el nombre de vegades que apareix. Això permet d'un cop d'ull treure conclusions sobre les dades. Per exemple, tot d'una podem veure quina és la dada que més es repeteix.

Aquesta taula es diu *taula de freqüències absolutes* (o *taula de valors*). Per a elaborar aquesta taula hem de tenir en compte si la variable estadística que estudiam és discreta o contínua

#### Cas discret

**Exemple 6.** Feim una enquesta a 25 persones sobre el *nombre de llibres* llegits en el darrer any. Obtenim les dades següents (taula 9.2):

1 3 4 2 2      3 2 2 1 3  
 3 3 1 1 2      4 4 2 3 3  
 2 3 3 4 4

**Taula 9.2** Nombre de llibres llegits

Després de recomptar les dades, obtenim la taula següent (taula 9.3).

Nombre de llibres	Recompte
1	4
2	7
3	9
4	5
	25

**Taula 9.3** Taula de freqüències

Això és la *taula de freqüències absolutes*, o simplement *taula de freqüències*.

La *grandària de la mostra*, que es simbolitza amb una  $N$ , és de 25. Coincideix amb la suma del recompte de les dades.

El recompte dels valors es diu *freqüència absoluta* de la variable i es simbolitza amb  $f_A$ , o simplement  $f$ .

Podem ampliar aquesta taula, trobant altres columnes:

- ★ Freqüències relatives: és igual a la freqüència absoluta dividit pel total d'objectes. Es simbolitza amb  $f_R$ .

$$f_R = f_A/N$$

- ★ Percentatge d'aparició: és igual a la freqüència relativa entre el total de dades per 100.

$$\% = f_R \cdot 100$$

- ★ Freqüències absolutes acumulades,  $F_A$ , igual a la suma de les freqüències absolutes fins a un valor donat.

Si aplicam això a les nostres dades de llibres, llavors obtenim la taula següent (taula 9.4):

Nombre de llibres	$f_A$	$f_R$	%	$F_A$
1	4	$4/25 = 0,16$	16%	4
2	7	$7/25 = 0,28$	28%	$4 + 7 = 11$
3	9	$9/25 = 0,36$	36%	$4 + 7 + 9 = 20$
4	5	$5/25 = 0,20$	20%	$4 + 7 + 9 + 5 = 24$
	24	1,00	100 %	

Taula 9.4 Taula de freqüències *expandida*

## Cas discret amb *moltes* dades

Suposem ara que tenim una variable estadística discreta però amb una gamma de valors molt gran, és a dir, en principi amb un elevat nombre de valors diferents. Per exemple, si feim una enquesta on es demana l'edat, aleshores podem tractar aquesta variable estadística com a discreta (els enquestats respondran que tenen, per exemple, 39 anys, però no 39,5).

El nombre de valors possibles de l'edat és molt gran: va de 0 (recent nats) fins a una fita superior hipotètica de 130 anys — El rècord d'edat verificat és de Misao Okawa, de 116 anys. Per tant, si féssim una taula de freqüències, podríem tenir fins a 130 valors diferents. Això fa les dades immanejables. Per aquest motiu s'agrupen les dades en intervals.

En aquest exemple, podríem agrupar les dades en intervals d'amplitud 10, representant les dècades (vegeu “Nombre d'intervals”).

D'aquesta manera, obtenim 13 intervals:  $[0, 10)$ ,  $[10, 20)$ ,  $[20, 30)$ ,  $[30, 40)$ ,  $[40, 50)$ ,  $[50, 60)$ ,  $[60, 70)$ ,  $[70, 80)$ ,  $[80, 90)$ ,  $[90, 100)$ ,  $[100, 110)$ ,  $[110, 120)$ ,  $[120, 130)$ . En cada interval, el parèntesi significa que no prenem l'extrem i el claudàtor significa que l'extrem està inclòs. Així l'interval  $[40, 50)$  representa a totes les persones de 40 anys fins a 50, incloses les de 40 anys però excloses les de 50. D'aquesta manera, tindrè una taula de freqüències, com la següent (taula 9.5), que en comptes de valors tindrà intervals:

Edat	Recompte
[0, 10)	4.859
[10, 20)	4.391
[20, 30)	5.337
[30, 40)	7.750
[40, 50)	7.517
[50, 60)	6.079
[60, 70)	4.771
[70, 80)	3.440
[80, 90)	2.160
[90, 100)	379
[100, 110)	12
[110, 120)	0
[120, 130]	0
	46.695

**Taula 9.5** Taula de freqüències (les dades són una extrapolació a partir de les dades de l' **INE** de l'any 2013)

Noteu que el darrer interval inclou 130 perquè hem de poder prendre el màxim teòric a qualque interval.

A partir d'aquí, el càlcul de la freqüència absoluta acumulada i la freqüència relativa es realitza de la mateixa manera que en el cas anterior de la variable discreta amb poques dades (taula 9.6).

Edat	$f_A$	$f_R$	Percentatge	$F_A$
[0, 10)	4.859	0,1040582503	10,41	4.859
[10, 20)	4.391	0,094035764	9,40	9.250
[20, 30)	5.337	0,1142948924	11,43	14.587
[30, 40)	7.750	0,1659706607	16,60	22.337
[40, 50)	7.517	0,1609808331	16,10	29.854
[50, 60)	6.079	0,1301852447	13,02	35.933
[60, 70)	4.771	0,1021736803	10,22	40.704
[70, 80)	3.440	0,0736695578	7,37	44.144
[80, 90)	2.160	0,0462576293	4,63	46.304
[90, 100)	379	0,0081165007	0,81	46.683
[100, 110)	12	0,0002569868	0,03	46.695
[110, 120)	0	0	0	46.695
[120, 130]	0	0	0	46.695
	46.695	1	100	46.695

**Taula 9.6** Taula de freqüències ampliada

## NOMBRE D'INTERVALS

El nombre d'interval·s que es considera adequat per prendre es determina per l'anomenada *regla de Sturges*: si  $k$  representa el nombre d'interval·s a prendre i  $N$  és el nombre de dades, aleshores  $k = 1 + \log_2 N = 1 + \log N / \log 2 \simeq 1 + 3,322 \log N$ .

En el cas anterior, tendríem que el nombre d'interval·s a prendre seria  $k = 1 + 3,322 \log 46.695 \simeq 16,51$ . Per tant, hauríem de prendre 17 interval·s amb una amplitud de  $130/17 \simeq 7,64$ .

Adaptant això a nombres enters, agafaríem 18 interval·s d'amplitud 8.

Aquesta regla és elàstica i s'adapta depenent del cas. Té la desavantatge que conforme creix la mostra, creix el nombre d'interval·s, encara que ni la variable estadística ni la població no hagin canviat.

## Cas continu

En el cas continu s'actua de la mateixa manera que en el cas anterior, agrupant les dades per interval·s.

**Exemple 7.** Suposem que l'altura d'un grup de 30 persones és el següent (taula 9.7):

1,60	1,55	1,53	1,80	1,75	1,65	1,74	1,83	1,70	1,56
1,66	2,01	1,67	1,68	1,86	1,78	1,87	1,65	1,55	1,59
1,68	1,75	1,63	1,82	1,65	1,85	1,77	1,88	1,74	1,58

Taula 9.7 Altura de 30 persones

L'altura és una variable estadística contínua. Si volem agrupar aquestes dades per tal de fer un recompte, haurem d'agrupar-les per interval·s. Agruparem les dades en 6 interval·s. Si la diferència entre el valor més gran i el valor més petit és igual a  $2,01 - 1,53 = 0,48$ , això vol dir que cada interval tindrà amplitud  $0,48/6 = 0,08$ . Per tant, la taula de freqüències absolutes serà:

Altura	Recompte
[1,53; 1,61)	7
[1,61; 1,69)	8
[1,69; 1,77)	5
[1,77; 1,85)	5
[1,85; 1,93)	4
[1,93; 2,01]	1
	30

Taula 9.8 Taula de freqüències

De la mateixa manera que en el cas anterior, calcularíem les freqüències relatives, les freqüències absolutes acumulades i el tant per cent:

Altura	$f_A$	$f_R$	%	$F_A$
[1, 53; 1, 61)	7	0,2333	23,33	7
[1, 61; 1, 69)	8	0,2666	26,66	15
[1, 69; 1, 77)	5	0,1666	16,66	20
[1, 77; 1, 85)	5	0,1666	16,66	25
[1, 85; 1, 93)	4	0,1333	13,33	29
[1, 93; 2, 01]	1	0,0333	3,33	30
	30	0,9997	99,97	30

Taula 9.9 Taula de freqüències ampliada

**Exercici 824.** Demanem a 20 persones sobre el nombre de vegades que havien viatjat a l'estranger i el resultat ha estat aquest (figura 9.10):

3	5	4	4	2	3	3	3	5	2
6	1	2	3	3	6	5	4	4	3

Taula 9.10 Viatges a l'estranger

- De quin tipus de variable es tracte?
- Quin és el tamany de la població? I de la mostra?
- Organitza les dades. Fes-ne un recompte

**Exercici 825.** Completeu la taula estadística següent, on  $f$ ,  $F$  i  $f_r$  representen, respectivament, la freqüència absoluta, la freqüència absoluta acumulada i la freqüència relativa.

$x$	10	11	12	13	14
$f$	3	3	5		
$F$				18	
$f_r$	0,12				

**Exercici 826.** Completeu la taula estadística següent, on  $x$ ,  $f$ ,  $F$  i  $f_r$  representen, respectivament, la variable estadística, la freqüència absoluta, la freqüència absoluta acumulada i la freqüència relativa.

$x$	2	4	10	14	16
$f$	9	9	5		
$F$				29	
$f_r$	0,15				

**Exercici 827.** Les dades següents corresponent al nombre de sabates usades per 20 individus:

39, 40, 41, 42, 39, 39, 40, 41, 40, 42,  
40, 41, 40, 39, 40, 39, 39, 39, 40, 41

- Digueu quin tipus de variable és: discreta o contínua
- Construiu la taula de freqüències absolutes

**Exercici 828.** El nombre de fills de cinquanta famílies d'un poble de Mallorca són:

2, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0,  
0, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 5, 1, 4, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1,  
1, 2, 2, 2, 1, 3, 6, 0, 0, 0.

- (a.) Trobeu la taula de freqüències. (b.) Quin tant per cent representa cada valor?

**Exercici 829.** El nombre de gols marcats per un jugador de futbol per partit són:

2, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 4, 0, 1

Trobeu i, si és possible, interpreteu:

- La taula de freqüències
- Les freqüències relatives, els percentatges d'aparició i la freqüència absoluta

**Exercici 830.** Trobeu el percentatge d'aparició del nombre de viatges que varen fer un nombre de persones en el darrer any:

10, 20, 15, 17, 8, 7, 10, 15, 0, 5, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 5,  
3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 6, 4, 8, 2, 3, 3, 7, 8,  
9, 7, 5, 6, 6, 5, 9, 3, 3, 4.

**Exercici 831.** Si tirem un dau 5000 vegades, el nombre de vegades que surt cada nombre segueix la següent taula:

Valor	Freqüència absoluta
1	0
2	500
3	250
4	800
5	200
6	3250

Trobeu les freqüències acumulades, les freqüències relatives i el tant per cent d'aparició de cada valor.

**Exercici 832.** Volem estudiar el nombre d'hores que dormen per dia (de 0 a 12) els membres d'una família. Per això feim l'estadística durant un mes:

6, 7, 8, 8, 5, 6, 6, 8, 9, 11,  
10, 5, 7, 8, 4, 6, 8, 7, 9, 10,  
5, 8, 8, 8, 4, 7, 6, 7, 8, 8.

**Taula 9.11** Pare

8, 8, 7, 8, 9, 8, 7, 8, 9, 8,  
8, 9, 10, 8, 9, 9, 8, 8, 7, 8,  
8, 8, 7, 9, 9, 8, 8, 11, 8, 6.

**Taula 9.12** Mare

9, 10, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 10, 11,  
9, 9, 8, 8, 8, 10, 10, 8, 8, 8,  
8, 4, 12, 10, 8, 8, 9, 8, 7, 9.

**Taula 9.13** Fill

Responen:

- Qui dorm més cada dia?
- Calculeu el tant per cent que representa dormir 8 hores a cadascun dels familiars

**Exercici 833.** Trobeu la taula de freqüències de les dades següents:

10, 6, 4, 5, 2, 3, 9, 1, 10, 2,  
7, 8, 5, 3, 2, 7, 4, 7, 8, 8,  
3, 5, 7, 9, 1, 2, 7, 5, 9, 10.

**Exercici 834.** Feis la taula de freqüències de:

1, 2, 2, 1, 5 1, 2, 1, 1, 2  
2, 2, 3, 3, 2 3, 2, 1, 2, 3  
3, 5, 2, 5, 3 1, 2, 3, 5, 5

**Exercici 835.** El nombre de cotxes que tenen 25 famílies a Balears és:

0, 0, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 0, 4,  
0, 1, 2, 0, 3, 0, 1, 0, 4, 0.  
0, 3, 1, 0, 3.

Feis la seva taula de freqüències.

**Exercici 836.** Feis la taula de freqüències de:

1, 2, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 1, 2  
2, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3  
3, 5, 2, 5, 3, 1, 2, 3, 5, 5



Si  $x$  representa la variable estadística recopilada, a què és igual  $x_3$ ?, I  $f_4$ ? i  $f_{r_5}$ ?

## 9.3 Paràmetres estadístics

### Tipus de paràmetres estadístics

Els paràmetres estadístics són nombres que ens informen sobre una propietat de les dades que estudiem. Es classifiquen en dos tipus:

★ Paràmetres de centralització

Ens informen de com seria una *dada tipus*, de com és el *perfil* de les dades. En altres paraules, ens proporcionen un resum de les dades. Són valors que representen, de qualque manera, les dades.

★ Paràmetres de dispersió

Ens diuen com de disperses estan les dades, és a dir, si els valors són molt homogenis o per contra són heterogenis.

Els paràmetres més habituals són aquests:

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Centralització	Mitjana aritmètica ( $\bar{x}$ )	Es calcula sumant tots els valors i dividint pel nombre total de dades  Si totes les dades fossin iguals, aquest seria el valor que tendrien
Centralització	Moda ( $Mo$ )	És el valor de les dades que més apareix. Hi poden haver dos o més valors que tenen la mateixa freqüència absoluta  És el valor que més apareix. La major part de les dades tenen aquest valor
Centralització	Mediana ( $Me$ )	Una vegada s'ordenen les dades de menor a major, és el nombre $x$ que deixa el 50% de les dades a la seva esquerra.  Per una variable estadística discreta, és el valor central de les dades. Si el nombre de dades és parell, es pren la mitjana aritmètica dels dos valors centrals.  Es pot interpretar com que el 50% de les dades són menors o iguals que aquest valor.

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Centralització	Quartils ( $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ )	<p>Una vegada ordenades les dades de menor a major:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>★ el quartil <math>Q_1</math> és el nombre que deixa a l'esquerra un quart de les dades</li> <li>★ el quartil <math>Q_2</math> és el nombre que deixa a l'esquerra dos quarts de les dades</li> <li>★ i el quartil <math>Q_3</math> és el nombre que deixa a l'esquerra tres quarts de les dades</li> </ul> <p><math>Q_2</math> coincideix amb la Mediana. Cap percentil té perquè ser part de les dades.</p> <p>Permeten afitar les dades. Per exemple, sabem que un quart de les dades tindrà un valor entre <math>Q_2</math> i <math>Q_3</math>.</p>
Centralització	Percentils ( $p_x$ )	<p>El percentil <math>p_x</math> és el nombre tal que, una vegada ordenades les dades, deixa a la seva esquerra l'<math>x\%</math> de les dades.</p> <p>Tenim que <math>p_{50} = Me</math>, <math>p_{25} = Q_1</math> i <math>p_{75} = Q_3</math>.</p>
Dispersió	Rang ( $R$ )	<p>És la diferència entre la dada major i la dada menor</p> <p>Dóna una idea de com de juntes estan les dades, és a dir, de la seva homogeneïtat.</p>
Dispersió	Desviació mitjana ( $DM$ )	<p>També s'anomena variació mitjana.</p> <p>Consisteix en el promig de les diferències, en valor absolut, entre la mitjana aritmètica i els valors de les dades. És a dir, per a calcular-la hem de restar cada valor menys la mitjana aritmètica, sempre amb signe positiu. I després fer la mitjana de totes aquestes restes.</p> <p>Es pot interpretar com quant ens desviem de la mitjana aritmètica en promig. L'interval <math>(\bar{x} - DM, \bar{x} + DM)</math> dóna una idea del comportament típic de les dades: en promig les dades estan en aquest interval.</p>
Dispersió	Variància ( $Var$ )	<p>S'obté fent el promig dels quadrats de la diferència entre cada valor i la mitjana aritmètica. És a dir, per a calcular-la restem cada valor menys la mitjana aritmètica i el resultat l'elevem al quadrat. Després feim la mitjana aritmètica d'aquests valors.</p>

Tipus	Paràmetre i símbol	Càlcul i significat
Dispersió	Desviació típica ( $\sigma$ )	És l'arrel quadrada positiva de la variància. El resultat més interessant per a la desviació típica es coneix com a <i>Desigualtat de Txebixev</i> : si $k$ és un nombre real, aleshores dins l'interval $(\bar{x} - k \cdot \sigma, \bar{x} + k \cdot \sigma)$ hi ha, com a mínim, el $100 \cdot (1 - \frac{1}{k^2})$ percent de les dades. Aquesta desigualtat només és útil quan $k > 1$ .
Dispersió	Coefficient de variació ( $C$ )	Està donat per $C = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$ Dóna una idea del tant per cent de variació respecte de la mitjana que hi ha a les dades. Si el coeficient és gran, vol dir que les dades són molt heterogènies. Si el coeficient és petit, aleshores les dades són homogènies. Els casos extrems són: $C = 0$ que vol dir que les dades són iguals i $C = 100$ que vol dir que no hi ha cap dada igual.

**Exemple 8.** Trobem tots els paràmetres en el cas de l'exemple anterior dels dies llegits (exemple 6):

a. Mitjana aritmètica:

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 4 + 2 + \dots + 4}{25} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 5}{25} = 65/25 = 2,6.$$

Això vol dir que si tothom llegís el mateix, cada persona llegiria 2,6 llibres per any.

b. Moda: el valor que més es repeteix és el 3. Per tant,  $Mo = 3$ , és a dir, el més freqüent és que es lleixin tres llibres per any

c. Mediana: ordenem les dades inicials:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4

i prenem el valor d'enmig. Com que tenim un nombre senar de dades, vint-i-cinc, resulta que el valor central és el valor que ocupa la posició 13a. Per tant,  $Me = 3$ .

d. Quartils: hi ha 25 dades. Un quart de les dades són  $25/4 = 6,25$ , és a dir, 6 dades. Per tant, el nombre que deixa a l'esquerra un quart de les dades (6 dades), una vegada s'han ordenat, és el 2. Per tant,  $Q_1 = 2$ . De la mateixa manera,  $Q_2 = 3$  deixa dos quart de les dades (12 valors) a l'esquerra, i  $Q_3 = 3$  deixa tres quarts de les dades (18 valors) a l'esquerra.

e. Percentil. Per exemple, si volem trobar el percentil  $p_{20}$  hem de trobar el valor que deixa a l'esquerra el 20% de les dades, és a dir,  $20 \cdot 25/100 = 5$  dades. El 2 és la dada que ocupa el lloc 6è. Per tant,  $p_{20} = 2$ .

f. El rang  $R$  és igual a la diferència entre el valor màxim i el valor mínim. En el nostre cas,  $R = 4 - 1 = 3$ . Noteu que hi ha  $R + 1 = 4$  valors diferents en la nostra enquesta sobre el nombre de llibres llegits (de 1 a 4 hi ha 4 valors diferents).  $R + 1$  dóna la gamma de valors, és a dir, la resposta a la nostra enquesta pot tenir quatre valors.

g. Desviació mitjana: en primer lloc, calculem la diferència entre els valors i la mitjana aritmètica:

- $|1 - 2,6| = 1,6$
- $|2 - 2,6| = 0,6$
- $|3 - 2,6| = 0,4$
- $|4 - 2,6| = 1,4$

Per tant,

$$DM = \frac{1,6 \cdot 4 + 0,6 \cdot 7 + 0,4 \cdot 9 + 1,4 \cdot 5}{25} = 0,848$$

Això vol dir que, en promig, hi ha una variació de 0,848 entre la mitjana i les dades. Per tant, el més probable és trobar les dades entre 1,752 i 3,448.

h. Variància: calculem el quadrat de la diferència entre la mitjana i els valors de l'enquesta:

- $(1 - 2,6)^2 = 1,6^2 = 2,56$
- $(2 - 2,6)^2 = 0,6^2 = 0,36$
- $(3 - 2,6)^2 = 0,4^2 = 0,16$
- $(4 - 2,6)^2 = 1,4^2 = 1,96$

Per tant,

$$Var = \frac{2,56 \cdot 4 + 0,36 \cdot 7 + 0,16 \cdot 9 + 1,96 \cdot 5}{25} = 0,96$$

i. La desviació típica és  $\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{0,96} \simeq 0,979$ . Prenent  $k = 2$ , la desigualtat de Txebixev ens diu que hi ha, com a mínim, un 75% de les dades entre 0,642 i 4,558. Cosa que efectivament passa, ja que les nostres dades estan entre 1 i 4. Per tant, realment hi tenim un 100% de dades en aquest interval.

Si les dades estan molt disperses, la desigualtat de Txebixev no és molt útil, el contrari de si les dades estan molt concentrades.

En el cas de variables contínues o bé variables concretes amb moltes dades, s'utilitza la *marca de classe* per a calcular aquests paràmetres. La marca de classe no és res més que l'element central de l'interval. De qualche manera aquest element *representa* l'interval.

**Exemple 9.** Trobem els paràmetres estadístics pel cas continu. Farem servir les dades de l'exemple 7, on tenim les altures d'un grup de 30 individus:

a. Marca de classe: és el valor central de cada interval:

Altura	Marca de classe	$f_A$
[1, 53; 1, 61)	1,57	7
[1, 61; 1, 69)	1,65	8
[1, 69; 1, 77)	1,73	5
[1, 77; 1, 85)	1,81	5
[1, 85; 1, 93)	1,89	4
[1, 93; 2, 01]	1,97	1
		30

**Taula 9.14** Taula de freqüències absolutes i marca de classe

Per al càlcul del valor mitjà entre dos donats, sumem els valors i dividim entre dos. D'aquesta manera,  $(1,53 + 1,61)/2 = 1,57$ .

A partir d'aquí tots els càlculs es fan amb la marca de classe, com si tenguéssim una variable discreta.

b. Mitjana aritmètica:

$$\bar{x} = \frac{1,57 \cdot 7 + 1,65 \cdot 8 + 1,73 \cdot 5 + 1,81 \cdot 5 + 1,89 \cdot 4 + 1,97 \cdot 1}{30} = 1,714$$

c. Moda: el valor que més es repeteix és 1,65. Per tant,  $Mo = 1,65$ .

d. Mediana: tenim 30 dades. Per tant, el valor que deixa 15 dades a l'esquerra és 1,73. Per tant,  $Me = 1,73$ .

e. Quartils: tenim 30 dades. Per tant, un quart de les dades són 7,5, la meitat són 15 dades i tres quarts són 22,5. Això vol dir que  $Q_1 = 1,65$ ,  $Q_2 = Me = 1,73$  i  $Q_3 = 1,81$ .

f. Percentil: per exemple trobem el percentil  $p_{20}$ , és a dir, el valor que deixa a l'esquerra el 20% de les dades. El 20% de 30 dades són 6. Per tant,  $p_{20}$  és la dada que ocupa la setena posició, és a dir,  $p_{20} = 1,57$ .

g. El rang:  $R = 2,01 - 1,53 = 0,48$ . Per a calcular el rang no fem la marca de classe, perquè la seva definició és la diferència entre els valors màxim i mínim.

h. Desviació mitjana: tenim que

$$\begin{aligned} DM &= \frac{|1,57 - 1,714| \cdot 7 + |1,65 - 1,714| \cdot 8 + \dots + |1,97 - 1,714| \cdot 1}{30} \\ &= \frac{0,144 \cdot 7 + 0,064 \cdot 8 + 0,016 \cdot 5 + 0,096 \cdot 5 + 0,176 \cdot 4 + 0,256 \cdot 1}{30} \\ &= 0,101333333333 \end{aligned}$$

De la mateixa manera, calcularíem la variància i la desviació típica.

## 9.3.2 Paràmetres de centralització

**Exercici 837.** Trobeu la mitjana, la mediana i la moda de les notes de Llengua Catalana d'una classe de tercer d'ESPA:

1, 5, 6, 7, 6, 9, 8, 9, 8, 4, 3, 7, 8, 5, 6, 7, 8, 5, 6, 8

Interpreteu-les.

**Exercici 838.** Calculeu la mediana i la moda de les següents dades:

1, 2, 4, 2, 1, 5, 6, 1, 5, 6

**Exercici 839.** Hem analitzat un text, cercant línia per línia els errors ortogràfics que apareixen. Després d'analitzar 45 línies, aquests han estat els resultats:

0, 1, 2, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2,  
 4, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 5, 0, 3, 2, 1, 0,  
 0, 2, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 3, 0, 1, 0, 0

Amb aquestes dades:

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la moda
- Calculeu la mitjana aritmètica

**Exercici 840.** Aquestes són la mida de 50 pedres del torrent de sa Riera (en cm), separats per punt i comes:

2; 2,3; 4; 2,1; 1,2; 5; 2,1; 3; 2,4; 2,2;  
 1,9; 1,95; 2,01; 2,51; 2,67; 2,6; 2,7; 2,8; 2,55; 2,56;  
 8; 2,3; 2,02; 1,99; 1,89; 3,4; 2,1; 2,02; 2,78; 2,09;  
 1,22; 2,03; 2,4; 3,1; 2,22; 3,1; 3,1; 2,3; 2,3; 2,03;  
 2,4; 3,2; 5; 2,5; 1,3; 1; 4,1; 3,3; 2,7; 2,92

- Agrupeu les dades en intervals en quatre intervals
- Trobeu la marca de classe de cada interval
- Amb les marques de classe, trobeu la mitjana aritmètica, la moda i la mediana
- Interpreteu les dades anteriors
- Feis una gràfica que representi la marca de classe i la seva freqüència absoluta

**Exercici 841.** El color de les camisetes de 20 al·lots i al·lotes d'un institut és:

VERMELL, VERD, BLAU, VERD, GROC,  
 VERMELL, BLAU, BLAU, GROC, BLAU,  
 VERD, BLAU, MARRÓ, NEGRE, VERMELL,  
 VERMELL, BLAU, BLAU, GROC, BLAU

- Quina és la moda? Quina freqüència té?
- Si en l'institut hi ha 300 alumnes (entre al·lots i al·lotes) en total, quantes persones duran una camiseta de color vermell si extrapolem les dades?
- Podem calcular la mitjana aritmètica? I la mediana? Per què?

**Exercici 842.** Calculeu la mitjana, la moda i la mediana d'aquesta sèrie de dades:

3, 2, 4, 9, 8, 1, 0, 2, 4, 1, 8, 6, 3, 4, 0, 7, 3, 2, 4, 5, 2, 5,  
 6, 5, 4, 9, 2, 5, 7, 4, 1, 8, 6, 1, 5, 7, 1, 3, 0, 5, 0, 2, 1, 5, 5

Si aquestes dades corresponguessin al nombre de llibres per mes que han llegit els espanyols l'any 2010, què signifiquen els paràmetres anteriors?

**Exercici 843.** Hem recopilat una sèrie de dades en una taula de freqüències:

Valor	26	28	30	32
Freqüència	6	7	4	4

- Calculeu la mitjana aritmètica
- Calculeu la moda
- Si ordenéssim totes les dades de menor a major, quin seria el valor que ocuparia just la posició central? Com s'anomena aquest valor?

**Exercici 844.** El nombre d'aparells d'aire condicionat venuts per vuit dependents durant el mes de març va ser:

8, 11, 5, 14, 8, 11, 16, 11

Trobeu:

- la mitjana aritmètica
- la moda
- el tant per cent que representa cada valor
- Què volen dir aquestes dades?

**Exercici 845.** Calculeu la moda, la mediana, el quartil  $Q_3$  i els percentils  $p_{45}$  i  $p_{90}$  d'aquestes dades:

10, 1, 2, 5, 9, 4, 6, 7, 3, 2, 1, 5, 8, 4, 6,  
 3, 8, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 4, 4, 4, 5, 2, 2, 3,  
 6, 7, 8, 2, 4, 1, 2, 5, 2, 6.

**Exercici 846.** Calculeu  $a$  si sabem que la mitjana de les dades següents és igual a 21,25. Les dades són:

Valors	10	15	20	25	50
Freqüència absoluta	3	4	2	$a$	2

**Exercici 847.** Les dades següents:

23, 17, 19,  $x$ , 16,  $y$

tenen com a mitjana 20 i com a moda 23. Quant valen  $x$  i  $y$ ?

**Exercici 848.** Donats quatre nombres,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ , si diem  $\bar{x}_{a,b}$  a la mitjana de  $a$  i  $b$ ,  $\bar{x}_{c,d}$  a la mitjana de  $c$  i  $d$  i  $\bar{x}$  a la mitjana de  $a, b, c$  i  $d$ , digueu com podem obtenir  $\bar{x}$  en funció de  $\bar{x}_{a,b}$  i  $\bar{x}_{c,d}$ , o sigui, com podem obtenir la mitjana de quatre nombres coneixent les mitjanes dels nombres collits de dos en dos.

**Exercici 849.** El nombre de germans que tenen diversos habitants d'un poble són:

Germans	0	1	2	3
Freqüència absoluta	60	100	150	90

Calculeu:

- La mitjana aritmètica del nombre de germans per persona
- El tant per cent que suposa cada ocurrència del nombre de germans.
- La seva mediana
- Interpreteu aquestes dades.

**Exercici 850.** Quin és el rang d'aquestes dades?

2, 1, 1, 0, 2, 2, 1, 1, 1, 5,  
2, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1.

- Què vol dir el resultat d'aquesta variable estadística si les dades corresponen al nombre de televisors que tenen 20 famílies de Mallorca?
- Calculeu la moda i la mitjana aritmètica? Què volen dir aquests resultats?

**Exercici 851.** En la primera avaluació, dels 30 alumnes d'una classe, el 10% ho va aprovar tot, el 20% va suspendre una assignatura, el 50% va suspendre dues assignatures i la resta va suspendre més de dues assignatures.

- A partir d'aquestes dades, feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana aritmètica del nombre d'assignatures suspeses

**Exercici 852.** El color dels cabells de 30 persones és:

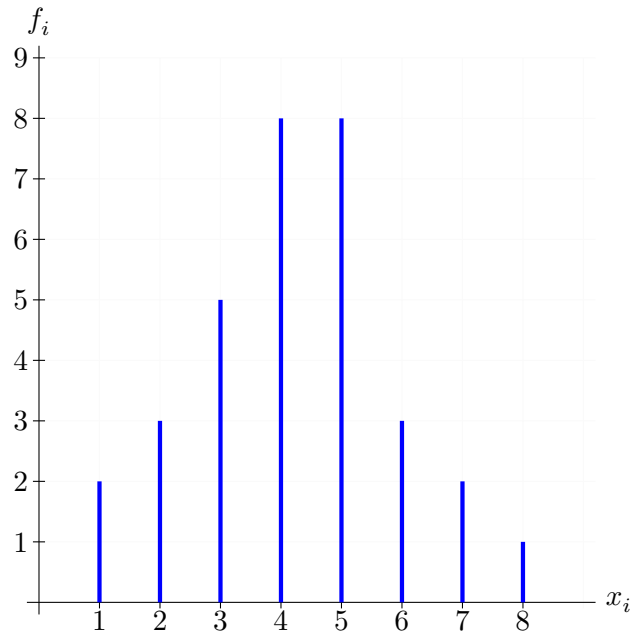
M, R, P, M, M, M, M, P, R, R, M, M, R, R, R, R, P, M, M, M, P, M, M, M, M, M, R, M, M, M

on M = moreno, R = ros i P = pèl-roig.

- Construiu la taula de freqüències
- Calculeu la moda
- Es pot calcular la mitjana? Per què?

**Exercici 853.** A partir del diagrama següent:





- Trobeu la moda
- Trobeu la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana

Si el diagrama fos sobre el nombre de mòbils que han tengut 32 persones, què significarien les dades que heu calculat?

**Exercici 854.** El nombre de cotxes que tenen 8 famílies escollides a l'atzar és:

2, 0, 2, 3, 1, 2, 2, 1

Feis la taula de freqüències expandida i la mitjana aritmètica.

**Exercici 855.** El nombre de missatges de SMS que varen enviar per Nadal una família de 10 membres varen ser:

10, 2, 3, 8, 1, 0, 7, 8, 7, 4

Feu la taula de freqüències i trobeu la mitjana de SMS per familiar i la moda

**Exercici 856.** Deprés de llançar un dau 40 cops obtenim els següents resultats:

2, 6, 1, 6, 2, 6, 1, 6, 2, 6,  
 4, 5, 6, 0, 4, 5, 2, 3, 5, 3,  
 6, 1, 2, 6, 6, 4, 6, 1, 3, 5,  
 2, 6, 6, 2, 4, 6, 6, 6, 5, 6.

Recompteu les dades amb la taula de freqüències i trobeu la mitjana

**Exercici 857.** El nombre de néts que tenen 30 persones escollides a l'atzar són:

2, 4, 11, 6, 9, 6, 4, 3, 2, 1, 0, 2, 3, 0, 4,  
5, 6, 7, 6, 8, 7, 0, 2, 3, 4, 4, 6, 5, 6, 6.

Feis la taula de freqüències i calculeu la moda

**Exercici 858.** El nombre de dies de pluja per setmana a la ciutat de Londres durant 54 setmanes (un any) són:

0, 3, 4, 7, 4, 6, 5, 0, 1, 4, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 1, 7, 0, 7,  
1, 7, 4, 2, 5, 7, 6, 3, 3, 7, 2, 2, 2, 2, 5, 4, 2, 1, 0, 1,  
6, 2, 1, 5, 3, 0, 6, 5, 2, 2, 0, 0, 0, 5.

Feis la taula de freqüències i trobeu la mitjana i la moda

**Exercici 859.** A una classe de 4t d'ESPA, les notes de Matemàtiques de cada alumne són:

4, 5, 6, 1, 2, 6, 7, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 4, 6, 4, 9,  
5, 3, 4, 1, 6, 6, 6, 5, 4, 0, 6, 6, 5, 4, 0, 5, 3, 4, 1, 6.

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana, la moda

**Exercici 860.** De les sis assignatures que es poden aprovar en un curs d'ESPA, els alumnes de 4t han aprovat les següents assignatures el primer quadrimestre:

5, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 3, 4, 6,  
5, 0, 5, 1, 6, 2, 6, 3, 6, 5,  
5, 6, 1, 6, 6, 1, 0.

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana
- Trobeu la moda

**Exercici 861.** El nombre gols per partit de dos equips de futbol són:

★ Equip *A*

2, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 0, 2, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 2, 3,  
2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 0, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 0, 3, 2.

★ Equip *B*

1, 4, 0, 1, 0, 3, 4, 2, 3, 0, 2, 3, 3, 5, 1, 2, 0, 3, 0, 3,  
0, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 0, 2, 4, 0, 3, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 2.

- Feis la taula de freqüències de cada equip.
- Quin tant per cent té cada equip de marcar com a màxim 2 gols?
- Quin equip marca més gols per partit?

**Exercici 862.** Calculeu la moda, la mediana, el quartil  $Q_3$  i els percentils  $p_{40}$  i  $p_{95}$  de les dades següents.

30, 80, 50, 60, 70, 80, 90, 10, 40, 40, 40, 50, 20, 20, 30, 100, 10, 20, 50, 90,  
40, 60, 70, 30, 20, 10, 50, 80, 40, 60, 10, 20, 50, 20, 60, 60, 70, 80, 20, 40

**Exercici 863.** El nombre de persones que va assistir diàriament a una classe de 4t d'ESPA va ser:

0, 8, 5, 4, 9, 9, 6, 12, 5, 11  
13, 5, 12, 7, 15, 8, 12, 9, 17, 18

- Agrupa les dades en intervals d'amplitud 5
- Calcula  $\bar{x}$  i  $Mo$

**Exercici 864.** Les notes de Matemàtiques d'una classe de 4t d'ESPA són:

0, 2, 3, 1, 3, 3, 2, 1, 3, 3,  
5, 6, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 9, 10.

- Calcula la mitjana i la moda
- Troba la mediana i treu conclusions.

**Exercici 865.** Deprés de llançar un dau 40 cops obtenim els següents resultats:

2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 4, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 3, 5, 3,  
6, 5, 2, 2, 1, 4, 1, 1, 3, 5, 2, 6, 6, 2, 4, 3, 1, 1, 5, 1

- Recompteu les dades amb la taula de freqüències
- Trobeu el rang de valors
- Trobeu la mitjana aritmètica
- Calculeu la moda
- Calculeu la mediana
- Segons aquests paràmetres podem dir si el dau està trucat o no? Raoneu la resposta

**Exercici 866.** El nombre d'assignatures aprovades (de 0 a 5) d'una classe de 4t d'ESPA són:

0, 1, 0, 4, 5, 4, 5, 3, 4, 2,  
1, 0, 2, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1  
1, 5, 2, 0, 0, 1, 2, 3, 5, 5

Feis la taula de freqüències i calculau  $\bar{x}$ ,  $Me$  i  $Mo$

**Exercici 867.** El nombre de persones per caixa en un supermercat és:

1, 2, 5, 4, 0, 0, 1, 2, 3, 2,  
2, 2, 5, 6, 1, 2, 2, 2, 0, 10,  
1, 1, 3, 5, 3, 1, 4, 3, 5, 5

- Quanta gent hi ha al supermercat fent coa?
- Quin és el nombre màxim de persones que esperen a una caixa?
- Quin és el valor més usual de persones a una coa d'una caixa?
- Quina és la mitjana?
- Trobeu  $p_{75}$
- Interpreteu cadascun d'aquestes dades
- Amb tota aquesta informació, podríeu dir que hi ha poques o moltes persones fent coa a caixa?

### 9.3.3 Paràmetres de dispersió

**Exercici 868.** Les notes de n'Albert i na Sònia en 5 exàmens són:

Albert	4	6	6	7	5
Sònia	4,30	6,20	6,00	5,00	5,50

- Calculeu la mitjana aritmètica dels dos
- Trobeu la resta entre la mitjana aritmètica i el valor de l'examen (sempre heu de restar el major menys el menor):

Albert	4	6	6	7	5
Mitjana:					
Resta:					
Sònia	4,30	6,20	6,00	5,00	5,50
Mitjana:					
Resta:					

- Fent un cop d'ull a aquesta taula podíeu dir si algun és més regular o no?
- Què passaria si féssim la mitjana d'aquestes restes? Què significaria aquest nombre? (aquest paràmetre es diu *desviació mitjana*)

**Exercici 869.** Els sous mensuals de 20 empleats d'una empresa de telecomunicacions són:

1200, 1600, 1400, 1300, 1500, 1200, 1500, 1500, 1500, 1500,  
1300, 1200, 1600, 2000, 1000, 1200, 1000, 1200, 1300, 1400

- Quina és la moda?
- Quina és la mitjana aritmètica?

c. Troba la variació mitjana del sou. Segons el que has calculat, tothom cobra el mateix o no?

**Exercici 870.** Els gols d'un jugador de futbol en 20 partits són:

1, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 0

El president de l'equip on juga vol saber:

- Si marca prou gols per partit
- Si és prou regular

Què li respondries?

**Exercici 871.** Dos equips de bàsquet han obtingut els resultats següents en 10 partits:

Equip A	Equip B
72, 60, 80, 90, 62, 60, 95, 110, 85, 86	80, 90, 70, 85, 75, 80, 82, 78, 81, 79

- Calcula la mitjana
- Quin dels dos és més regular?

**Exercici 872.** Les notes d'un grup de 3r d'ESPA són:

6, 5, 3, 7, 5, 4, 6, 8, 2, 6, 9, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 4, 3, 0

Amb aquestes notes podem dir que el grup és més o menys homogeni o bé hi ha classes d'alumnes que tenen rendiments molt diferents?

**Exercici 873.** Sabem que l'empresa A té de mitjana un sou de 15000 € i una variació mitjana de 200 €.

- Creus que és alta o baixa?
- I si tengués una variació mitjana de 1000 €?
- A partir de quin nombre establiries que la variació mitjana és alta?

**Exercici 874.** Les notes del segon quadrimestre d'un curs de 4t d'ESPA són les següents:

4, 7, 6, 3, 8, 5, 6, 7, 6, 6, 8, 9, 3, 6, 5, 5, 8, 7, 6, 8

- Trobeu la mitjana aritmètica, la desviació mitjana i l'interval de la desviació mitjana
- Interpreteu aquestes dades
- Quines notes apareixen menys del 30

**Exercici 875.** Les precipitacions enregistrades a una estació metereològica durant vint dies de l'any són (en  $l/m^2$ ):

0, 80, 20, 20, 82, 0, 31, 86, 83, 90,  
96, 72, 55, 87, 82, 15, 99, 59, 65, 96.

- Agrupeu les dades en intervals d'amplitud 20
- Trobeu el coeficient de variació. Varia molt la pluja en aquesta zona al llarg de l'any?

**Exercici 876.** Per cadascun dels següents conjunts de dades:

- a. 4, 4, 6, 0, 9, 5, 5, 0, 5. c. 1, 1, 5, 9, 5, 6, 2, 8, 6, 3.  
 b. 0, 1, 1, 3, 3, 0, 5, 3.

- ★ Trobeu la mediana i la desviació mitjana dels següents conjunts de dades  
 ★ Digueu quines són les dades més disperses

**Exercici 877.** La taula de freqüències de del diàmetre de les pedres a un riu és la següent:

Interval	Freqüència absoluta
[0, 2)	1.200
[2, 4)	2.500
[4, 6)	2.000
[6, 8)	8.000
[8, 10)	1.000
[10, 12)	50

Trobeu la mediana, la moda, la desviació mitjana i el coeficient de variació. Interpreteu els resultats.

**Exercici 878.** Villarriba i Villabajo fan una estadística sobre el sou que guanyen els seus habitants:

Villarriba	Villabajo
2000, 2500, 2700, 2800, 3000	1800, 2400, 2600, 2800, 3400

- a. Calculeu tots els paràmetres de centralització de les dues poblacions, i compareu-les  
 b. Calculeu els paràmetres de dispersió i compareu-los  
 c. Quines conclusions podeu treure

**Exercici 879.** Dos equips de bàsquet tenen les següents estadístiques pel que fa al nombre de punts per partit:

Equip A	Equip B
75, 74, 80	100, 80, 85
62, 65, 95	92, 96, 82
100, 110, 96	96, 97, 97
120, 125, 115	83, 80, 86

- a. Quin equip fa més punts per partit?  
 b. Quin són els punts més freqüents en cada equip?  
 c. Trobeu la desviació mitjana i el coeficient de variació, i treieu conclusions sobre la constància de cada equip

**Exercici 880.** El nombre d'hores de feina (per setmana) que fan 30 persones d'una empresa són:

40, 50, 60, 43, 35, 30, 43, 54, 56, 46, 50, 51, 42, 44, 46,  
 47, 46, 48, 49, 60, 59, 57, 55, 44, 52, 48, 47, 30, 47, 70.

- Trobeu la mitjana d'hores per empleat
- Quantes hores són les que fan feina els empleats més freqüentment
- Tothom fa les mateixes hores de feina? Hi ha molta diferència entre el que fa més hores de feina i el que en fa més?

**Exercici 881.** L'edat en que es treuen el carnet de cotxe un grup de persones escollides a l'atzar és:

18, 19, 18, 20, 23, 18, 43, 24, 30, 18,  
52, 30, 22, 21, 19, 18, 19, 20, 21, 27,  
21, 48, 36, 40, 34, 21, 21, 19, 18, 18.

Calculeu: (a.) l'edat mitjana (b.) l'edat més freqüent a la que es treu el carnet de cotxe, (c.) i la variabilitat de les edats.

**Exercici 882.** Les despeses en euros que els clients realitzen a un comerç són:

Interval	Freqüència
[0, 10)	20
[10, 20)	30
[20, 30)	40
[30, 40)	30
[40, 50)	40
[50, 60)	30
[60, 70)	40
[70, 80)	10

Trobeu la desviació mitjana i treieu les vostres conclusions

### 9.3.4 Paràmetres de centralització i dispersió

**Exercici 883.** Calculeu (a.) la mitjana, (b.) la mediana, (c.) la moda i (d.) el rang de les dades següents :

Valor:	1	2	3	4	5
Freqüència:	5	6	1	4	3

**Exercici 884.** Les notes obtingudes per 40 alumnes a l'assignatura de Música han estat:

6, 4, 1, 7, 3, 5, 3, 7, 8, 4, 6, 6, 2, 5, 2, 6, 0, 5, 8, 7, 4,  
9, 5, 10, 8, 6, 9, 7, 2, 5, 2, 6, 10, 5, 7, 6, 8, 7, 3, 6

Calculeu:

- la mitjana
- el rang

- c. quants estudiants han tret una nota inferior o igual a un 4?
- d. quants estudiants han tret un excel·lent? Quin tant per cent suposa?

**Exercici 885.** Els preus del lloguer mensual de l'habitatge es recullen en aquesta taula:

Preu (€)	240	270	300	330	360	390	420
Nombre d'habitatges	13	33	40	35	35	30	16

- a. Calculeu la mitjana del preu dels habitatges
- b. Quin és el preu més comú?
- c. Quin és el rang? Què significa aquest valor?

**Exercici 886.** El nombre d'assignatures suspeses de 15 alumnes va ser:

4, 1, 0, 4, 1, 4, 1, 2, 3, 0, 2, 4, 0, 3, 1

- a. Calculeu la moda, la mitjana aritmètica i el rang
- b. Mireu què signifiquen aquestes dades

**Exercici 887.** Feis la taula de freqüències expandida de les dades següents.

1, 2, 4, 2, 1, 5, 6, 1, 5, 6

Calculeu la mitjana, la moda i el rang de valors.

**Exercici 888.** Les notes de Naturals d'una classe són:

2, 1, 5, 5, 6    10, 8, 8, 7, 7  
 5, 6, 5, 5, 6    7, 3, 8, 0, 4  
 0, 6, 3, 3, 8    8, 5, 8, 3

Feis la taula de freqüències i trobeu la moda. Interpreteu-les.

**Exercici 889.** El nombre de persones per caixa en un supermercat és:

1, 2, 5, 4, 0    0, 1, 2, 3, 2  
 2, 2, 5, 6, 1    2, 2, 2, 0, 10  
 1, 1, 3, 5, 3    1, 4, 3, 5, 5

- a. Trobeu la taula de freqüències
- b. Trobeu la freqüència relativa, la freqüència absoluta acumulada i els percentatges d'aparició dels valors.
- c. Calculeu la mitjana i la moda
- d. Trobeu el rang de valors



**Exercici 890.** El nombre de cridades que ha fet una persona en els dies d'una setmana han estat:

3, 4, 1, 10, 4, 3, 2

A. Trobeu:

- El rang de valors
- La mitjana aritmètica
- La moda
- La mediana
- La desviació mitjana

B. Intepreteu cadascun dels paràmetres

**Exercici 891.** Les temperatura enregistrada a 36 estacions metereològiques el 15 d'agost a les 12:00 a Europa són:

25, 31, 32, 31.5, 42, 38.2, 28, 29.5, 31, 30.2,  
29.6, 28.7, 32.3, 34.5, 30.2, 20, 40, 23, 23.2, 22.2,  
21.5, 20.7, 27.8, 29.0, 30 38, 37, 36, 25, 29,  
31, 32.5, 31.6, 30.2, 28.5 28.5

- Agrupa les dades en intervals d'amplitud 5
- Troba la mitjana, la mediana
- Troba la temperatura més freqüent
- Calcula els percentils  $p_{25}$ ,  $p_{90}$
- Troba el coeficient de variació

**Exercici 892.** El nombre de persones que acudí a les classes de natació d'una piscina municipal fou:

38, 47, 40, 52, 46, 32, 55, 53, 48, 55  
54, 60, 59, 55, 56, 47, 43, 48, 60, 54  
50, 60, 39, 53, 48, 58, 45, 48, 43, 39

- Agrupeu les dades en intervals d'amplitud 10 i feis la taula de freqüències
- Trobeu les marques de classe
- Calculeu la mitjana, mediana i la moda
- Trobeu la desviació mitjana i el coeficient de variació mitjana

**Exercici 893.** A una classe de 4t d'ESPA, les notes de Matemàtiques de cada alumne són:

4, 5, 6, 1, 2, 6, 7, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 4, 6, 4, 9,  
5, 3, 4, 1, 6, 6, 6, 5, 4, 0, 6, 6, 5, 4, 0, 5, 3, 4, 1, 6.

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana, la mediana i la moda
- Calculeu  $p_{75}$  i interpreteu-lo
- Calculeu el coeficient de variació

**Exercici 894.** Si tiram un dau 5.000 vegades, el nombre de vegades que surt cada nombre segueix la taula següent:

Nombre	1	2	3	4	5	6
Freqüència absoluta	0	500	250	800	200	3.250

- Feis el diagrama de barres
- Calculeu  $\bar{x}$ ,  $Me$ ,  $Mo$  i  $p_{75}$
- Calculeu el coeficient de variació

**Exercici 895.** En els darrers deu sortejos de l'ONCE, el reintegrament va correspondre als següents nombres:

0, 1, 2, 1, 3, 8, 7, 4, 5, 6

- Trobeu la mitjana, la moda, la mediana i la desviació mitjana
- Intepreteu els resultats

**Exercici 896.** Es prova un nou medicament per pacients que sofreixen migranya i es realitza un estudi sobre 10.000 pacients per saber quants de dies per setmana tenen maldecap:

Dies de maldecap	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pacients	5.000	2.000	1.000	500	200	200	100

- Trobeu la mitjana, mediana, moda i la desviació mitjana
- Si podeu, treis les conclusions oportunes
- En general podem dir que aquest medicament funciona?

**Exercici 897.** Es realitza una enquesta sobre el nombre de productes que compren els clients d'un supermercat. Els resultats sobre una mostra de 30 clients són:

10, 2, 6, 8, 13, 22, 33, 44, 10, 23, 43, 5, 20, 7, 5,  
8, 90, 15, 21, 7, 21, 10, 20, 70, 34, 12, 11, 67, 70, 1.

Agrupeu les dades en sis intervals i trobeu:

- quin és la mitjana de productes que s'enduen els clients
- el nombre màxim i mínim de productes que s'enduen els clients
- la moda. Interpreteu-la
- la mediana
- la desvació mitjana. Varia molt el nombre de productes que s'enduen els clients?

**Exercici 898.** Les temperatura enregistrada a 36 estacions metereològiques el 15 d'agost a les 12:00 a Europa són:

25, 31, 32, 31.5, 42, 38.2, 28, 29.5, 31, 30.2  
29.6, 28.7, 32.3, 34.5, 30.2, 20, 40, 23, 23.2, 22.2  
21.5, 20.7, 27.8, 29.0, 30, 38, 37, 36, 25, 29  
31, 32.5, 31.6, 30.2, 28.5 28.5

- Agrupeu les dades en intervals
- Trobeu la mitjana, la mediana
- Trobeu la temperatura més freqüent
- Trobeu la desviació mitjana

**Exercici 899.** El nombre de telefonades que reb una persona en els dies d'una setmana han estat:

3, 4, 1, 10, 4, 3, 2

A. Trobeu:

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| a. El rang de valors     | d. La mediana           |
| b. La mitjana aritmètica | e. La desviació mitjana |
| c. La moda               |                         |

B. Intepreteu cadascun dels paràmetres

## 9.4 Gràfics estadístics

### Diagrama de barres

Es pot utilitzar per representar tant variables qualitatives com quantitatives que siguin discretes. El més comú es emprar-lo en el darrer cas.

Consisteix en representar al pla cartesià la relació entre el valor de la variable (que es situa a l'eix de les abscises) i el nombre de vegades que apareix cadascun dels seus valors, és a dir, la seva freqüència absoluta (que es situa a l'eix de les ordenades).

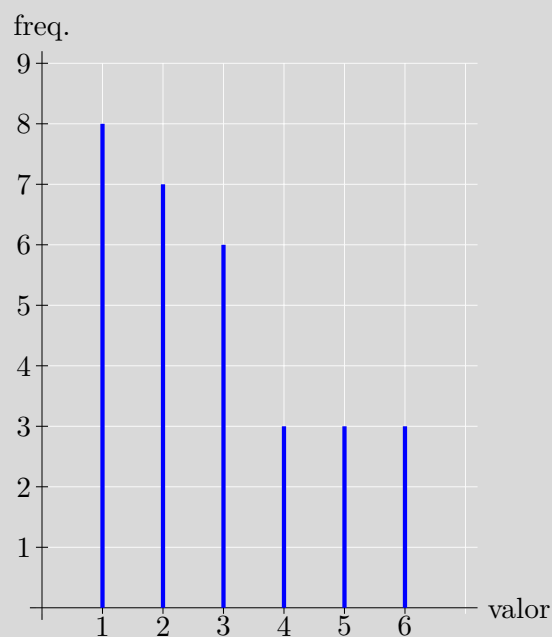
**Exemple 10.** El nombre d'hores diàries d'estudi de 30 alumnes és

3, 4, 3, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2,  
6, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 6, 1, 2, 1, 4, 3

Podem representar gràficament per fer un cop d'ull a les freqüències de cada valor? La taula de freqüències de la variable "hores d'estudi" és:

Valor	Freqüència
1	8
2	7
3	6
4	3
5	3
6	3

El diagrama de barres es forma representant a l'eix  $OX$  el valors de la variable i a l'eix  $OY$  la seva freqüència:



**Exercici 900.** El nombre de mòbils que han tingut 32 persones al llarg de la seva vida ha estat:

0, 1, 3, 4, 4, 4, 6, 5, 0, 5, 3, 5, 4, 1, 4, 4, 4, 3, 2, 4, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 2, 6, 7

- Trobeu la taula de freqüències
- Realitzeu el diagrama de barres

**Exercici 901.** La talla de calçat que utilitzen 20 alumnes en una classe d'Educació Física és:

37, 38, 43, 40, 40, 38, 40, 37, 39, 41, 38, 37, 37, 42, 38, 38, 38, 37, 38, 38

- Feis la taula de freqüències
- Trobeu quin tant per cent representa
- Trobeu la moda i la mitjana aritmètica
- Feis el diagrama de barres

**Exercici 902.** Les edats (en anys) dels 30 primers visitants del Planetari de la Fira de la Ciència 2011 han estat:

20, 7, 10, 13, 4, 7, 8, 11, 16, 14, 8, 10, 16, 18, 12,  
3, 6, 9, 9, 4, 13, 5, 10, 17, 10, 18, 5, 7, 10, 20

Trobeu:

- la seva moda
- la seva mitjana
- la taula de freqüències
- feis el gràfic de barres

**Exercici 903.** El nombre de partits guanyats consecutivament de tennis per 30 jugadors seleccionats a l'atzar és:

4, 5, 1, 0, 4, 10, 3, 4, 6, 6 5, 1, 2, 4, 4,  
7, 6, 8, 9, 6, 9, 5, 5, 4, 2 4, 4, 3, 4, 0

Trobeu la taula de freqüències expandida i feis un diagrama de barres.

**Exercici 904.** El nombre de pàgines web visitades diàriament per un internauta sobre un total de 12 pàgines:

4, 5, 0, 4, 12, 10, 11, 5, 6, 6 9, 5, 4, 4, 4,  
5, 6, 8, 11, 9, 12, 9, 8, 9, 4 4, 3, 4, 7, 0

- Feis la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana
- Feis un diagrama de barres

**Exercici 905.** El nombre d'encertants per dia a la loteria a Balears és:

Nombre d'encertants	0	1	2	2	3	4	5	6
Dies	2	3	2	0	2	1	1	1

- Trobeu la mediana i  $p_{75}$
- Feis el diagrama de barres

**Exercici 906.** El nombre de fills per persona d'una població de 10.000 habitants és:

Nombre de fills	Freqüència
0	2.000
1	2.000
2	500
3	250
4	230
5	20

- Trobeu la mitjana i la moda, i interpreta-les
- Feu el diagrama de barres

**Exercici 907.** Les notes de Ciències Naturals d'una classe són:

2, 1, 5, 5, 6, 10, 8, 8, 7, 7  
 5, 6, 5, 5, 6, 7, 3, 8, 0, 4  
 0, 6, 3, 3, 8, 8, 5, 8, 3

- Calculeu la mitjana, la mediana i la moda.
- Feis el diagrama de barres

**Exercici 908.** La taula de freqüències del nombre de cotxes venuts el darrer mes pels venedors de Nova York és:

Dada	0	1	2	3	4	5	6
Freqüència absoluta	500	2.000	1.900	200	100	300	1.000

Trobeu: (a.) la mitjana, la mediana i la moda, (b.) la desviació mitjana . Treieu les vostres pròpies conclusions i feis el diagrama de barres.

**Exercici 909.** El nombre de cotxes per persona d'una població de 5.000 habitants és:

Nombre de cotxes	Freqüència
0	2.000
1	2.000
2	500
3	250
4	230
5	20

- Trobeu la mitjana i la moda, i interpreta-les
- Feis el diagrama de barres

## Diagrama de sectors

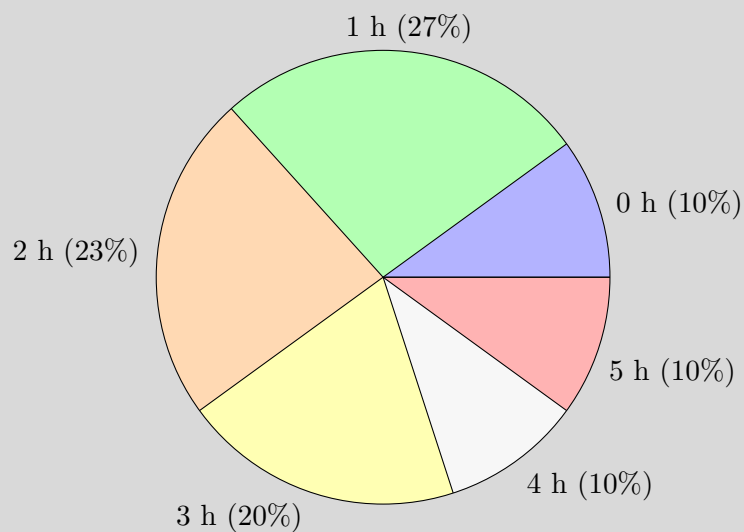
Es pot utilitzar per representar qualsevol tipus de variables.

Es sol emprar per representar resultats tancats d'enquestes, per captar visualment el tant per cent d'aparició de cada resultat.

**Exemple 11.** En l'exemple anterior (exemple 10), podem veure les dades com un sector. Per això, primer hem de calcular el tant per cent que representa cada valor i els graus que hem de representar (amb una regla de tres)

Valor	Freqüència	% que representa	Graus a representar
0	3	10	36
1	8	26,66	96
2	7	23,33	84
3	6	20	72
4	3	10	36
5	3	10	36
Total	30	99,99	360

I posteriorment amb un transportador d'angles i un regle, dibuixem el diagrama de sectors:



**Exercici 910.** Feis els diagrames de barres i el diagrama de sectors de les notes del butlletí del segon quadrimestre de 30 alumnes de 3r d'ESPA:

10, 3, 4, 5, 6, 4, 8, 9, 9, 8, 8, 4, 3, 2, 8, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 7, 8, 7, 9, 7, 8, 8, 9

**Exercici 911.** Realitzeu un diagrama de barres del nombres obtinguts quan es llança un dau trenta vegades:

1, 2, 1, 3, 4, 6, 6, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 6, 6,  
1, 2, 3, 4, 5, 4, 2, 3, 3, 4, 6, 1, 1, 1, 6.

Podem "deduir" que el dau està trucat o no? Per quina raó?

**Exercici 912.** De la llista d'Eurovisió (taula 9.1), mireu quants homes i dones han participat i feu un recompte. Feu un diagrama de sectors amb aquestes dades.

**Exercici 913.** El color dels ulls de les persones d'un grup de 30 persones és:

VERD, MARRÓ, BLAU, MARRÓ, MARRÓ, MARRÓ,  
MARRÓ, VERD, MARRÓ, BLAU, VERD, VERD,  
MARRÓ, MARRÓ, BLAU, VERD, BLAU, BLAU,  
BLAU, VERD, BLAU, MARRÓ, MARRÓ, MARRÓ,  
MARRÓ, MARRÓ, BLAU, MARRÓ, MARRÓ, MARRÓ

Amb el transportador d'angles, feis el diagrama de sectors.

**Exercici 914.** Dels 30 assistents a un sopar, aquests varen ser els segons plats:

VEDELLA, PEIX, PEIX, PEIX, VEDELLA,  
PEIX, XOT, PEIX, VEDELLA, PEIX,  
XOT, PEIX, XOT, PEIX, VEDELLA,  
PEIX, VEDELLA, PEIX, VEDELLA, XOT,  
PEIX, XOT, PEIX, XOT, XOT,  
XOT, XOT, XOT, XOT, XOT

Feis un gràfic de sectors amb aquestes dades

**Exercici 915.** Aquestes són les dades d'una enquesta sobre el nombre de ràdios a les cases espanyoles:

N. de ràdios:	0	1	2	3	4
N. de cases:	432	8.343	6.242	1.002	562

- Trobeu el tant per cent que suposen el nombre de cases amb 0 ràdios, amb 1 ràdio, etc.
- Feu un diagrama de sectors

**Exercici 916.** La nacionalitat de les persones que han viatjat per l'espai és la següent:

Nacionalitat	Nombre de persones	% que representa
Estats Units d'Amèrica	332	
Rússia	110	
ESA	33	
Canadà	9	
Japó	8	
La Xina	6	
Altres	21	

(La ESA inclou un conglomerat de diversos països europeus. S'inclouen d'aquesta manera perquè els països aïllats tenen molt poc pes i no apareixerien a la taula)

- Completeu la taula
- Digueu quina és la moda
- Feis el diagrama de sectors



**Exercici 917.** Feis el diagrama de pastís d'aquestes dades:

1, 2, 4, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 3,  
3, 4, 3, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1.

**Exercici 918.** La taula de freqüències absolutes del nombre de cotxes venuts el darrer mes pels venedors de Inca és:

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$f_i$	500	0	2.000	1.900	200	100	300

- Trobeu la mitjana, la mediana i la moda
- Calculeu la desviació mitjana i el coeficient de variació
- Treus les vostres pròpies conclusions
- Dibuixeu el diagrama de barres i el diagrama de pastís

**Exercici 919.** A una classe de 2n d'ESO, les notes de Català de cada alumne són:

4, 5, 6, 1, 2, 6, 7, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 4, 6, 4, 9,  
5, 3, 4, 1, 6, 6, 6, 5, 4, 0, 6, 6, 5, 4, 0, 5, 3, 4, 1, 6.

- Feu la taula de freqüències
- Calculeu la mitjana, la mediana i la moda
- Feu el diagrama de pastís

## Histograma

Un *histograma* (o un *histograma de freqüències*) és un diagrama per a variables estadístiques que s'agrupen en intervals. Consisteix en dibuixar, per a cada interval, un rectangle de base aquest interval de manera que la seva àrea sigui igual a la seva freqüència absoluta.

**Exemple 12.** Vegem-ho amb un exemple. Suposem que feim una enquesta sobre l'edat de les persones, la qual està recollida a la taula 9.5.

Potser volguem agrupar les edats segons les *generacions* de les persones: (a.) primera edat, de  $[0, 25)$ , (b.) segona edat, de  $[25, 60)$ , i (c.) tercera edat, de  $[60, \infty)$ , que correspondrien a la joventut, mitjana edat i vellesa. Noteu que la mida d'aquests intervals no és la mateixa.

Amb aquesta classificació, obtenim la taula següent:

Intervals	Freqüència absoluta
$[0, 25)$	11.918,5
$[25, 60)$	24.014,5
$[60, \infty)$	10.762

Noteu que segons les dades (taula 9.5) no podem saber exactament quantes persones tenen entre 0 i 25 anys i quantes persones tenen entre 25 i 30. Per tant, el que hem fet és suposar que existeixen el mateix nombre de persones en ambdós grups:  $5337/2 = 2668,5$ .

Ara hauríem de fer un gràfic de manera que:

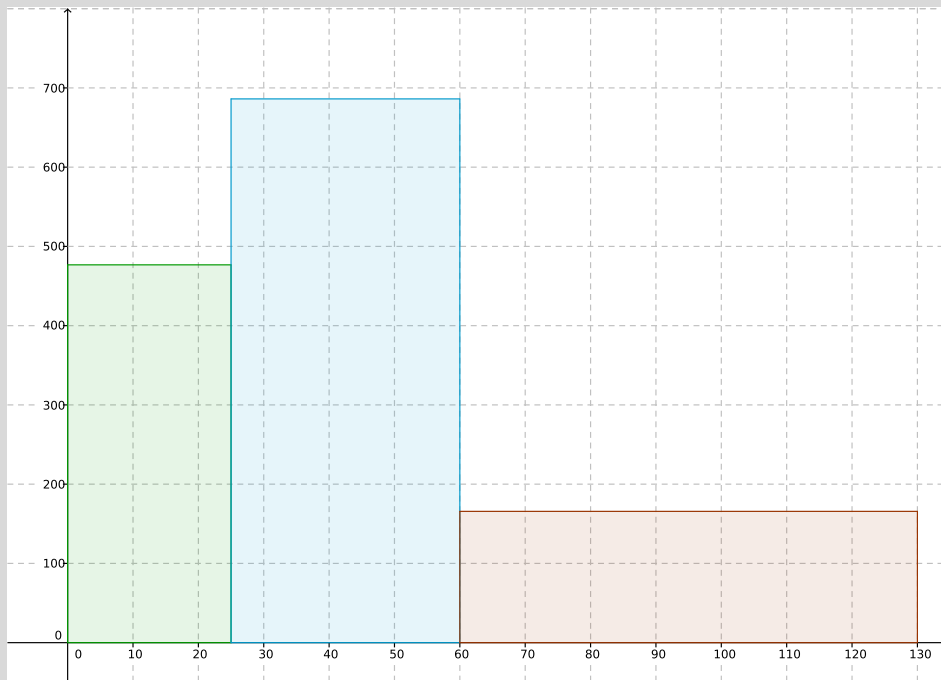
- a. Hi hagués un rectangle de base  $[0, 25)$  (de mida 25) i d'àrea proporcional a 11.918,5. Quina altura ha de tenir?

Com que sabem que  $A = b \cdot h$ , aleshores  $11.918,5 = 25 \cdot h$ . Per tant, l'altura del rectangle ha de ser  $h = 11.918,5/25 = 476,74$ .

- b. El segon rectangle ha de tenir base igual a  $[25, 60)$  (mida 35) i la seva àrea ha de ser proporcional a 24.014,5. Per tant, la seva altura ha de ser  $h = A/b = 24.014,5/35 \simeq 686,13$ .

- c. Finalment el darrer rectangle, que podem suposar de base  $[60, 130)$  (mida 65) tindrà una altura de  $A/b = 10.762/65 \simeq 165,67$ .

Amb tota aquesta informació, el gràfic queda de la manera següent (figura 9.15):



Taula 9.15 Histograma de freqüències dels grups d'edats

Normalment els intervals estan agrupats de forma que tenen la mateixa mida i per això sovint s'acostuma a confondre l'histograma amb el diagrama de freqüències, ja que l'histograma queda reduït a dibuixar rectangles d'altura proporcional a la freqüència absoluta de l'interval (la base és la mateixa). Aquesta confusió és clarament un error.

**Exercici 920.** El nombre d'hores de telèfon per individu d'una població de l'Estat espanyol han estat els següents:

Intervals	Freqüència absoluta
[0, 5)	10
[5, 10)	40
[10, 15)	55
[20, 25)	50
[25, 35)	20
[35, 60)	25

- Calculeu les freqüències relatives i es freqüències acumulades
- Dibuixeu l'histograma de freqüències
- Trobeu la mitjana aritmètica
- Calculeu la desviació típica
- Obteniu el coeficient de variació. Segons això, la dispersió de la mostra és molt gran?
- Calculeu l'interval  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  i digueu quin tant per cent de les dades hi ha a aquest interval. Comenteu el resultat obtingut.

**Exercici 921.** El nombre de ous ecllosionats per individu d'una espècie de granota han estat els següents:

Intervals	Freqüència absoluta
[20, 30)	5
[30, 40)	10
[40, 50)	25
[50, 60)	30
[60, 80)	15
[80, 100)	10

Calculeu:

- Les freqüències relatives
- Les freqüències acumulades
- La marca de classe de cada interval
- Dibuixa l'histograma de freqüències
- Mitjana aritmètica
- Variança i la desviació típica
- El coeficient de variació. Segons això, la dispersió de la mostra és molt gran?
- L'interval  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  i digueu quin tant per cent de les dades hi ha a aquest interval. Comenteu el resultat obtingut.

**Exercici 922.** El nombre de persones que va entrar a la botiga "Ca'n Salat" el juny del 2005 varen ser:

2, 4, 0, 5, 6, 47, 43, 28, 50, 14,  
 4, 6, 9, 5, 16, 2, 5, 3, 8, 5,  
 25, 6, 19, 13, 28, 48, 35, 58, 13, 9.

- Agrupeu les dades en interval d'amplitud 10
- Calculeu  $\bar{x}$ ,  $Me$ ,  $Mo$

c. Feis l'histograma de freqüències

**Exercici 923.** Les alçades de 30 persones collides a l'atzar són:

156, 154, 165, 168, 174, 145, 169, 168, 162, 170  
172, 180, 176, 178, 177, 156, 189, 164, 174, 180  
160, 186, 175, 173, 175, 172, 180, 179, 178, 177

- a. Agrupeu les dades amb interval d'amplitud 10
- b. Calculeu la desviació mitjana i el coeficient de variació
- c. Representeu les dades en un histograma

# APÈNDIX A

## RESUM DE TEORIA DE PROBABILITAT

### A.1 Experiments aleatoris

#### A.1.1 Espai mostral i successos

- *Experiment aleatori*  $\rightarrow$  un experiment del qual no podem predir-ne el resultat. Hi intervé la sort o l'atzar.
- *Experiment determinista*  $\rightarrow$  quan el resultat de l'experiment es pot conèixer abans de dur-lo a terme. No hi intervé la sort.
- *Espai mostral*  $\rightarrow$  és el conjunt de tots els possibles resultats
- Un *esdeveniment* (o *succés*)  $\rightarrow$  és qualsevol subconjunt de l'espai mostral (o sigui, una part de l'espai mostral).
  - $\triangleright$  *Esdeveniment elemental*  $\rightarrow$  és cadascun dels possibles resultats d'un experiment aleatori. És a dir, són els elements de l'espai mostral
  - $\triangleright$  *Esdeveniment compost*  $\rightarrow$  està format per dos o més esdeveniments simples. És a dir, és un conjunt de dos o més elements
  - $\triangleright$  Existeix un *esdeveniment segur*, que es verifica sempre, que és igual a l'espai mostral i un *esdeveniment impossible*, que mai pot ocórrer, el qual és igual al conjunt buit (el conjunt que no té cap element), el qual simbolitzem per  $\emptyset$ .

**Exemple 13.** Si tirem un dau, l'espai mostral és  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , els esdeveniments elementals són:

- “treure un 1” =  $\{1\}$
- “treure un 2” =  $\{2\}$
- “treure un 3” =  $\{3\}$
- “treure un 4” =  $\{4\}$
- “treure un 5” =  $\{5\}$
- “treure un 6” =  $\{6\}$

I un esdeveniment compost és “treure 5 o 6” =  $\{5, 6\}$ . I un altre seria “treure parell” =  $\{2, 4, 6\}$ .

#### A.1.2 Operacions amb esdeveniments

- La *unió* de dos esdeveniments  $A$  i  $B$   $\rightarrow$  és l'esdeveniment format per cada element que hi ha a  $A$  o en  $B$ . S'escriu  $A \cup B$ . Que passi  $A$  o  $B$  es el mateix que passi  $A \cup B$ .
- La *intersecció* de dos esdeveniments  $A$  i  $B$   $\rightarrow$  és l'esdeveniment format per cada element que apareix simultàniament a  $A$  i a  $B$ . S'escriu  $A \cap B$ . Que passi  $A$  i  $B$  a la vegada és el mateix que passi  $A \cap B$ .

- La *diferència* entre  $A$  i  $B$ , que s'escriu  $A \setminus B$ , és l'esdeveniment format pels elements que pertanyen a  $A$  però que no pertanyen a  $B$ .
- L'*esdeveniment contrari* (o *complementari*) d'un esdeveniment  $A \rightarrow$  és l'esdeveniment format per tots els elements de l'espai mostral que no estan a  $A$ . S'escriu  $A^c$  o  $\bar{A}$ .

**Exemple 14.** En l'experiment de llançar un dau i mirar el resultat, tenim que  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Si agafam  $A =$  "que surti parell" i  $B =$  "que surti un nombre menor que 5", tenim que:

- $A \cup B =$  "que surti parell o menor que 5"  $= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ . Per tant,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .
- $A \cap B =$  "que surti parell i menor que 5"  $= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$ . Per tant,  $A \cap B = \{2, 4\}$ .
- $A \setminus B = \{6\}$
- $B \setminus A = \{1, 2\}$
- $A^c =$  el contrari de què surti parell  $= \{1, 3, 5\}$
- $B^c =$  el contrari de què surti un nombre menor que 5  $= \{6\}$

Quan dos esdeveniments es poden donar simultàniament diem que són *compatibles*. En cas contrari, es diuen *incompatibles* (o *mútuament excloents*).

Dos esdeveniments  $A$  i  $B$  són compatibles quan  $A \cap B \neq \emptyset$ . Si  $A \cap B = \emptyset$ , aleshores  $A$  i  $B$  són incompatibles.

**Exemple 15.** En l'experiment de llançar un dau, si consideram els esdeveniments  $A =$  "Sortir parell" i  $B =$  "Sortir múltiple de 3" i  $C =$  "Sortir potència de 2", tenim que

- $A$  i  $B$  són compatibles perquè 6 és parell i múltiple de 3 a la vegada
- $B$  i  $C$  són incompatibles perquè no hi ha cap nombre múltiple de 3 que a la vegada sigui potència de 2 (cap nombre està a la vegada a  $\{3, 6\}$  i  $\{2, 4\}$ ).

## A.2 Probabilitat d'un esdeveniment

- La **probabilitat** d'un esdeveniment mesura la *facilitat* de què ocorri aquest esdeveniment. A cada esdeveniment se li assigna un nombre entre 0 i 1. Aquest nombre vendria a ser el tant per u de què pugui ocórrer l'esdeveniment.
- La probabilitat de l'esdeveniment segur és sempre 1
- La probabilitat de l'esdeveniment impossible és sempre 0

En general, el càlcul de probabilitats és complicat si no es suposa que tots els esdeveniments elementals siguin *equiprobables*. Penseu en calcular la probabilitat de treure parell en un dau enbiaixat cap al 2. És molt més senzill si suposam un dau on totes les cares tenen la mateixa probabilitat. Els experiments on els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat es diuen *experiments regulars*.

### A.2.1 Regla de Laplace

Per a calcular la probabilitat d'un esdeveniment  $A$  en un experiment regular, podem aplicar la regla següent:

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos possibles}}$$

**Exemple 16.** En l'experiment de llançar un dau, la probabilitat de l'esdeveniment  $A =$  "que surti un nombre primer" és

$$p(A) = p(\{2, 3, 5\}) = 3/6 = 0,5$$

## A.2.2 Llei dels grans nombres

Si repetim un experiment aleatori un nombre molt gran de vegades, les *freqüències relatives* de cada esdeveniment *s'aproximen a la seva probabilitat*.

D'aquesta manera, si tirem un dau moltes vegades (cents, milers, milions), cada vegada més les freqüències relatives del seus resultats s'aproximen als valor reals de la probabilitat. Això vol dir, en aquest exemple, que si tirem un dau moltes vegades,

$$\frac{\text{el nombre de vegades que ha sortit l'1}}{\text{nombre total de vegades que hem tirat el dau}}$$

s'aproximarà cada vegada més a  $p(\text{"treure un 6"}) = \frac{1}{6}$ .

El mateix passa amb els altres resultats: per exemple, el nombre de vegades que surt parell dividir entre el nombre total de vegades que hem tirat el dau s'atraca cada vegada més a 0,5.

Això serveix: (a.) Per a detectar si hi ha jocs trucats (b.) Per a estimar probabilitats que són molt difícils de calcular a la pràctica (per exemple, la probabilitat de què una peça sigui defectuosa, la probabilitat de què una persona tengui un accident de trànsit)

## A.2.3 Propietats de la probabilitat

- ★ La probabilitat de l'esdeveniment contrari és  $p(A^c) = 1 - p(A)$
- ★ La probabilitat de la unió de dos esdeveniments és  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ . En el cas de que els esdeveniments siguin incompatibles, aquesta probabilitat es transforma en  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .

## A.3 Probabilitat condicionada

Donats dos esdeveniments  $A$  i  $B$ , es defineix la *probabilitat de  $B$  condicionat a  $A$* , i es denota  $p(B | A)$ , com la probabilitat que ocorri  $B$  quan sabem que ha passat  $A$ .

Per calcular-la s'empra les fórmules següents:

$$p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)},$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B | A) = p(B) \cdot p(A | B).$$

Dos esdeveniments  $A$  i  $B$  són *dependents* quan l'ocurrència d'un influeix en l'ocurrència de l'altre. Quan això no passa són *independents*.

- Si  $p(B | A) = p(B) \Rightarrow A$  i  $B$  són independents.
- Si  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow A$  i  $B$  són independents.

# APÈNDIX B

## ÀREES I VOLUMS

### B.1 Recordatori d'àrees i volums

#### B.1.1 Definicions geomètriques

1. Un *polígon* és una figura plana composta per un nombre finit de segments rectes que s'uneixen format una figura tancada. Els seus punts s'anomenen *vèrtexos* i els segments *costats*.
2. El *perímetre* d'un polígon és la suma de les longituds dels seus costats
3. Un *triangle* és un polígon que té tres costats.
4. Un *rectangle* és un polígon que té quatre costats que formen angles de  $90^\circ$ . Quan en un rectangle, tots els costats són iguals, aquests formen un *quadrat*
5. En general, un polígon de quatre costats s'anomena *quadrilàter*. Casos especials dels quadrilàter són el rectangle, el quadrat, el rombe, el romboide i el trapezi.
6. El *trapezi* és un quadrilàter que té un parell de costats paral·lels.
7. Un quadrilàter amb dos parells de costats paral·lels s'anomena *paral·lelogram*. Casos especials d'un paral·lelogram són el rombe, el romboide, el rectangle i el quadrat.
8. Un *rombe* és un paral·lelogram que té tots els costats iguals
9. Un *romboide* és un paral·lelogram tal que els costats oposats són paral·lels i els costats adjacents no són iguals i els angles no són rectes
10. Un rectangle és un paral·lelogram que té tots els angles rectes. El quadrat és el cas particular amb tots els costats iguals.
11. Quan tots els costats d'un polígon són iguals, aquest s'anomena *polígon regular*.
12. Segons el nombre de costats, el polígon pot ser un *pentàgon* (de cinc costats), un *hexàgon* (de sis costats), un *heptàgon* (de set costats), etc.
13. L'*apotema* d'un polígon regular és el segment que va des del centre del polígon a la meitat d'un costat
14. Un *cercle* és la porció de pla dels punts que estan a distància menor o igual que un nombre fixat, que s'anomena *radi*. La *circumferència* és la vora del cercle
15. Un *políedre* és un cos geomètric delimitat per un nombre finit de cares poligonals. Les *arestes* són els costats dels polígons que el limiten. Els *vèrtexos* són els punts comuns a dues o més cares.
16. Un *prisma* és un políedre que té dues cares iguals i paral·leles (les *bases*) i cert nombre de cares laterals que són paral·lelograms (les  *cares laterals*). Si les cares laterals no formen un angle de  $90^\circ$  amb les bases es parla de *prismes oblics*. Si les cares laterals



són rectangles s'anomena *prisma rectangular*.

17. Una *piràmide* és un políedre que té per base un polígon i les seves cares laterals són triangles que tenen un vèrtex comú, el qual s'anomena *vèrtex* de la piràmide.

18. Un *cilindre* és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

19. Un *con* és un cos de revolució que s'obté en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets. El *costat* que va del seu vèrtex a la base (un cercle) s'anomena *generatriu*.

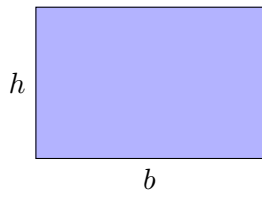
20. Una *esfera* és un cos de revolució que s'obté en girar un semicercle al voltant del seu diàmetre. Equivalentment són els punts de l'espai que estan a distància menor o igual que el radi d'aquest semicercle.

## B.1.2 Àrees de les figures planes més usuals

## B.1.3 Volums i àrees dels cossos geomètrics més usuals

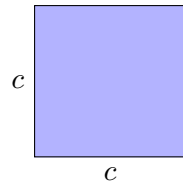
---

<sup>7</sup> Si desenvolupem el con,  $A_L$  és l'àrea d'un sector circular de longitud  $2\pi r$  i radi  $g$ .



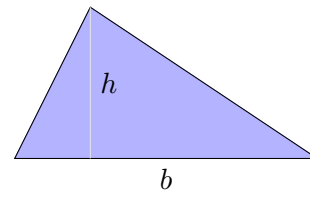
1. Rectangle

$$A = b \cdot h$$



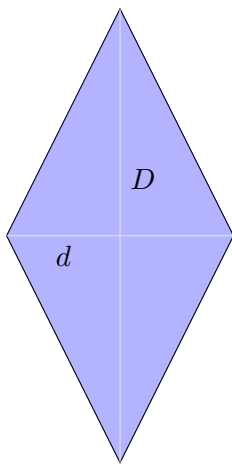
2. Quadrat

$$A = c \cdot c = c^2$$



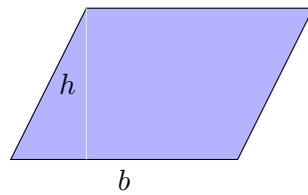
3. Triangle

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



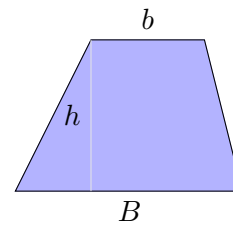
4. Rombe

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$



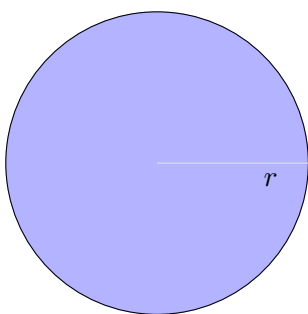
5. Romboide

$$A = b \cdot h$$



6. Trapezi

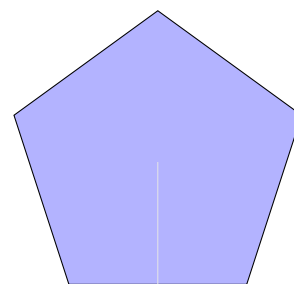
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$



7. Cercle

$$A = \pi \cdot r^2$$

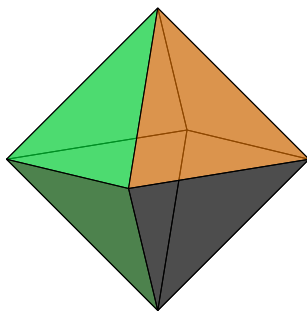
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$



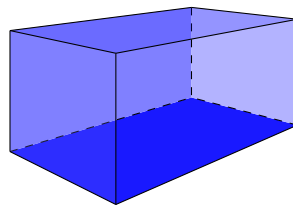
8. Polígon regular

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

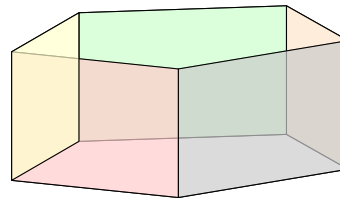
Figura B.1 Àrees de les figures planes més usuals



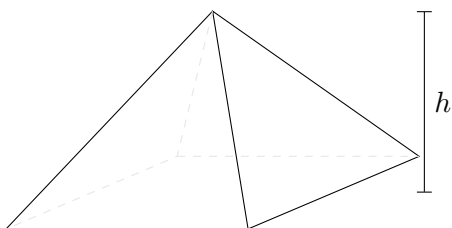
1. Poliedre  
El volum depèn del tipus de poliedre



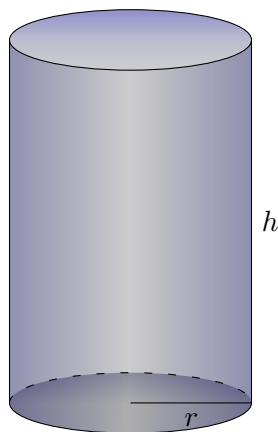
2. Ortoedre  
 $A = A_L + 2 \cdot A_B$   
 $V = A_B \cdot h$



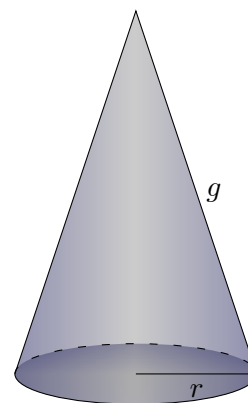
3. Prisma  
 $A = A_L + 2 \cdot A_B$   
 $V = A_B \cdot h$



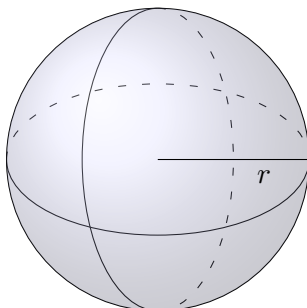
4. Piràmide  
 $A = A_B + A_L$   
 $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$



5. Cilindre  
 $A = A_L + 2 \cdot A_B$   
 $= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$   
 $V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$



6. Con  
 $A = A_L + A_B$   
 $= \pi \cdot g \cdot r + \pi \cdot r^2$   
 $V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$



7. Esfera

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Figura B.2 Volums (i algunes àrees) dels cossos geomètrics més usuals<sup>7</sup>

# APÈNDIX C

## SOLUCIONS

Aquí hi ha algunes solucions, pistes o resolucions dels exercicis d'aquest document.

483: (a.)  $x = 20$  (b.)  $x = 4$ , (c.)  $x = 33$ , (d.)  $x = 27$ , (e.)  $x = 12$ , (f.)  $x = 24$ , (g.)  $x = -60$ , (h.) no té solució, (i.)  $x = -6$ , (j.)  $x = 24/5$ , (k.)  $x = 30$ , (l.)  $x = 1$ , (m.)  $x = 24$ , (n.)  $x = \frac{1}{2}$ , (o.)  $x = 3$ , (p.)  $x = -3$ , (q.)  $x = 0$ , (r.)  $x = 5$ , (s.)  $x = 4$ , (t.)  $x = 64$ , (u.)  $x = 15$ , (v.)  $x = 3$ , (w.)  $x = -8$ , (x.)  $x = 60$ , (y.)  $x = -\frac{9}{2}$

462(a.)  $x = 11$  (b.)  $x = 2$  (c.)  $x = -1$  (d.)  $x = 20$

463(a.)  $x = 4$  (b.)  $x = -47$  (c.)  $x = 2$  (d.)  $x = -89$  (e.)  $x = 2$  (f.)  $x = 144$

464(a.)  $x = 7/4$  (b.)  $x = 6/5$  (c.)  $x = -7/3$  (d.)  $x = 5$  (e.)  $x = 3$  (f.)  $x = 7$  (g.)  $x = 5/6$  (h.)  $x = 2$

465(a.)  $x = -1$  (b.)  $x = 3/2$  (c.)  $x = 2$  (d.)  $x = 44$  (e.)  $x = -1$  (f.)  $x = -5$  (g.)  $x = -2/3$  (h.)  $x = 8/13$  (i.)  $x = 1/3$  (j.)  $x = -1/2$

467(a.)  $x = 1/2$  (b.)  $x = 1/4$  (c.)  $x = 1$  (d.)  $x = -40$  (e.)  $x = -1/6$  (f.)  $x = -3$

470(a.)  $x = 1$  (b.)  $x = 15$  (c.) no té solució (d.)  $x = 2/5$  (e.)  $x = 1$  (f.)  $x = 17$  (g.)  $x = 1$  (h.)  $x = 1/6$  (i.)  $x = 4$  (j.)  $x = 21$  (k.)  $x = -1$  (l.)  $x = -25$

757: (a.) L'esdeveniment impossible =  $\emptyset$ , (b.) l'esdeveniment segur =  $\{1, 2, 3, 4\}$  (c.)  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4\}$

758:  $\{\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ .

759: (a.) 12 (b.) 6 (c.) 6

760: (a.) 1 carta (b.) 13 (c.) 1 (d.) 12 (e.) 19 (f.) 3

761: (a.)  $\{2, 4, 6\}$  (b.)  $\{1, 3, 5\}$  (c.)  $\{4, 6\}$  (d.)  $\{2, 4, 5, 6\}$  (e.)  $\{2\}$  (f.)  $\{1, 2, 3, 5\}$

764: (a.)  $1/3$ , (b.)  $1/2$ , (c.)  $1/2$ , (d.)  $2/3$ , (e.)  $2/3$ , (f.)  $1/6$ , (g.) 0, (h.)  $2/3$

765: (a.)  $1/12$ , (b.)  $1/16$ , (c.)  $1/2$ , (d.)  $7/16$ , (e.) 0, (f.)  $5/16$

767:  $1/200$ , (a.)  $1/10$

768: (a.)  $1/10$ , (b.)  $3/5$ , (c.)  $2/5$ , (d.)  $1/5$ , (e.)  $2/5$ , (f.)  $2/5$

781: (a.)  $1/10$ , (b.)  $3/5$ , (c.)  $2/5$ , (d.)  $9/10$

783:  $23/42$

784:  $95/161$

785:  $1/188$

786:  $4/35$

787: (a.)  $1/6$ , (b.)  $7/16$

## RECONEIXEMENT D'OBRES ALIENES

Els continguts següents no són d'el·laboració pròpia i com a tals es distribueixen amb les seves corresponents llicències i autories. L'ús dels materials aliens es realitza aollint-se al dret de cita de l'article 32.2 de la Llei de Propietat Intel·lectual (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. [Entrada 8930](#) del BOE 97, de 22 d'abril de 1996) i del *Fair Use* de la Legislació dels Estats Units d'Amèrica (vegi's [https://en.wikipedia.org/wiki/Fair\\_use](https://en.wikipedia.org/wiki/Fair_use)).

- ★ Exercicis 7 i 8 del document “Posició de nombres enters” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Concepte de nombre enter). © Anònim 2005 CC-BY-NC-SA. [toomates.net](#)
- ★ Exercicis de l'*a* al *g* del document “Suma i resta de nombres enters sense cancel·lació de signes” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Suma i resta de nombres enters sense cancel·lació de signes). © Gerard Romo Garrido 2006 CC-BY-NC-SA. [toomates.net](#)
- ★ Exercicis del document “Multiplicació i divisió de nombres enters” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Multiplicació i divisió de nombres enters). © Pilar Compte 2007 CC-BY-NC-SA. [toomates.net](#)
- ★ Exercicis del document “Operacions combinades amb nombres enters” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Operacions combinades amb nombres enters). © Anònim 2007 CC-BY-NC-SA. [toomates.net](#)
- ★ L'exercici 194 correspon a l'exercici 23 del document *Proporcionalitat*. © 2008 IES LLobregat, Joan Carles Sampera Bonet. El material es distribueix sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada” (CC BY-NC-SA 3.0). Disponible a [www.toomates.net/Llistes/a2008/nov/materials\\_sampera/Proporcionalitat.doc](http://www.toomates.net/Llistes/a2008/nov/materials_sampera/Proporcionalitat.doc)
- ★ Als exercicis 353 i 354, s'han utilitzat els [mapes de Google](#). © 2010 Google.
- ★ Als exercicis 355, 356, 357, 358, 359, 361, 365, 368, 372, 379, 380 i 375 s'han utilitzat els mapes de l'[OpenStreetMap.org](#) amb els mosaic de l'[equip Humanitari](#), que estan llicenciats sota [ODbL i CC-BY-SA 2.0](#). © 2014 Col·laboradors d'OpenStreetMap.
- ★ Als exercicis 358, 359 i 372 s'ha utilitzat el servei de [Project OSRM](#) © 2014 Project OSRM.
- ★ Els exercicis 365, 368, 370, 382, 383, 384, 385, 391, 393, 401 i 402 són adaptacions o reproduccions de materials de [toomates.net](#):

- ▷ Dossier “Semblança, girs i translacions” (camí: Recursos → Geometria → Figures geomètriques en el pla → Semblança). © Joan Carles Sampera Bonet 2008 CC-BY-NC-SA.
- ▷ Document “6 exercicis amb el Teorema de Tales” (camí: Recursos → Geometria → Figures geomètriques en el pla → Teorema de Tales). © Toomates.net 2005 CC-BY-NC-SA.
- ▷ Document “Teorema de Tales (I)” (camí: Recursos → Geometria → Figures geomètriques en el pla → Teorema de Tales). © Toomates.net 2005 CC-BY-NC-SA.
- ★ A l'exercici 360, s'ha usat del programa [Marble Virtual Globe](#) (versió 1.8.20), el qual es distribueix sota llicència GNU LGPL 2, amb la capa *Moon Elevation* que es renderitza a partir de les dades de la NASA/SDIO i la USGS Astrogeology Research Program, les quals estan en el domini públic. 2008.
- ★ A l'exercici 381, s'ha usat la imatge [718smiley.svg](#), de Wikimedia Commons, que es distribueix sota llicència CC-BY-SA 3.0. © 2008 Wikimedia Commons.
- ★ A la secció “[Hipsòmetre](#)”, s'han usat les imatges “[The Leaning Tower of Pisa SB.jpeg](#)” CC-BY-SA 3.0 (© 2013 W. Lloyd MacKenzie i Wikimedia Foundation), l'arxiu “[Protactor Rapporteur Degrees V3](#)” CC0 1.0 (© 2011 Wikimedia Foundation). Aquesta secció està fortament inspirada en la [fitxa 25](#) de n'Anton Aubanell.
- ★ A la secció “[Teorema de Pitàgores](#)” per a l'elaboració dels exercicis [414](#), [415](#), [416](#), [417](#), [418](#), [419](#), [420](#), [421](#), [422](#) i [423](#) s'han usat els exercicis de na Margalida Garcias *ESPA 2 Matemàtiques*. Editorial Talaiot. Palma, 2012. Distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 a partir dels materials del programa *Educación Digital A Distancia* de Luis Barrios Calmaestra, Andrés Cassinello Espinosa, Juan Jesús Cañas Escamilla, José R. Galo Sánchez, Miguel Martín Cano, Carmel Ramírez García, Francisco J. Rodríguez Villanego i Consolación Ruíz Gil (traducció: Sergi del Moral Carmona i Zoila Pena i Terrén) també distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 Espanya.
- ★ Els exercicis [443](#), [444](#), [445](#) i [446](#) estan extrets del llibre de text d'en Daniel Santos, Pilar García, Carmen Vázquez, Antonio Nevot, José Gil, Andrés Nortés Checa *Matemàtiques 4t Curs*. Editorial Santillana. © 1996.
- ★ Les pàgines “[Per a practicar de l'Àrea de cossos geomètrics. Pàgina 1](#)”, “[Per a practicar de l'Àrea de cossos geomètrics. Pàgina 2](#)”, “[Autoavaluació de l'Àrea de cossos geomètrics](#)”, “[Solucions de l'Àrea de cossos geomètrics](#)”, “[Per a practicar del Volum de cossos geomètrics. Pàgina 1](#)”, “[Per a practicar del Volum de cossos geomètrics. Pàgina 2](#)”, “[Autoavaluació del Volum de cossos geomètrics](#)” i “[Solucions dels exercicis del Volum de cossos geomètrics](#)” (pàgines de 144 a 151) s'han extret del llibre de na Margalida Garcias *ESPA 2 Matemàtiques*. Editorial Talaiot. Palma, 2012. Distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 a partir dels materials del programa *Educación Digital A Distancia* de Luis Barrios Calmaestra, Andrés Cassinello Espinosa, Juan Jesús Cañas Escamilla, José R. Galo Sánchez, Miguel Martín Cano, Carmel Ramírez García, Francisco J. Rodríguez Villanego i Consolación Ruíz Gil (traducció: Sergi del Moral Carmona i Zoila Pena i Terrén) també distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 Espanya.
- ★ L'exercici [110](#) està fortament inspirat en la reflexió de n'Ewan Weinberg. “An Easy Transformation”. © 2015 Ewan Weinberg. Disponible a <http://evanweinberg.com/2015/10/16/an-easy-transformation/>.

- ★ L'exercici 498 està inspirat en “A12 Fencing” de MathShell, disponible a <http://map.mathshell.org/materials/tasks.php?taskid=369>. © 2012 The MAP Summative Assessment Tasks. El material està disponible sota llicència “Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0 No adaptada” (CC-BY-NC-ND 3.0).
- ★ L'exercici 665 està extret de l'entrada “Real-World Math That Isn't Real To Students” del blog d'en Dan Meyer, disponible a <http://blog.mrmeyer.com/2013/real-world-math-that-isnt-real-to-students/>. © Dan Meyer. El material es distribuïa sota la llicència “Reconeixement 3.0 Estats Units d'Amèrica” (CC BY 3.0 US). Ara es distribueix sota la llicència “Reconeixement 4.0 Internacional” (CC-BY 4.0).
- ★ L'exercici 670 està extret de l'exercici 12 del tema “Funciones y gráficas” del llibre “Llibre de text de 3r d'ESO” (pàgina 227). Editorial Anaya que es pot consultar a la pàgina del [departament de Matemàtiques de l'IES Arroyo](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/matematicas.htm), disponible a <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/matematicas.htm>. © Anaya.
- ★ A l'exercici 740, la imatge del tanc (figura 7.1) s'ha extreta de la [plana web](http://www.geograph.org.uk/more.php?id=3633065) del Neil Theasby (<http://www.geograph.org.uk/more.php?id=3633065>). La imatge es titula “Old fuel tank on abandoned military camp” i es distribueix sota llicència “Creative Commons Reconeixement. CompartirIgual 2.0” (CC-BY-SA 2.0)
- ★ Els exercicis 749 està extret de la pàgina de *Math is Fun* (<http://www.mathsisfun.com/algebra/quadratic-equation-real-world.html>). © Math is Fun 2014.
- ★ Als exercicis 690, 691, 692 i 693, la idea i els continguts estan extrets de *Llibre de text de 3r d'ESO*. Tema “Funciones y gráficas”. Ed. Anaya. Exercicis 1, 2, 4, 5, 12, 15, 14, respectivament. Pàgines 225-228. IES Arroyo. Dpt. Matemàtiques ([Averroes](#)).
- ★ L'exercici 778 està adaptat a partir de l'exercici “Favorables i possibles” (quadre 15, pàgina 206) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006
- ★ L'exercici 770 està adaptat a partir de l'exercici “Practica els complementaris” (pàgina 208) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006.
- ★ Els exercicis 764, 765, 767, 768, 781, 783, 784, 785, 786 i 787 estan extrets del llibret *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior* de n'Alícia Espuig Bermell. © Alícia Espuig Bermell 2009, distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada” (CC-BY-NC-SA 3.0)
- ★ Els exercicis 757, 758, 759, 760 i 761 estan extrets del llibre electrònic “Matemàtiques 4t Opció B” de la col·lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil. Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya” (CC-BY-NC-SA 3.0 ES)
- ★ L'exercici 791 s'ha extret del llibre electrònic “Matemàtiques 4t Opció A” de la col·lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil.

Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya” (CC-BY-NC-SA 3.0 ES)

- ★ Els exercicis 793, 794, 796, 771, 772, 773, 774, 775, 776 i 777 s’han extret del web [toomates.net](http://toomates.net) distribuïts sota llicència “Creative Commons de Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada” (CC-BY-NC-SA 3.0). © 2007-2009 Gerard Romo, Joan Carles Sampera Bonet, Oriol Olivé i Ana Rodríguez.
- ★ Les imatges dels exercicis 779 i 780 s’han pres de la [tasca 595](#) de MathShell *Representing Data Using Grouped Frequency Graphs and Box Plots*. © 2014 MARS, Shell Center, University of Nottingham. Distribuïda sota llicència “Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0 No adaptada” (CC-BY-NC-ND 3.0).
- ★ El codi font de la figura 7.2 és una obra derivada de la figura “Example: Cuboid in a 2 vanishing points perspective” (<http://www.texample.net/tikz/examples/cuboid/>). © Florian Lesaint. Distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional” (CC-BY 4.0).
- ★ Els exercicis 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805 i 806 són de “Apunts de Matemàtiques per a l’Accés a la UIB per a majors de 25 anys” de Xavier Bordoy i Xisco Sebastià, els quals es distribueixen sota llicència “Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional” (CC-BY 4.0).