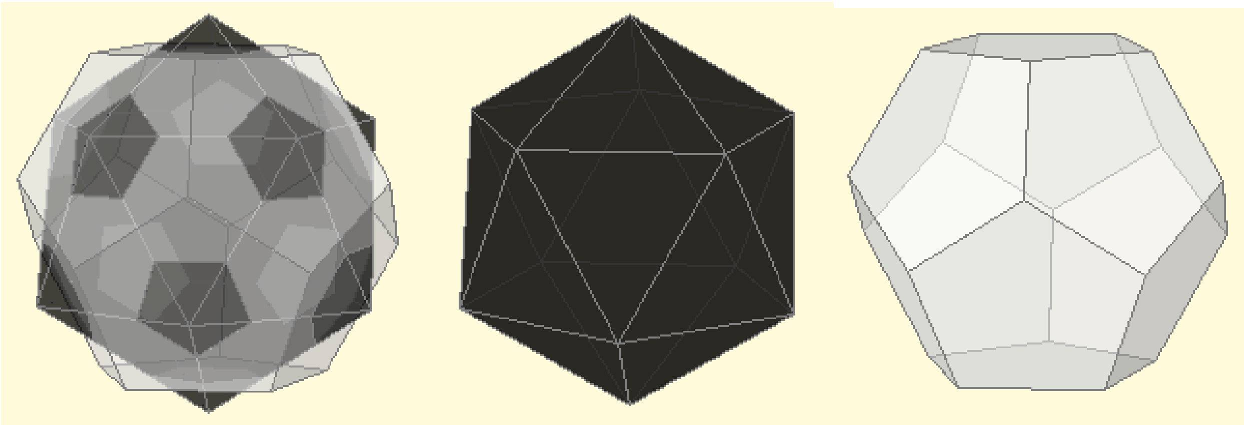
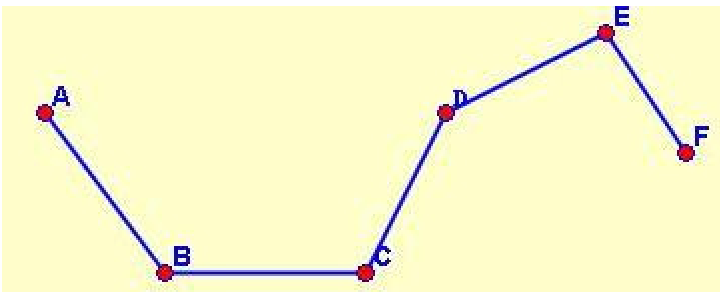
Abans de començar

Un pilota de futbol es pot construir amb polígons regulars: 12 pentàgons i 20 hexàgons. Aquí pots observar com s’obté en intersecar-se un icosaedre i un dodecaedre.



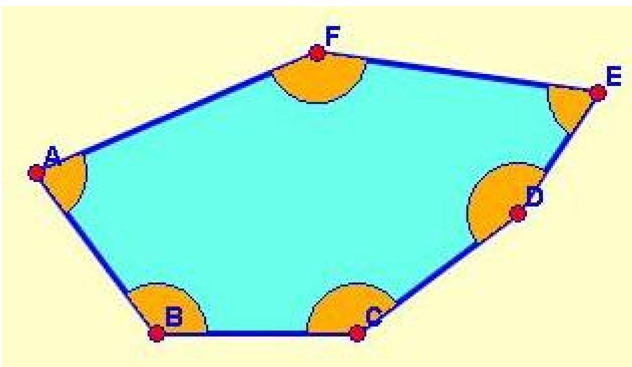
Recorda

Una **línia poligonal** és un conjunt de **segments concatenats** (cadascun comença on acaba l'anterior), i poden ser: **obertes** o **tancades**.



Línia poligonal

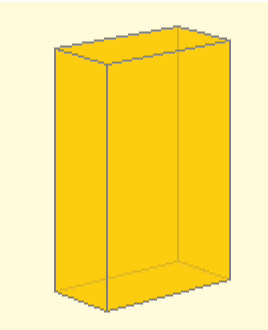
La **superfície** continguda per una **línia poligonal tancada** s'anomena **polígon**. Els polígons poden ser **còncaus** o **convexos**.



Aquest polígon és convex, perquè els seus angles interiors són més petits de 180º

1. Poliedres

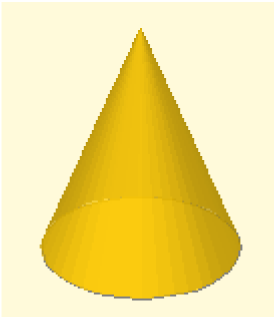
Definició



Un poliedre és un cos geomètric tridimensional les cares del qual són polígons, cada un d'ells és una **cara**.

El significat de **poli** és *molts* i el de **edre** és *cara*, per tant poliedre significa moltes cares.

En la imatge de l'esquerra tenim un poliedre amb sis cares que són rectangles.

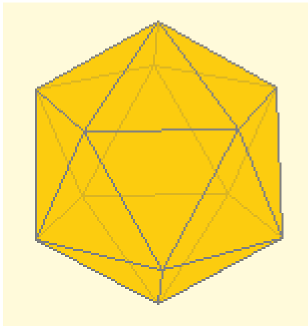


Contràriament, si al menys una de les superfícies que delimiten a un sòlid **no** és un polígon, aleshores **no és un poliedre**.

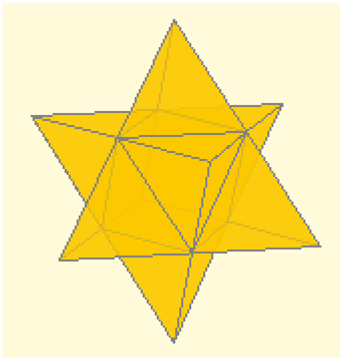
Això és el que passa a la imatge de la dreta on la base és un cercle, per tant, no és un poliedre, però, a més a més, la cara lateral no és plana. (Recorda que un polígon és pla)

Un **angle diedre** és la regió de l'espai delimitada per dos semiplans.
Un angle diedre és **convex** si és menor que un angle pla i, en cas contrari, es diu que és **còncau**

Els poliedres poden ser **convexos** o **còncaus**. És convex si tots els angles diedres són convexos. N'hi ha prou que hi hagi un angle diedre que sigui més gran que un pla perquè el poliedre sigui còncau.



Poliedre convex



Poliedre còncau

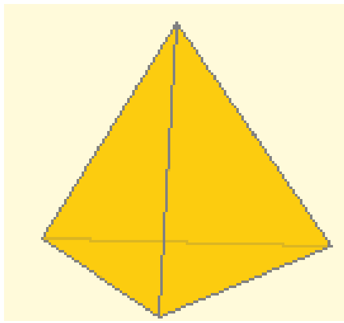
Exercici resolt: El poliedre de la figura de la dreta és el tetraedre i...

a) tots els tetraedres són convexos

b) té quatre cares i és còncau

c) és un cos rodó

Solució: **a)** perquè té tots els angles diedres convexos.

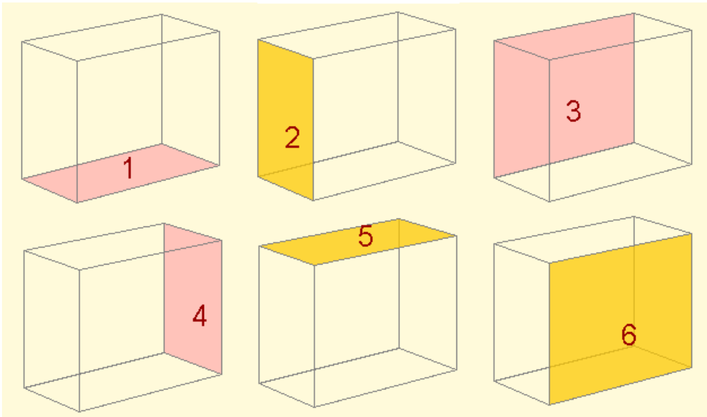


1. Poliedres

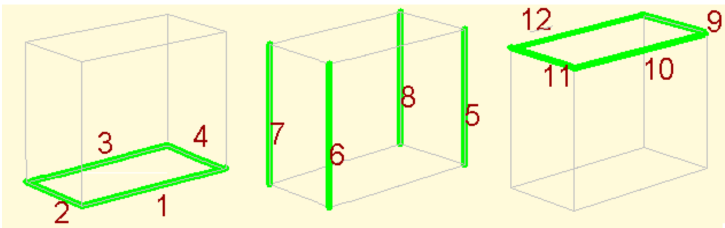
Elements d'un poliedre.

En un poliedre podem distingir els següents elements:

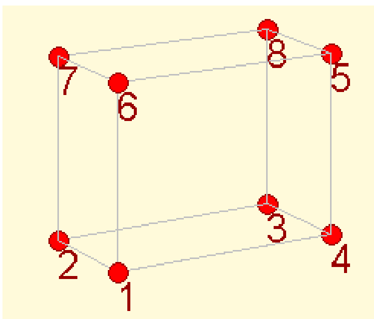
- **Cares**: són els polígons que formen el poliedre.



- **Arestes**: són els segments en els quals s'intersequen (es tallen) les cares.

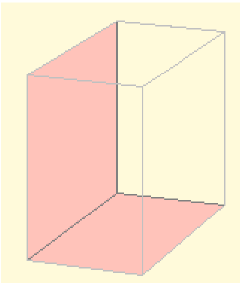


- **Vèrtexs**: són els punts on s'intersequen les arestes.



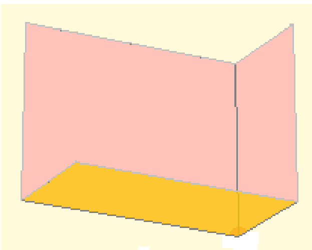
Vèrtexs d'un poliedre

A més podem esmentar els **angles diedres** delimitats per dues cares que es tallen. N'hi ha tants com a **nombre d'arestes**.

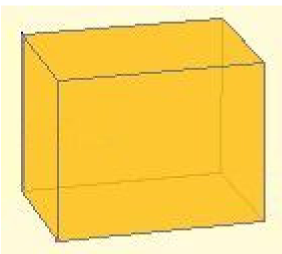


A la figura es mostra un angle diedre.

I els **angles poliedres** determinats per les cares que incideixen en un mateix vèrtex. N'hi ha tants com a **nombre de vèrtexs**.



A sobre es mostra un angle poliedre.



En aquesta figura (ortoedre) trobem **12** angles diedres i **8** angles poliedres.

2. Tipus de poliedres

Prismes

Un prisma és un poliedre determinat per:

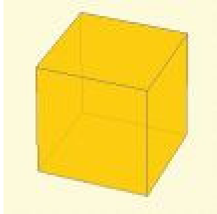
- les **bases**: dues cares paral·leles que són polígons iguals.
- tantes **cares laterals**, que són paral·lelograms, com costats tenen les bases.

Als prismes se'ls classifica segons el nombre de costats de les seves bases: triangular (3 costats), quadrangular (4 costats), pentagonal (5 costats), hexagonal (6 costats), etc.

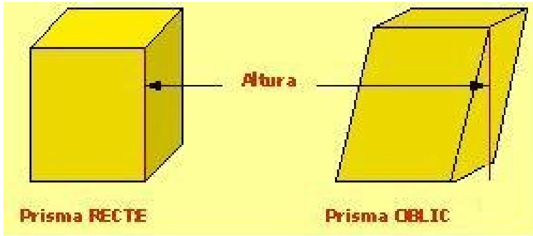
L'**altura** del prisma és la distància entre les bases. Si l'altura coincideix amb les arestes laterals, el prisma és recte; en cas contrari, és oblic.

Les cares laterals dels prismes rectes són rectangles.

Un prisma és **convex** o **còncau** si respectivament les seves bases són polígons convexos o còncaus.



Prisma amb base de 4 costats



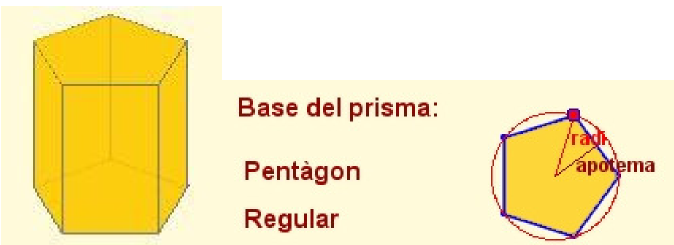
Prismes regulars.

Un prisma recte és **regular** si les seves bases són polígons regulars.

Recorda:
- un polígon és regular si té tots els seus costats i angles iguals.
- tot polígon regular es pot **inscriure** en una circumferència

En ser les bases polígons regulars, podrem identificar el radi de la circumferència circumscrita i l'apotema.

Per exemple, en un prisma pentagonal regular



La base és un pentàgon regular. Es mostra l'apotema i el radi de la circumferència circumscrita

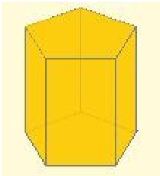
2. Tipus de Poliedres

Desenvolupament d’un prisma.

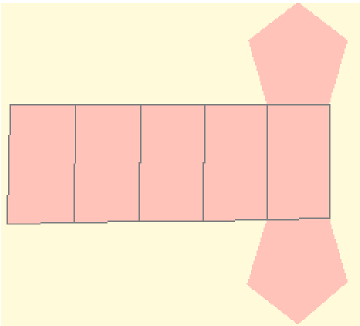
Tots els prismes són desenvolupables: és a dir, les seves cares es poden col·locar en un pla, i amb plecs es pot construir el prisma.

El desenvolupament d'un prisma recte es compon de les seves dues bases i d'un rectangle que té tantes divisions com nombre de cares laterals.

En la figura de l’esquerra es pot observar un prisma recte pentagonal i el seu desenvolupament.



Prisma recte pentagonal i el seu desenvolupament



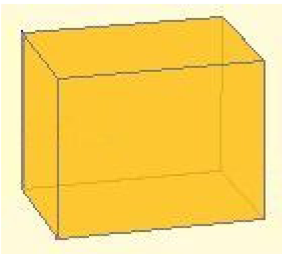
Com seria el desenvolupament d’un prisma oblic?

Paral·lelepípedes.

Els paral·lelepípedes són prismes tals que **totes** les seves cares són paral·lelograms.

Són prismes **quadrangulars**.

És **recte** si l’altura coincideix amb les arestes, en cas contrari, són **oblics**.

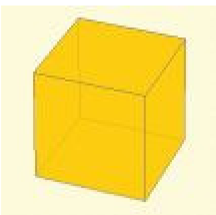


Ortoedre: les cares són rectangles. (Orto=perpendicular; edre=cara)

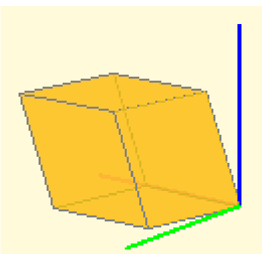
Entre ells en destaquem quatre en particular:

- Ortoedre: les seves cares són rectangles.
- Cub: les seves cares són quadrats.
- Romboedre: les seves cares són rombes.
- Romboiedre: les seves cares són romboides.

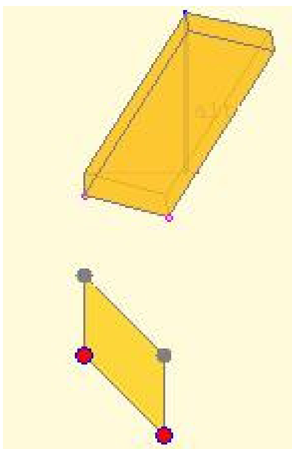
En la figura de sota, es mostra aquest últim amb un detall de la base.



Cub: les cares són quadrats. (És un cas particular d’ortoedre)



Romboedre: les cares són rombes (Les 6 cares són iguals)



Preguntes tipus test sobre prismes resoltes

1. En els prismes inclinats:
   a. Totes las cares són rectangulars.
   b. Alguna cara pot ser un rectangle.
   c. Cap cara pot ser rectangular.

   b) Les cares dels prismes han de ser paral·lelograms i, en particular, pot tenir alguna cara rectangular.

2. Un ortoedre té:
   a. Totes les seves cares pentagonals.
   b. Totes les seves cares iguals.
   c. Totes les seves cares perpendiculars entre sí.

   c) Totes les cares del ortoedre són rectangles i, per tant, són perpendiculars.

3. Un cub és:
   a. Un pentaedre.
   b. Un tetraedre.
   c. Un hexaedre.

   c) Té 6 cares. (Recorda: "edre" significa cara i "hexa" sis)

4. Tots els prismes tenen:
   a. El doble de vèrtexs que de costats té una base
   b. El mateix nombre de vèrtexs que de costats té una base
   c. Tants vèrtexs com nombre de costats d'una base més dos.

   a) Els vèrtexs del prisma estan a les dues bases que té.

5. Si les cares laterals d'un prisma són rectangles:
   a. És recte.
   b. És oblic.
   c. És un ortoedre

   a) L'única possibilitat perquè totes les cares laterals siguin rectangles és que el prisma sigui recte.

6. Els paral·lelepípedes:
   a. Poden ser prismes triangulars.
   b. Han de ser prismes quadrangulars.
   c. No tenen perquè ser prismes quadrangulars.

   b) Perquè totes les seves cares són paral·lelograms (quatre costats).

7. Si les bases d'un prisma són rectangles:
   a. Pot ser un romboedre.
   b. És recte.
   c. Pot ser oblic.

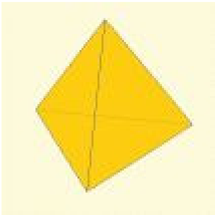
   c) La base pot ser rectangular i l'altura NO coincidir amb l'aresta.

8. Un prisma pentagonal té:
   a. Quinze cares, deu arestes i set vèrtexs.
   b. Deu cares, set arestes i quinze vèrtexs
   c. Set cares, quinze arestes i deu vèrtexs.

   c) El nombre de cares laterals coincideix amb el de costats de les bases. Si li afegim les 2 bases, el total és 7 cares.

2. Tipus de Poliedres

Piràmides.



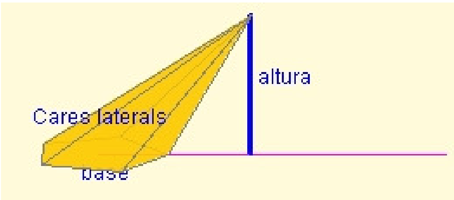
Piràmide de base triangular

Una piràmide és un poliedre determinat per:

- Una cara poligonal denominada base.
- Tantes cares **triangulars** com costats té la base.

El punt on convergeixen tots els triangles es denomina vèrtex o cúspide.

L'altura d'una piràmide és la distància del vèrtex a la base.



Altura d'una piràmide

Una piràmide és **convexa** o **còncava** si la seva base és un polígon convex o còncau respectivament.

La definició de piràmide recta o obliqua és una mica més complexa que en el cas dels prismes i és relativa al centre de gravetat o centroide del polígon base.

Piràmides regulars.

Una piràmide és **regular** si totes les cares laterals són iguals.

Las cares laterals d'una piràmide regular són triangles isòsceles.

L'apotema és l'altura dels triangles isòsceles de les cares de la piràmide. NO s'ha de confondre amb l'altura de la piràmide.

A l'**altura** d'aquests triangles se l'anomena **apotema** de la piràmide.

La base és un polígon regular i, per tant, podem identificar el radi de la circumferència circumscrita i l'apotema de la base.

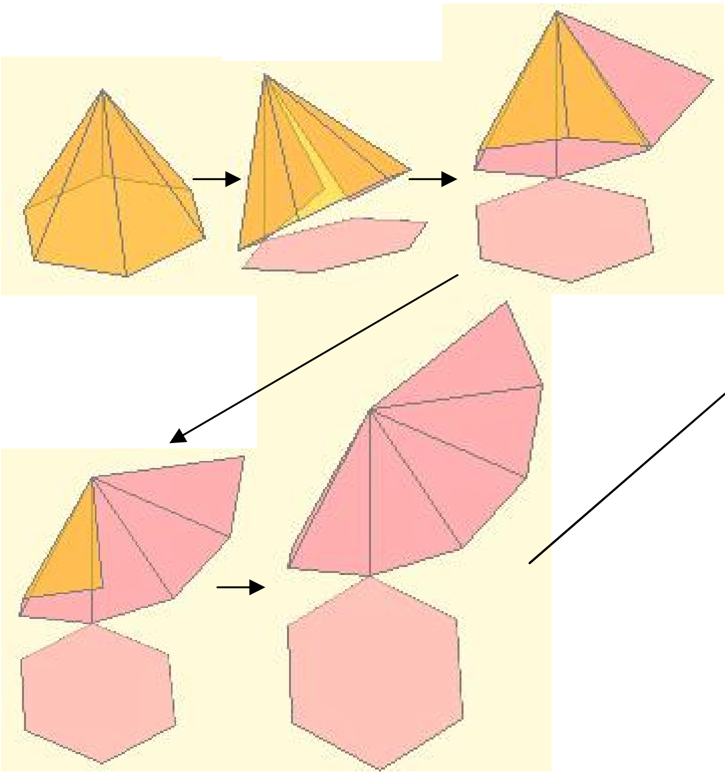
Apotema i radi de la circumferència circumscrita en una piràmide de base quadrada

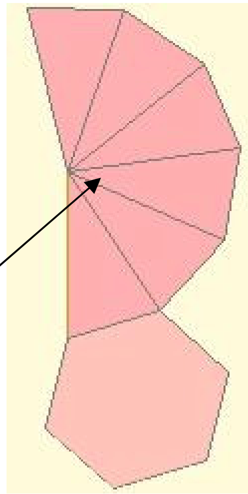
2. Tipus de poliedres

Desenvolupament d'una piràmide.

Totes las piràmides són desenvolupables, és a dir, les seves cares es poden col·locar en un pla i mitjançant plecs es pot construir la piràmide.

En les imatges es pot observar com s'obté un desenvolupament d'una piràmide regular.





Desenvolupament complet d'una piràmide hexagonal

Qüestió: Com seria el desenvolupament d'una piràmide recta no regular? I el d'una obliqua?

Poliedres regulars.

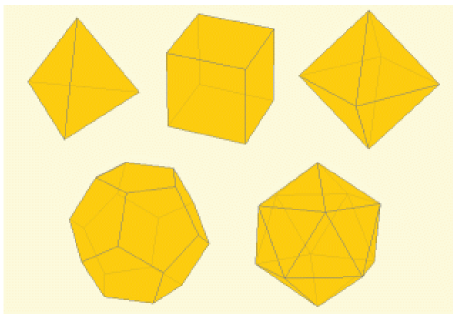
Un poliedre és **regular** si totes les seves cares són iguals i en cada vèrtex incideixen el mateix nombre de cares i arestes.

Només hi ha cinc poliedres regulars convexos: el tetraedre, el cub, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre.

Als poliedres convexos regulars també se'ls anomena **sòlids platònics**, perquè a la Grècia clàssica els va estudiar Plató.

Poliedre regular	Cares	Vèrtexs	Arestes
Tetraedre	4	4	6
Cub	6	8	12
Octaedre	8	6	12
Dodecaedre	12	20	30
Icosaedre	20	12	30

Tetraedre **Cub** **Octaedre**



Dodecaedre **Icosaedre**

Sòlids platònics

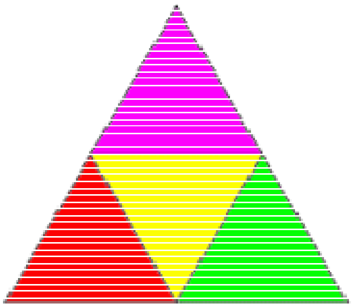
2. Tipus de Poliedres

Desenvolupament de poliedres regulars.

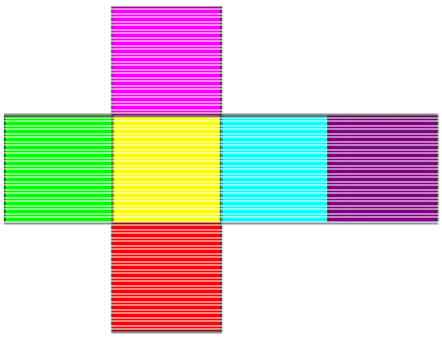
Tots els poliedres regulars són desenvolupables, és a dir, les seves cares es poden col·locar en un pla i mitjançant plecs es poden construir.

A les imatges podem observar alguns dels desenvolupaments possibles de cada un dels poliedres convexos regulars.

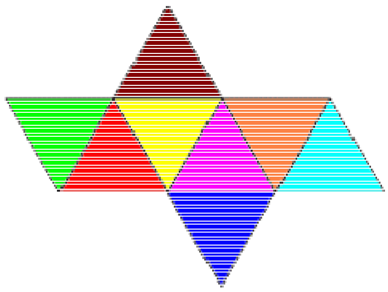
Recorda que als poliedres convexos regulars se'ls anomena també **sòlids platònics**, perquè Plató els va estudiar a la Grècia clàssica.



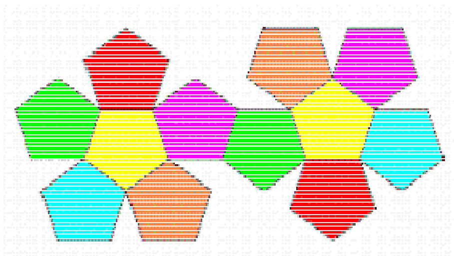
Desenvolupament del tetraedre



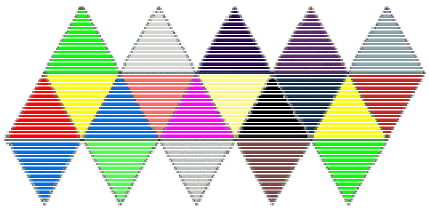
Desenvolupament del cub



Desenvolupament del octaedre



Desenvolupament del dodecaedre



Desenvolupament de l'icosaedre

Preguntes tipus test sobre prismes regulars resoltes

1. En l'octaedre incideixen en cada vèrtex:
   a. Tres cares.
   b. Quatre cares.
   c. Cinc cares.

   b) Incideixen 4 cares

2. Poliedres regulars amb cares triangulars n'hi ha:
   a. Tres.
   b. Un.
   c. Dos.

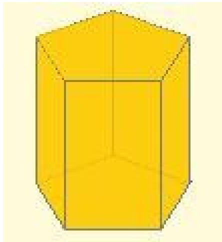
   a) El tetraedre, l'octaedre i l'icosaedre.

2. Tipus de poliedres

Relació d'Euler.

Euler va demostrar que en un poliedre es compleix la relació:
C + V = A + 2
essent C: nombre de cares, V: nombre de vèrtexs i A: nombre d'arestes del prisma.

Observa l'exemple de com es compleix la relació d'Euler:



Prisma de base pentagonal:
C = 7; V = 10; A = 15
C + V = 17 = A + 2

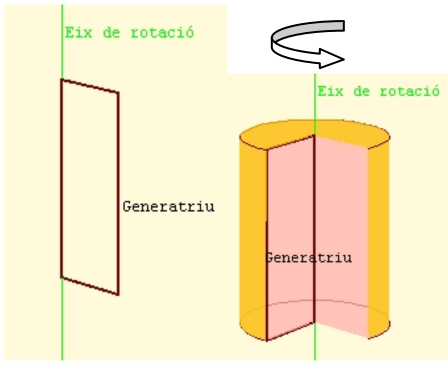
3. Cossos rodons

Cilindre.

Un **cilindre recte** és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats. La recta en la qual se situa el costat sobre el que gira s'anomena **eix de rotació** i el costat paral·lel a ell és la **generatriu**.

En un cilindre distingim la **superfície lateral** i **dues bases** que són dos cercles iguals.

L'altura del cilindre és la distància entre les dues bases. En un cilindre recte l'altura i la generatriu mesuren el mateix.

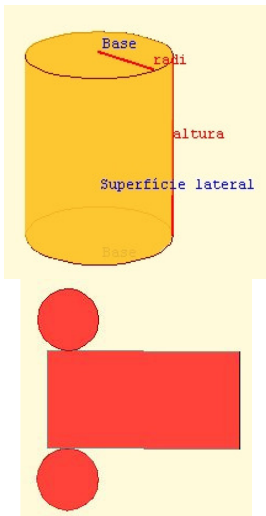


Generació del cilindre

Desenvolupament del cilindre.

La superfície del cilindre és desenvolupable en el pla. Aquest desenvolupament es compon de:

- dos cercles iguals, el radi dels quals és el radi del cilindre: r.
- un rectangle la base del qual té longitud igual al perímetre del cercle de les bases: 2πr, i altura la del cilindre.

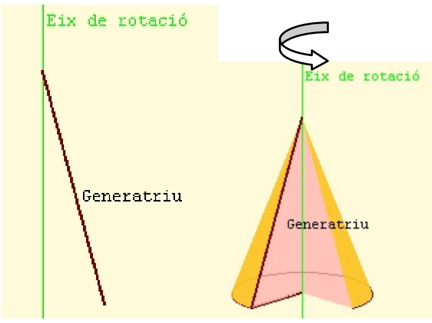


Desenvolupament del cilindre

3. Cossos rodons

Con.

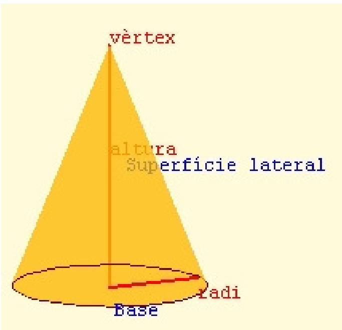
Un **con recte** és un cos de revolució que s'obté en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels catets. La recta en la qual se situa el costat sobre el que gira s'anomena **eix de rotació** i la hipotenusa és la **generatriu**.



Generació del con

En un con distingim la **superfície lateral** i la **base** que és un cercle. El punt on convergeixen les generatrius és el **vèrtex.**

L'altura del con recte és la distància del vèrtex a la base.



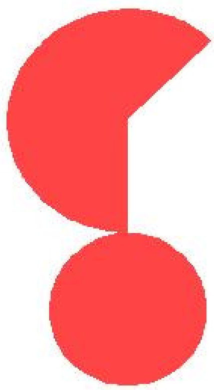
Elements del con

Desenvolupament del con.

Un con és un sòlid de revolució que es pot desenvolupar en el pla.

El desenvolupament de la seva cara lateral és un sector circular i la base és un cercle.

El radi del sector circular és la generatriu del con i la longitud del seu arc és el perímetre de la base: 2πr, on r és el radi d'aquesta.



Desenvolupament del con

Investiga

Com seria el desenvolupament d'un con inclinat?

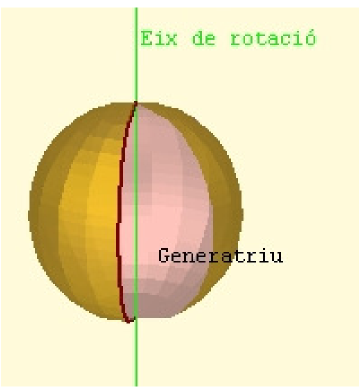
Pots consultar en els continguts del "Proyecto: El metro", en concret mira l'objecte 48: "Conos generalizados".

http://descartes.cnice.mec.es/web_HEDA/Elmetro/

Esfera.

L'esfera és un cos de revolució que s'obté en girar un semicercle (o un cercle) al voltant del diàmetre. La recta en la qual se situa aquest, és l'eix de revolució i la semicircumferència la generatriu.

La superfície esfèrica **no és desenvolupable** en el pla.



Generació de l'esfera

Preguntes tipus test sobre cossos rodons resoltes

1. Un con:
- a. No té base.
- b. Té dues bases.
- c. Té una base.

c) Un con té una base que és un cercle.

2. Un con:
- a. No té cap vèrtex.
- b. Té diversos vèrtexs.
- c. Té un vèrtex.

c) És el punt on convergeixen les generatrius.

3. Un cilindre s'obté en girar:
- a. Una circumferència al voltant d'un diàmetre.
- b. Un triangle rectangle al voltant d'un catet.
- c. Un rectangle al voltant d'un costat.

c) Un cilindre recte és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

4. El desenvolupament de la cara lateral del cilindre és:
- a. Dos cercles
- b. Un sector circular
- c. Un rectangle

c) un rectangle la base del qual té per longitud el perímetre del cercle de les bases: $2\pi r$, i d'altura la del cilindre.

5. La generatriu del con:
- a. És més gran que la seva altura.
- b. És igual que la seva altura.
- c. És menor que la seva altura

a) L'altura és un catet d'un triangle rectangle, la generatriu és la hipotenusa i, per tant, més gran.

6. Un cilindre:
- a. No té base.
- b. Té dues bases.
- c. Té una base.

b) Un cilindre té dues bases que són cercles.

7. Un cilindre:
- a. No és un poliedre.
- b. Segons es miri pot ser un poliedre.
- c. Sí és un poliedre.

a) En un poliedre les cares són polígons. Les bases del cilindre són cercles, que no són polígons.

8. En augmentar el radi d'un con:
- a. No varia el sector circular del seu desenvolupament lateral.
- b. Disminueix el sector circular del seu desenvolupament lateral.
- c. Augmenta el sector circular del seu desenvolupament lateral.

c) La longitud de l'arc és el perímetre de la base: $2\pi r$, on r és el radi d'aquesta.

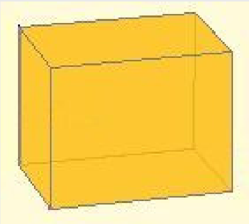
EXERCICIS resolts

Prismes, piràmides, poliedres regulars, relació d'Euler

Sobre PRISMES

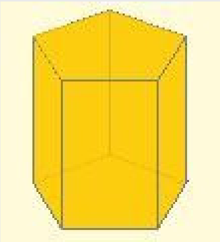
1.1 Dibuixa un prisma recte de base rectangular

En ser un prisma recte les cares laterals són rectangles i donat que les bases són també rectangles, el prisma demanat és el de la figura: un ortoedre



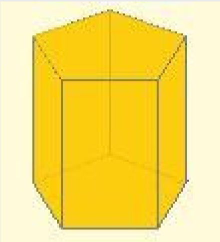
1.2 El nombre d'arestes d'un prisma és 15. Quin polígon són les bases?

El nombre d'arestes d'un prisma és sempre el triple de les arestes de cada base. Si són 15, aleshores cada base en té 5. El prisma és pentagonal.



1.3 Si un prisma té 10 vèrtexs, quin polígon té a les bases?

El nombre de vèrtexs d'un prisma és sempre el doble dels vèrtexs de cada base. Si són 10, aleshores cada base en té 5. El prisma és pentagonal.



Sobre PIRÀMIDES

2.1 Dibuixa una piràmide hexagonal regular

Una piràmide hexagonal té per base un hexàgon amb els costats iguals. Les cares laterals seran triangles isòsceles. La piràmide demanada és la de la figura, si bé pot tenir l'altura que vulguis.

EXERCICIS resolts (continuació)

2.2 Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 5 vèrtexs.

Una piràmide té sempre un vèrtex més que vèrtexs té la base. Si en total en té 5, la base en té 4. És una piràmide quadrangular.

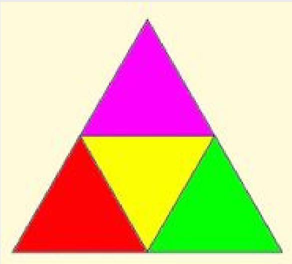
2.3. Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 12 arestes.

Una piràmide té el doble d'arestes que costats té la base. Si en total té 12 arestes, la base és un hexàgon. És una piràmide hexagonal.

Sobre POLIEDRES REGULARS

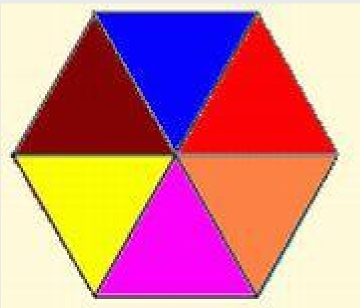
3.1 Dibuixa el desenvolupament d'un tetraedre de 3 cm de costat.

Un tetraedre té quatre cares que són triangles equilàters. A la figura tens el seu desenvolupament pla.



3.2. Pot existir un poliedre regular amb 6 triangles equilàters en cada vèrtex?

No. Fixa't en la figura. Si en un vèrtex incideixen 6 triangles equilàters no podrem doblegar-los per formar un poliedre. No tenim marge per construir un angle poliedre.



EXERCICIS resolts (continuació)

Sobre la RELACIÓ D'EULER

4.1 Un poliedre eulerià, pot tenir el mateix nombre de cares que d'arestes?

No és possible. Si és un poliedre eulerià, compleix la relació d'Euler:

Cares + Vèrtexs = Arestes + 2.

Si el nombre de cares és igual al d'arestes, aleshores el número de vèrtexs hauria de ser 2. Un poliedre de 2 vèrtexs?

4.2. Comprova que es compleix la relació d'Euler en un prisma la base del qual és un heptàgon.

En un prisma heptagonal la base té set vèrtexs, per tant:

a) Un prisma té el doble de vèrtexs que la base, per tant, 14 vèrtexs.

b) Un prisma té el triple d'arestes que vèrtexs té la base, per tant, té 21 arestes.

c) Un prisma té dues cares més (les bases) que vèrtexs té la seva base, per tant, en té 9.

Així doncs, a la relació d'Euler

Cares + Vèrtexs = Arestes + 2, tenim que:

9 + 14 = 23 + 2 = 23.

Per tant, es verifica la relació d'Euler.

Sòlids de revolució, cilindre, con i esfera

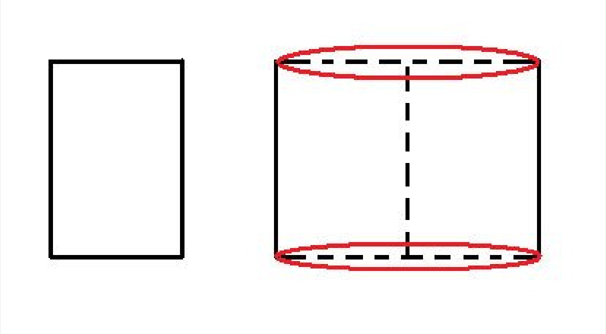
Sobre SÒLIDS DE REVOLUCIÓ

1.1 El cartró d'un rotlle de paper té un diàmetre de 4,6 cm i una altura de 9,7 cm Quines dimensions té el desenvolupament pla del cartró?

El desenvolupament pla és un rectangle. Les seves dimensions seran:
Altura: l'altura del rotlle (cilindre): 9,7 cm.
Amplada: el perímetre de la circumferència: diàmetre·π = 4,6·π.
Si aproximem π per 3,14, obtindrem que l'amplada serà aproximadament 14,44 cm.

1.2 Quina figura de l'espai es genera en fer girar el rectangle inferior al voltant del seu costat dret?

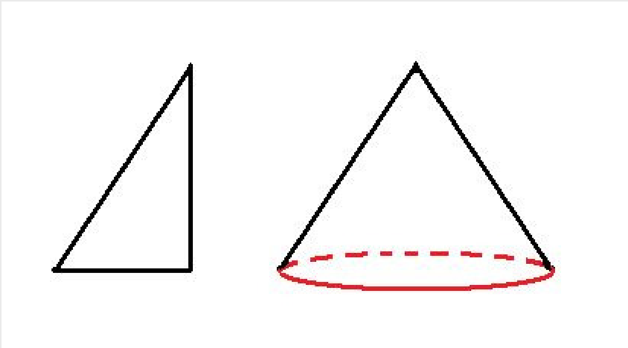
Solució: És un cilindre



EXERCICIS resolts (continuació)

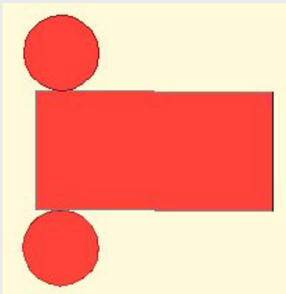
1.3. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el triangle dibuixat a sota al voltant de la seva altura?

Solució: És un con



Sobre CILINDRES

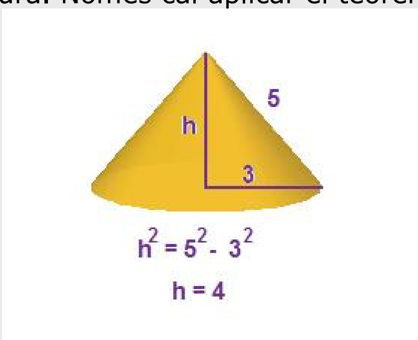
2.1. Dibuixa el desenvolupament d'un cilindre de 2 cm de radi i 7 cm d'altura.



El rectangle té 7 cm d'altura i de base 2·π·radi cm
El cercle 4 cm de diàmetre

Sobre CONS

3.1. Calcula l'altura d'un con si la generatriu mesura 5 cm i el radi de la base en mesura 3.
A la figura està calculada l'altura. Només cal aplicar el teorema de Pitàgores.



Sobre ESFERES

4.1 Dibuixa el desenvolupament pla de la superfície esfèrica.
No és possible. La superfície esfèrica no és desenvolupable. Si agafes un tros prou gran de la pell d'una taronja i el recolzes a la taula veuràs que en aixafar-lo, es trenca.

Per a practicar

Prismes, piràmides, poliedres regulars, Euler

Exercicis sobre prismes

1.1. Dibuixa un prisma oblic de base triangular.

1.2. El nombre de vèrtexs d'un prisma és 20, quantes cares té?

1.3. Un prisma té 18 arestes. Quin polígon són les bases?

1.4. Un prisma té 9 cares. Per tant, és un prisma…

1.5. Un prisma té 15 vèrtexs, per tant, les bases són…

Exercicis sobre piràmides

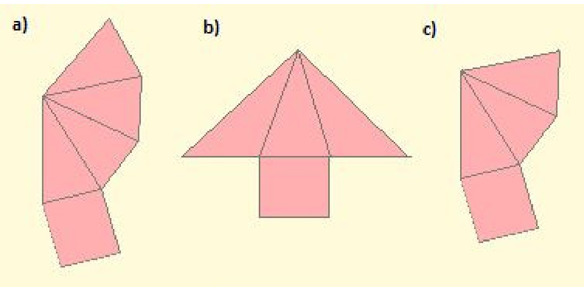
2.1. Dibuixa una piràmide irregular de base triangular.

2.2. Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 5 cares laterals.

2.3. Esbrina el polígon de la base d'una piràmide si té 8 cares.

2.4. Dibuixa el desenvolupament pla d'una piràmide que té totes les seves cares iguals.

2.5. Quina de les figures següents és el desenvolupament pla d'una piràmide?



Exercicis sobre poliedres regulars

3.1. Dibuixa el desenvolupament d'un octaedre de 2 cm de costat.

3.2. Dibuixa el desenvolupament pla d'un cub de 4 cm de costat.

3.3. Pot existir un poliedre regular les cares del qual siguin octògons?

3.4. Quants costats poden tenir com a màxim les cares d'un poliedre regular?

3.5. Quantes cares triangulars poden incidir en un vèrtex d'un polígon regular?

3.6. Quantes cares quadrades poden incidir en un vèrtex d'un polígon regular?

Exercicis sobre la relació d'Euler

4.1 Un poliedre eulerià, pot tenir el mateix nombre de vèrtexs que d'arestes?

4.2. Comprova que es compleix la relació d'Euler en una piràmide la base del qual és un octògon.

4.3. Comprova que es compleix la relació d'Euler en l'icosaedre.

4.4. Comprova que es compleix la relació d'Euler en el dodecaedre.

4.5. Un poliedre eulerià té 20 cares i 36 vèrtexs. Quantes arestes té?

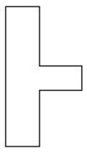
4.6. Un poliedre eulerià té 21 cares i 40 arestes. Quants vèrtexs té?

Per a practicar

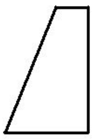
Sòlids de revolució, cilindres, cons, esferes.

Sobre sòlids de revolució

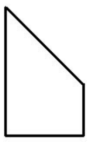
1.1. Dibuixa el cos de revolució que forma la figura de sota en girar al voltant del segment lateral esquerra.



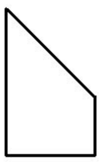
1.2. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat dret?



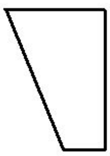
1.3. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat dret?



1.4. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat esquerra?



1.5. Quina figura de l'espai es genera en fer girar el trapezi dibuixat a sota al voltant del seu costat dret?



Sobre cilindres

2.1. Pot ser el desenvolupament pla de la figura inferior, el corresponent a un cilindre?

2.2. Si agafem un rectangle, s'obté el mateix cilindre si el pleguem per la base que per l'altura?

2.3. Volem construir un pot cilíndric que tingui 7 cm d'altura i el radi de la base mesuri 1,5 cm. Dibuixa el seu desenvolupament pla.

Sobre cons

3.1 Dibuixa el desenvolupament pla d'un con amb radi de la base 5 cm i de generatriu 10 cm.

3.2. Agafem un triangle de base 4 cm i altura 8 cm. En fer-lo girar al voltant de l'altura obtenim un con. Quant mesura la generatriu?

3.3. El desenvolupament pla de la cara lateral d'un con, pot ser un cercle complet?

Sobre esferes

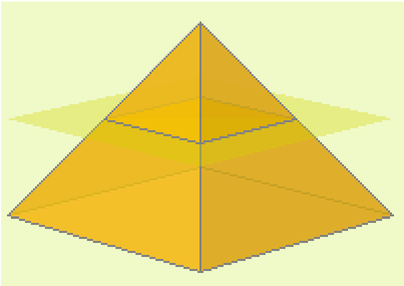
4.1. En fer girar un quart de cercle al voltant d'un dels radis que el limiten, quina figura obtenim?

4.2. En fer girar un cercle al voltant d'un eix exterior a ell, quina figura obtenim?

4.3. Quina forma tenen les gotes d'aigua?

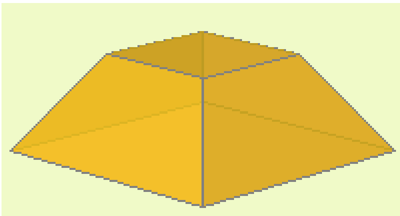
Per a saber-ne més

Tronc de piràmide i tronc de con

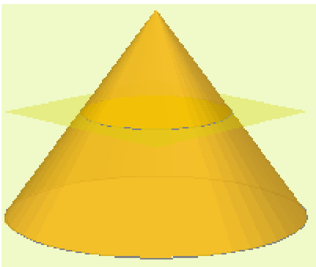


Si una piràmide la tallem amb un pla paral·lel a la base, obtenim una altra piràmide i un altre poliedre anomenat:

tronc de piràmide

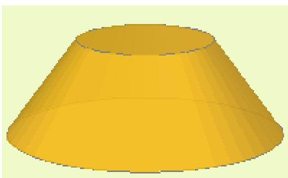


El tronc de piràmide té dues bases que són polígons semblants i les cares laterals són trapezis si la piràmide és recta o quadrilàters si és obliqua



Si un con el tallem amb un pla paral·lel a la base, obtenim un altre con i un altre sòlid de revolució anomenat:

tronc de con



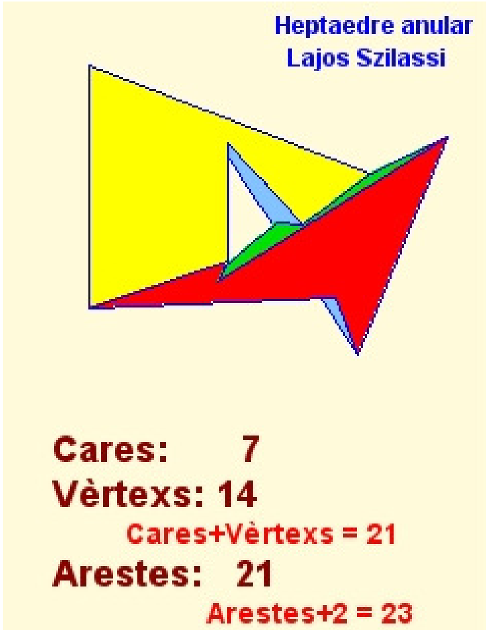
El tronc de con té dues bases que són cercles i una cara lateral que té per desenvolupament un sector d'una corona circular

Poliedres no Eulerians

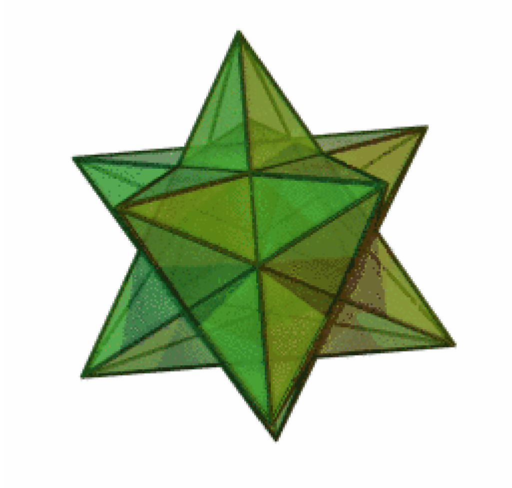
Hi ha poliedres que no compleixen la relació d'Euler:

Cares + Vèrtexs = Arestes +2

Són poliedres que tenen "forats".



Poliedres regulars còncaus



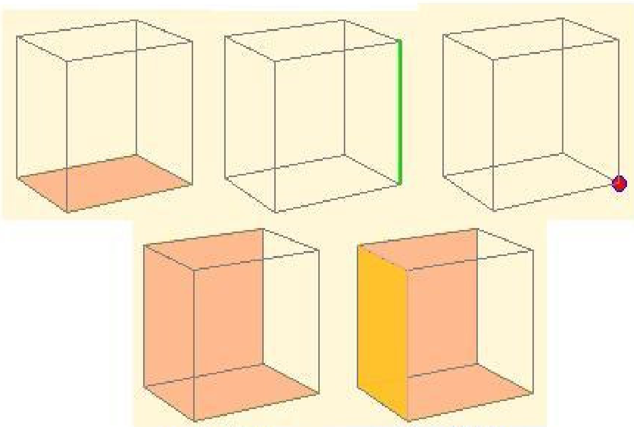
Un poliedre còncau es diu que és regular si totes les seves cares són polígons regulars i en cada vèrtex concorren el mateix nombre de cares. Se'ls anomena **sòlids de Kepler-Poinsot**.

Recorda el més important

Un poliedre és un cos geomètric tridimensional les cares del qual són polígons.

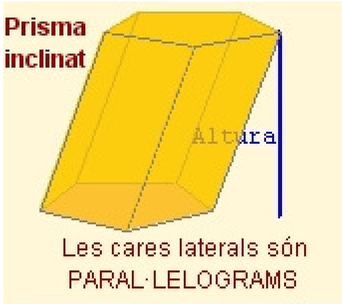
Elements d'un poliedre

cares **arestes** **vèrtexs**

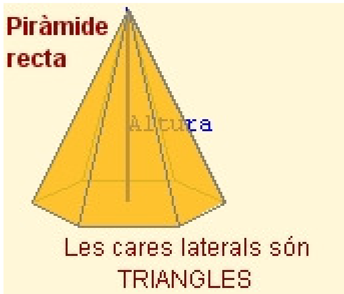


angle diedre **angle poliedre**

Tipus de poliedres.



Prismes



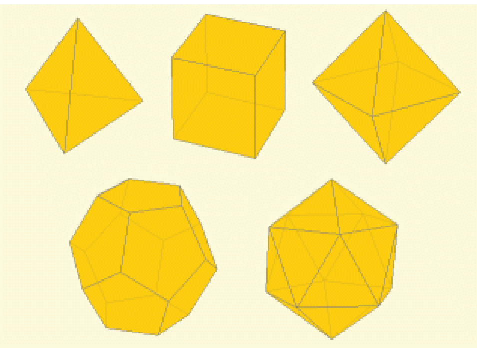
Piràmides

Poliedres regulars

Un poliedre és regular si totes les seves cares són iguals i sobre cada vèrtex incideixen el mateix nombre de cares i d'arestes.

Els poliedres regulars són cinc

Tetraedre **Cub** **Octaedre**



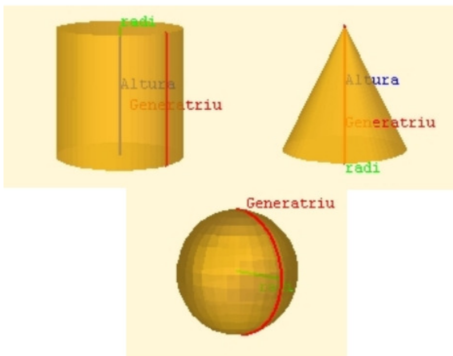
Dodecaedre **Icosaedre**

Relació d'Euler

Cossos rodons

Cilindre, con i esfera són cossos de revolució

Cilindre **Con**



Esfera

Autoavaluació

1. Un prisma hexagonal, quants vèrtexs té?

2. Una piràmide pentagonal, quants vèrtexs té?

3. Un prisma triangular, quantes arestes té?

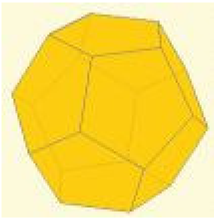
4. Una piràmide heptagonal, quantes arestes té?

5. Un poliedre convex té 4 cares i 5 vèrtexs, quantes arestes té?

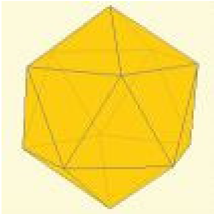
6. Un poliedre convex té 9 cares i 18 arestes, quants vèrtexs té?

7. El poliedre regular de 6 vèrtexs, quin és?

8. El poliedre regular convex de 12 cares, quin és?



9. Com s'anomena el poliedre representat en aquesta figura?

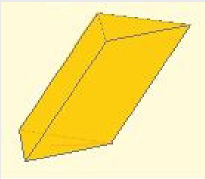


10. Indica si el sòlid de la figura és desenvolupable.

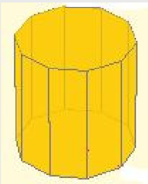
Solucions dels exercicis per a practicar

PRISMES

1.1 En ser un prisma les cares laterals són paral·lelograms. Les bases són triangles i al ser oblic han d'estar desplaçades.

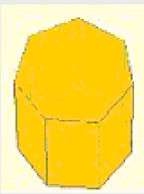


1.2. El nombre de vèrtexs d'un prisma és sempre el doble dels vèrtexs de cada base. El prisma és decagonal i, per tant, té 12 cares.



1.3 El nombre d'arestes d'un prisma és sempre el triple de les arestes de cada base. El prisma és hexagonal.

1.4 El nombre de cares d'un prisma és el nombre de costats de la base més dos. És un prisma heptagonal.



1.5 No hi ha cap prisma que pugui tenir un nombre senar de vèrtexs.

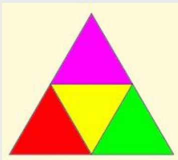
PIRÀMIDES

2.1

2.2 Una piràmide té tantes cares laterals com costats té la base. És una piràmide pentagonal.

2.3 Una piràmide té sempre una cara més que costats té la base. És una piràmide heptagonal.

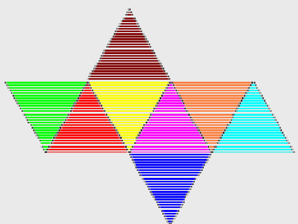
2.4 L'única piràmide triangular amb totes les cares iguals és el tetraedre.



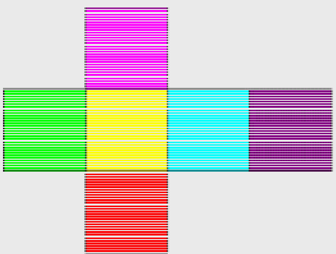
2.5 Si la base és rectangular, ha de tenir quatre cares que siguin triangles. L'única opció és la **a)**.

POLIEDRES REGULARS

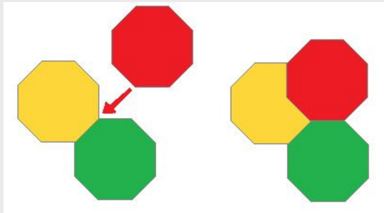
3.1 Un tetraedre té vuit cares que són triangles equilàters.



3.2

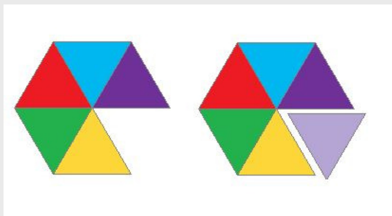


3.3 Per formar un angle poliedre fan falta al menys tres cares. Si volem que hi hagi tres cares que siguin octògons se superposen. No és possible.

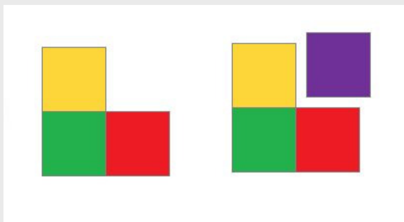


3.4 El nombre màxim de costats és cinc ja que a partir de l'hexàgon no és possible construir un angle poliedre. Per això, només hi ha poliedres regulars amb les cares triangulars, quadrades i pentagonals.

3.5 El nombre màxim de cares triangulars és cinc; un sisè triangle ja no permet construir un angle poliedre. Amb tres triangles es forma el tetraedre, amb quatre l'octaedre i amb cinc l'icosaedre.



3.6 El nombre màxim de cares quadrades és tres; amb un quart quadrat ja no es pot construir un angle poliedre. Amb tres quadrats es forma el cub.



RELACIÓ D'EULER

4.1 No és possible. Si és un poliedre eulerià, compleix la relació d'Euler:

Cares + Vèrtexs = Arestes + 2. Si el nombre de vèrtexs és igual al d'arestes, aleshores el nombre de cares hauria de ser 2. Un poliedre de 2 cares?

4.2 Aplicant la relació d'Euler Cares + Vèrtexs = Arestes + 2, tenim que:

9 + 9 = 18 i 16 + 2 = 18.

4.3 L'icosaedre té 20 cares, 12 vèrtexs i 30 arestes.

Així, amb la relació d'Euler Cares + Vèrtexs = Arestes + 2, tenim que:

20 + 12 = 32 i 30 + 2 = 32.

4.4 El dodecaedre té 12 cares, 20 vèrtexs i 30 arestes.

Així, amb la relació d'Euler Cares + Vèrtexs = Arestes + 2, tenim que:

12 + 20 = 32 i 30 + 2 = 32.

4.5 Si C + V = A + 2, tenim que:

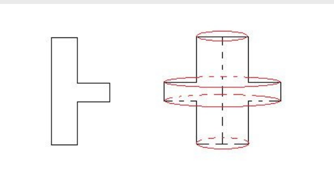
20 + 36= Arestes + 2. Per tant, Arestes = 20 + 36 - 2 = 54. Té 54 arestes.

4.6 Si C + V = A + 2, tenim que:

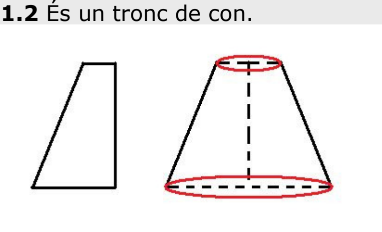
21 + Vèrtexs = 40 + 2. Per tant, Vèrtexs = 40 + 2 - 21 = 21. Té 21 vèrtexs.

SOBRE SÒLIDS DE REVOLUCIÓ

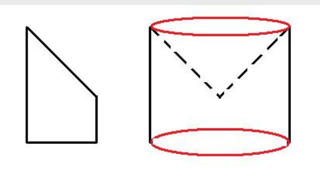
1.1



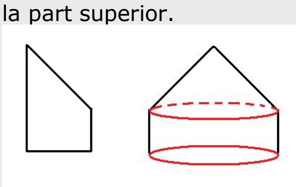
1.2 És un tronc de con.



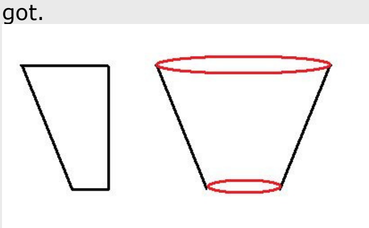
1.3 Un cilindre al qual li hem tret un con en la part superior.



1.4 Un cilindre amb un con en la part superior.



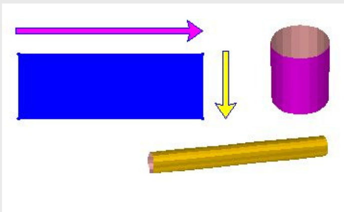
1.5 Un tronc de con, que per la seva orientació té la forma d'un got.



SOBRE CILINDRES

2.1 No és possible. La longitud de la base del rectangle ha de coincidir amb la longitud de la circumferència de la base del cilindre i està clar que la de la figura és menor.

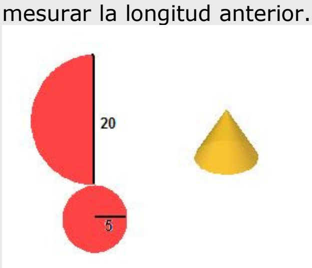
2.2 No, el cilindre és diferent llevat de que l'altura i la base del rectangle siguin la mateixa, és a dir, que de fet sigui un quadrat.



2.3 L'altura del rectangle és 7 cm i la base és la longitud de la circumferència de la base del cilindre: 2·π·radi, essent aquí el radi 1,5 cm. Hauràs d'aproximar el valor de π.

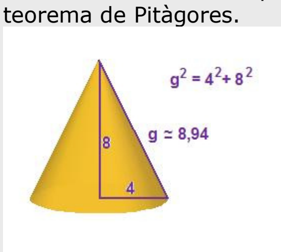
SOBRE CONS

3.1 Donat que el radi de la base és 5, la longitud de la circumferència és 2·π·5. La cara lateral del con és un sector circular l'arco del qual ha de mesurar la longitud anterior.

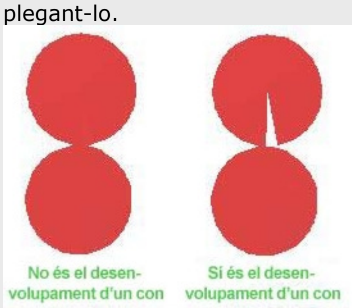


La generatriu és el radi del sector que s'ha de dibuixar. Donat que aquest radi és 10, 2·π·5 és justament la meitat, per tant, cal dibuixar mig cercle de radi 10.

3.2 A la figura està calculada l'altura. Només cal aplicar el teorema de Pitàgores.

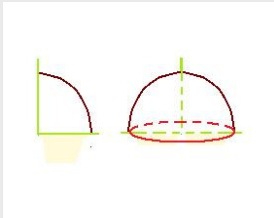


3.3 No, no és possible. Cal que falti almenys un tros perquè puguem construir la cara lateral plegant-lo.

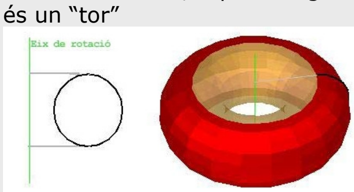


SOBRE ESFERES

4.1 S'obté una semiesfera.



4.2 S'obté el cos que col·loquialment identifiquem com a un "donut". Matemàticament, aquesta figura és un "tor"



4.3 Són esfèriques.

Solucions de l'AUTOAVALUACIÓ

1. Un prisma hexagonal, quants vèrtexs té? **12 vèrtexs**.

2. Una piràmide pentagonal, quants vèrtexs té? **6 vèrtexs**

3. Un prisma triangular, quantes arestes té? **9 arestes**

4. Una piràmide heptagonal, quantes arestes té? **14 arestes.**

5. Un poliedre convex té 4 cares i 5 vèrtexs, quantes arestes té? **7 arestes**

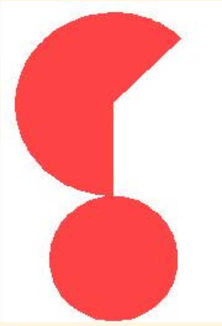
6. Un poliedre convex té 9 cares i 18 arestes, quants vèrtexs té? **11 vèrtexs**

7. Un poliedre regular de 6 vèrtexs, quin és? **Octaedre**

8. El poliedre regular convex de 12 cares, quin és? **Dodecaedre**

9. Com s'anomena el poliedre representat en aquesta figura? **Icosaedre**

10. Indica si el sòlid de la figura és desenvolupable. **Sí**



No oblidis enviar les activitats al tutor.

9

Àrees de cossos geomètrics

Objectius

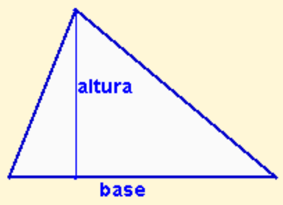
En aquesta quinzena aprendràs a:

- Calcular l'àrea de prismes rectes de qualsevol nombre de cares.
- Calcular l'àrea de piràmides de qualsevol nombre de cares.
- Calcular l'àrea d'un tronc de piràmide.
- Calcular l'àrea d'un cilindre.
- Calcular l'àrea d'un con.
- Calcular l'àrea d'un tronc de con.
- Calcular l'àrea d'una esfera.
- Calcular l'àrea de cossos geomètrics obtinguts per la composició de tot o part dels cossos anteriors.

Abans de començar

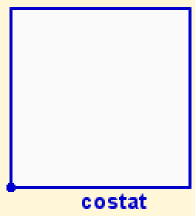
Recorda l'àrea de les figures planes

Triangle



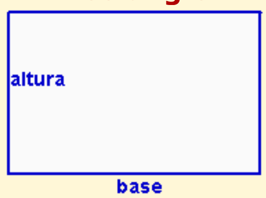
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Quadrat



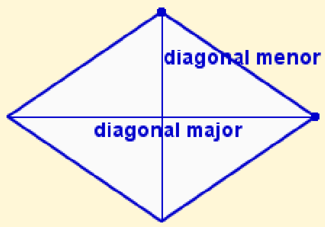
$$A = \text{costat} \cdot \text{costat} = \text{costat}^2$$

Rectangle



$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Rombe

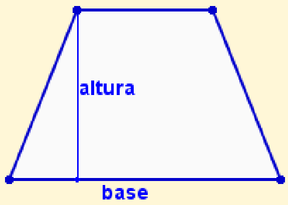


$$A = \frac{\text{diagonal major} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$$

Romboide

$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Trapezi



$$A = \frac{(\text{base major} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2}$$

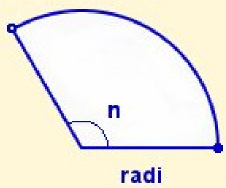
Polígon regular

$$A = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Cercle

$$A = \pi \cdot \text{radi}^2$$

Sector circular



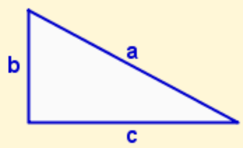
$$A = \frac{\pi \cdot \text{radi}^2 \cdot \text{nombre graus}}{360}$$

Investiga: Teorema de Pitàgores en cossos geomètrics

En la Unitat 7 has estudiat el Teorema de Pitàgores i has vist aplicacions d'aquest teorema en figures planes.

En aquesta unitat necessites recordar-lo i veuràs aplicacions en cossos geomètrics. En la piràmide, en el tronc de piràmide, en el con i en el tronc de con necessitaràs construir triangles rectangles per a calcular les arestes, l'alçada o la generatriu.

En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Àrees de cossos geomètrics

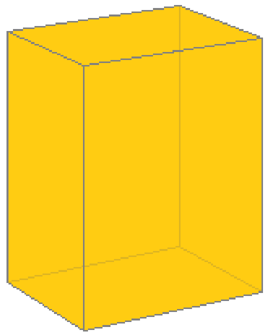
1. Àrea dels prismes

Àrea dels prismes

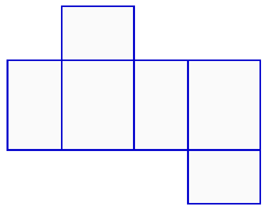
L'**àrea** d'un prisma o de qualsevol poliedre, és la suma de les àrees de cadascuna de les seves cares. Podem distingir:

Àrea lateral: Suma de les àrees de les cares laterals. En el prisma les cares laterals són rectangles.

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea de les dues bases. Las bases són dos polígons iguales.



Paral·lelepípede:
prisma rectangular recte.



Desenvolupament d'un paral·lelepípede: s'obtenen sis rectangles iguals dos a dos. Les cares oposades són iguals.

Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un paral·lelepípede de 25 cm d'alçada, 15 cm d'amplada i 10 cm de llargada.

Àrea lateral:

Hi ha dos rectangles de 25 per 15: $A=25\cdot 15=375\ cm^2$

Hi ha dos rectangles de 25 per 10: $A=25\cdot 10=250\ cm^2$

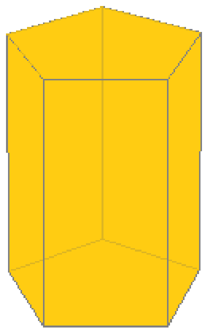
L'àrea lateral és: **$Al = 2 \cdot 375 + 2 \cdot 250 = 1250\ cm^2$**

Àrea total:

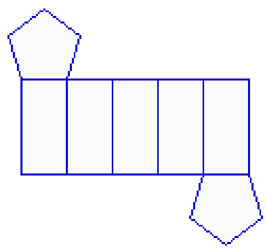
Les bases són dos rectangles de 15 por 10:

$$A = 25 \cdot 15 = 375\ cm^2$$

L'àrea total és: **$At = 1250 + 2 \cdot 150 = 1550\ cm^2$**



Prisma pentagonal.



Desenvolupament d'un prisma pentagonal:
s'obtenen dos pentàgons de les bases i cinc rectangles iguals de les cares laterals.

Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un prisma pentagonal de 30 cm d'alçada i 12 cm d'aresta de la base. L'apotema de la base fa 8,26 cm.

Àrea lateral:

Hi ha cinc rectangles de 30 per 12: $30 \cdot 12 = 360\ cm^2$

L'àrea lateral és: **$Al = 5 \cdot 360 = 1800\ cm^2$**

Àrea total:

Les bases són dos pentàgons de 12 cm de costat i 8,26 cm d'apotema:

$$Ab = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 8{,}26}{2} = 247{,}8\ cm^2$$

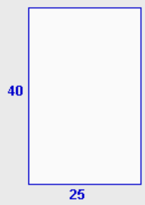
L'àrea total és: **$At = 1800 + 2 \cdot 247{,}8 = 2295{,}6\ cm^2$**

EXERCICIS resolts

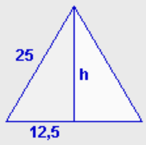
1. Calcular l'àrea lateral i l'àrea total d'un prisma triangular de 40 centímetres d'altura i 25 centímetres d'aresta de la base.

Àrea lateral: hi ha tres rectangles iguals:

$Al = 3 \cdot 40 \cdot 25 = 3000 \text{ cm}^2$



Àrea de la base: un triangle equilàter.
S'aplica el Teorema de Pitàgores

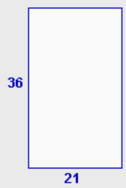


$$h = \sqrt{25^2 - 10{,}5^2} = \sqrt{468{,}75} = 21{,}65 \text{ cm}$$

$$Ab = \frac{25 \cdot 21{,}65}{2} = 270{,}63 \text{ cm}^2$$

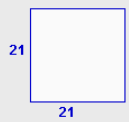
Àrea total: $At = 3000 + 2 \cdot 270{,}63 = 3541{,}27 \text{ cm}^2$

2. Calcular l'àrea lateral i l'àrea total d'un prisma de base quadrada de 36 centímetres d'altura i 21 centímetres d'aresta de la base.



Àrea lateral: hi ha quatre rectangles iguals:

$Al = 4 \cdot 36 \cdot 21 = 3024 \text{ cm}^2$



Àrea de la base: un quadrat

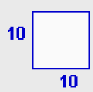
$Ab = 21^2 = 441 \text{ cm}^2$

Àrea total: $At = 3024 + 2 \cdot 441 = 3906 \text{ cm}^2$

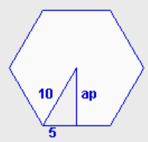
3. Calcular l'àrea lateral i l'àrea total d'un prisma hexagonal de 10 centímetres d'altura i 10 centímetres d'aresta de la base.

Àrea lateral: hi ha sis rectangles iguals (en aquest cas particular són quadrats):

$Al = 6 \cdot 10 \cdot 10 = 600 \text{ cm}^2$



Àrea de la base: un hexàgon regular
S'aplica el Teorema de Pitàgores



$$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ cm}$$

$$Ab = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}81 \text{ cm}^2$$

Àrea total: $At = 600 + 2 \cdot 259{,}81 = 1119{,}62 \text{ cm}^2$

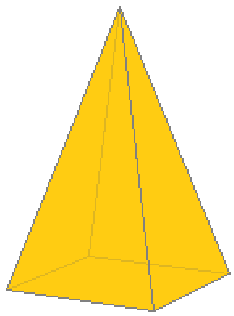
2. Àrea de la piràmide i del tronc de piràmide

Àrea de la piràmide

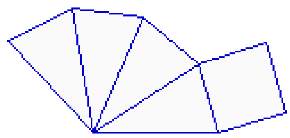
En desenvolupar una piràmide s'obtenen la base que és un polígon i les cares laterals que són triangles.

Àrea lateral: Suma de les àrees de les cares laterals.

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea de la base. La base és un polígon qualsevol, regular o no. (Aquí treballarem amb bases que són polígons regulars).



Piràmide de base quadrada

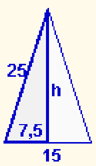


Desenvolupament d'una piràmide de base quadrada: s'obtenen quatre triangles isòsceles iguals i un quadrat.

Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'una piràmide de base quadrada de 25 cm d'aresta lateral i 15 cm d'aresta de la base.

Àrea lateral:

Hi ha quatre triangles de 15 cm de base. Es necessita calcular l'altura:



$$h = \sqrt{25^2 - 7{,}5^2} = \sqrt{568{,}75} = 23{,}85 \text{ cm}$$

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{15 \cdot 23{,}85}{2} = 178{,}86 \text{ cm}^2$$

L'àrea lateral és:

$Al = 4 \cdot 178{,}86 = 715{,}45$ cm²

Àrea total:

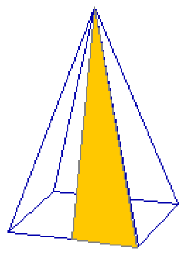
La base és un quadrat de 15 cm de costat:

$$Ab = 15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$$

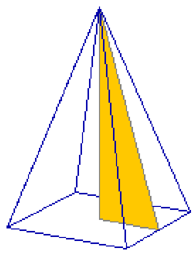
L'àrea total és:

$At = 715{,}45 + 225 = 940{,}45$ cm²

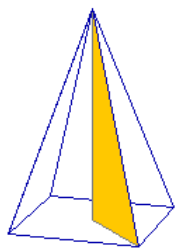
En una piràmide de base quadrada:



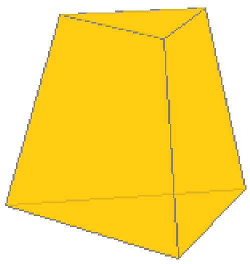
L'aresta lateral, l'altura d'una cara i la meitat de l'aresta de la base formen un triangle rectangle, essent la hipotenusa l'aresta lateral.



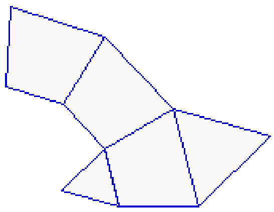
L'altura de la piràmide, l'altura d'una cara i la meitat de l'aresta de la base formen un triangle rectangle, essent la hipotenusa l'altura d'una cara.



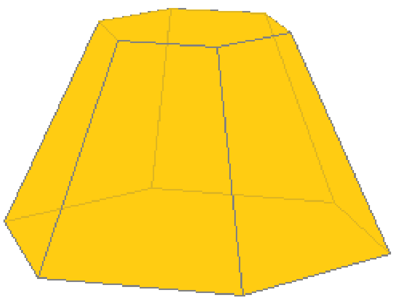
L'altura de la piràmide, l'aresta lateral i la meitat de la diagonal de la base formen un triangle rectangle, essent la hipotenusa l'aresta lateral.



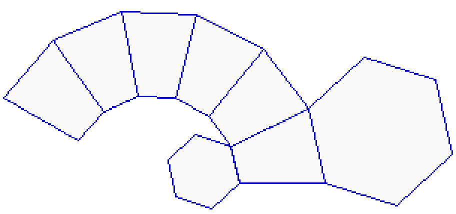
Tronc de piràmide triangular



Desenvolupament d'un tronc de piràmide triangular: s'obtenen tres trapezis isòsceles i dos triangles equilàters.



Tronc de piràmide hexagonal



Desenvolupament d'un tronc de piràmide hexagonal: s'obtenen sis trapezis isòsceles i dos hexàgons.

Àrea del tronco de pirámide

En desenvolupar un tronc de piràmide s'obtenen dues bases que són polígons semblants i les cares laterals que són trapezis. Si el tronc procedeix d'una piràmide regular, les bases són polígons regulars i les cares laterals trapezis isòsceles iguals.

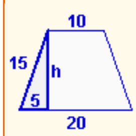
Àrea lateral: Suma de les àrees de les cares laterals.

Àrea total: És la suma de l'àrea lateral i l'àrea de les dues bases.

Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un tronc de piràmide triangular de 15 cm d'aresta lateral, 10 cm d'aresta de la base menor i 20 cm d'aresta de la base major.

Àrea lateral:

Hi ha tres trapezis isòsceles de 10 cm de base menor i 20 cm de base major. Es necessita calcular l'altura:



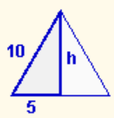
$$h = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(20+10)\cdot 14{,}14}{2} = 212{,}13 \text{ cm}^2$$

L'àrea lateral és: **Al = 3 · 212,13 = 636,40 cm^2**

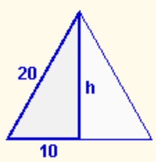
Àrea total:

Les bases són dos triangles equilàters:



$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ cm}$$

$$Ab = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 43{,}30 \text{ cm}^2$$



$$h = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 17{,}32 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{20 \cdot 17{,}32}{2} = 173{,}21 \text{ cm}^2$$

L'àrea total és:

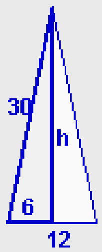
At = 636,40 + 43,30 + 173,21 = 852,90 cm^2

EXERCICIS resolts

4. Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'una piràmide hexagonal de 30 cm d'aresta lateral i 12 cm d'aresta de la base.

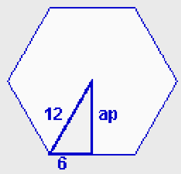
Àrea lateral: hi ha sis triangles iguals:

$$h=\sqrt{30^2-6^2}=\sqrt{864}=29,39\text{ cm}$$



$$A=\frac{25\cdot 29,39}{2}=176,36\text{ cm}^2$$

$$Al = 6 \cdot 176,36 = 1058,18\text{ cm}^2$$



Àrea de la base: un hexàgon regular.
Es calcula l'apotema:

$$ap=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}=10,39\text{ cm}$$

$$Ab=\frac{P\cdot ap}{2}=\frac{6\cdot 12\cdot 10,39}{2}=374,12\text{ cm}^2$$

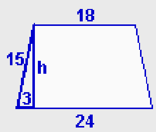
Àrea total: $At = 1058,18 + 374,12 = 1432,30\text{ cm}^2$

5. Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un tronc de piràmide pentagonal de 15 cm d'aresta lateral i 18 i 24 cm d'arestes de les bases respectivament. Les apotemes de les bases mesuren 12,39 y 16,52 cm respectivament.

Àrea lateral: hi ha cinc trapezis isòsceles:

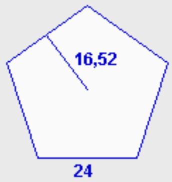
$$h=\sqrt{15^2-3^2}=\sqrt{216}=14,70\text{ cm}$$

$$A=\frac{(24+18)\cdot 14,70}{2}=308,64\text{ cm}^2$$



$$Al = 5 \cdot 308,64 = 1543,18\text{ cm}^2$$

Àrea de les bases: són dos pentàgons regulars.

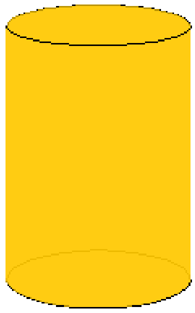


$$Ab=\frac{P\cdot ap}{2}=\frac{5\cdot 18\cdot 12,39}{2}=557,55\text{ cm}^2$$

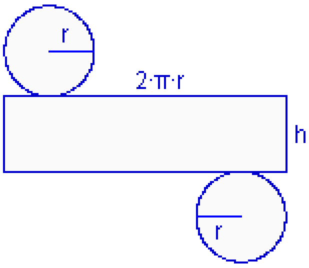
$$AB=\frac{P\cdot ap}{2}=\frac{5\cdot 24\cdot 16,52}{2}=991,20\text{ cm}^2$$

Àrea total: $At = 1543,18 + 557,55 + 991,20 = 3091,93\text{ cm}^2$

3. Àrea dels cossos de revolució



Cilindre



Desenvolupament d'un cilindre: s'obté un rectangle i dos cercles.

Àrea d'un cilindre

El desenvolupament d'un cilindre es compon de dos cercles, que són les bases, i un rectangle de base la longitud de la circumferència i d'altura la del cilindre.

Àrea lateral: **$Al=2\cdot\pi\cdot r\cdot h$**

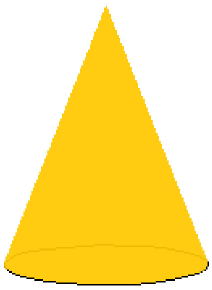
Àrea total: **$At=2\cdot\pi\cdot r\cdot h+ 2\cdot\pi\cdot r^2$**

Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un cilindre de 25 cm d'altura, i de 15 cm de radi de la base.

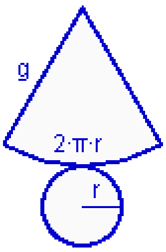
Àrea lateral: $Al = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h = 2\cdot\pi\cdot 15\cdot 25 = 2356{,}19\ cm^2$

Àrea de la base: $Ab = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 225 = 706{,}86\ cm^2$

L'àrea total és: **$At=2356{,}19+2\cdot 706{,}86=3769{,}91\ cm^2$**



Con



Desenvolupament d'un con: s'obté un sector circular i un cercle.

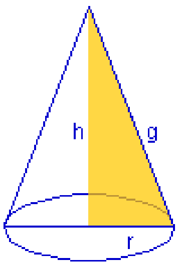
Àrea d'un con

El desenvolupament d'un con es compon del cercle de la base i d'un sector circular que té per longitud d'arc la longitud de la circumferència, i per radi la generatriu del con.

Àrea lateral: **$Al=\pi\cdot r\cdot g$**

Àrea total: **$At=\pi\cdot r\cdot g+\pi\cdot r^2$**

En un con:



La generatriu, l'altura i el radi de la base formen un triangle rectangle, essent la hipotenusa la generatriu.

Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un con de 30 cm de generatriu i de 16 cm de radi de la base.

Àrea lateral: $Al = \pi\cdot r\cdot g = \pi\cdot 16\cdot 30 = 1507{,}96\ cm^2$

Àrea de la base: $Ab = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 256 = 804{,}25\ cm^2$

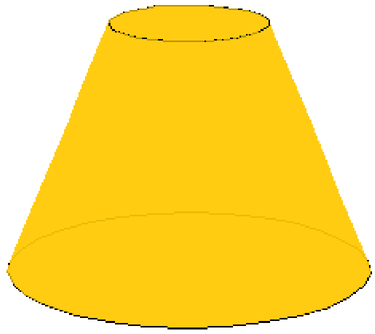
L'àrea total és: **$At=1507{,}96+804{,}25=2312{,}21\ cm^2$**

Àrea d'un tronc de con

El desenvolupament d'un tronc de con es compon de dos cercles que són les bases i una figura anomenada trapezi circular que té costats curvilinis, de longituds les de les circumferències, i altura la generatriu del tronc de con.

Àrea lateral: **Al=π·g·(R+r)**

Àrea total: **At=π·g·(R+r)+π·R^2+π·r^2**



Tronc de con

Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un tronc de con de 15 cm de generatriu, 10 cm de radi de la base menor i 20 cm de radi de la base major.

Àrea lateral:

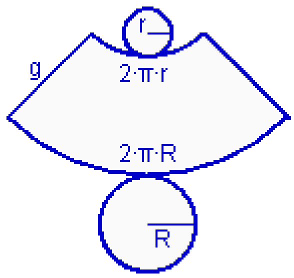
Al = π·g·(R+r) = π·15·(10+20) = 1413,72 cm^2

Àrea de la base menor: Ab = π·10^2 = 314,16 cm^2

Àrea de la base major: AB = π·20^2 = 1256,64 cm^2

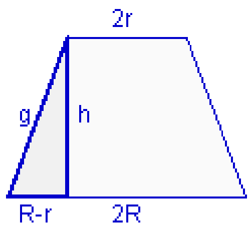
L'àrea total és:

At=1413,72+314,16+1256,64=2984,51 cm^2



Desenvolupament d'un tronc de con:

En tallar un tronc de con per un pla que passi pels centres de les dues bases s'obté aquest trapezi isòsceles del qual es pot deduir la relació que existeix entre els radis, l'altura i la generatriu.



Àrea d'una esfera

L'esfera no es pot desenvolupar i representar en un pla.

L'àrea de l'esfera és igual a quatre vegades la superfície del cercle de major radi que conté.

Área: **A=4·π·r^2**

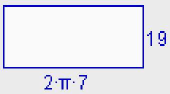
Calcula l'àrea d'una esfera 30 cm de radi.

Àrea: A = 4·π·r^2 = 4·π·30^2 = 11309,73 cm^2

Esfera

EXERCICIS resolts

6. Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un cilindre de 19 cm d'altura i 7 cm de radi de la base.



Àrea lateral: rectangle

$Al = 2·\pi·r·h = 2·\pi·7·19 = 835,66\ cm^2$

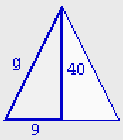
Àrea de la base: cercle

$Ab = \pi·r^2 = \pi·7^2 = 153,94\ cm^2$

Àrea total: $At = 835,666 + 2 \cdot 153,94 = 1143,54\ cm^2$

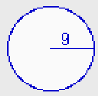
7. Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un con de 40 cm d'altura i 9 cm de radi de la base.

Àrea lateral: es necessita calcular la generatriu:



$$g = \sqrt{9^2 + 41^2} = \sqrt{1681} = 41\ cm$$

$Al = \pi·r·g = \pi·9·41 = 1159,25\ cm^2$



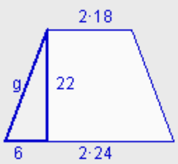
Àrea de la base: cercle

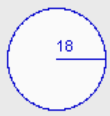
$Ab = \pi·r^2 = \pi·9^2 = 254,47\ cm^2$

Àrea total: $At = 1159,25 + 254,47 = 1413,72\ cm^2$

8. Calcula l'àrea lateral i l'àrea total d'un tronc de con de 22 cm d'altura, 18 cm de radi de la base menor i 24 cm de radi de la base major.

Àrea lateral: es necessita calcular la generatriu:

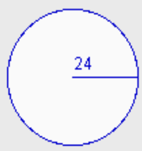




$$g = \sqrt{6^2 + 22^2} = \sqrt{520} = 22,80\ cm$$

$A = \pi·g·(R+r) = \pi·22,8·(24+18) = 3008,85\ cm^2$

Àrea de les bases: cercles



$Ab = \pi·r^2 = \pi·18^2 = 1017,88\ cm^2$

$AB = \pi·r^2 = \pi·24^2 = 1809,56\ cm^2$

Àrea total: $At = 3008,85 + 1017,88 + 1809,56 = 5836,29\ cm^2$

9. Calcula l'àrea de una esfera d'1 metre de radi.

$A = 4·\pi·r^2 = 4·\pi·1^2 = 12,57\ m^2$

4. Resolució de problemes

Resolució de problemes

De vegades, haurem de resoldre problemes de càlcul d'àrees de cossos geomètrics en què els cossos que apareixen s'obtenen agrupant alguns dels cossos ja estudiats.

En aquestes situacions es descomponen els cossos geomètrics en cossos més simples i es resol el problema per parts.

S'ha d'anar amb compte amb les cares comunes de la descomposició, per tal de no comptar-les dues vegades.

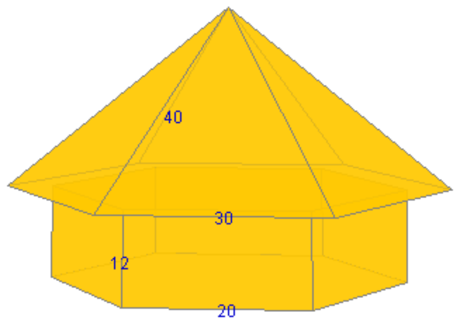


Figura 1

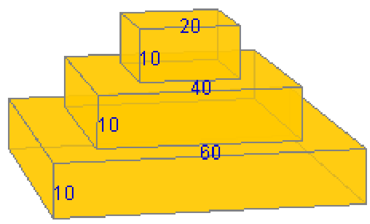


Figura 2

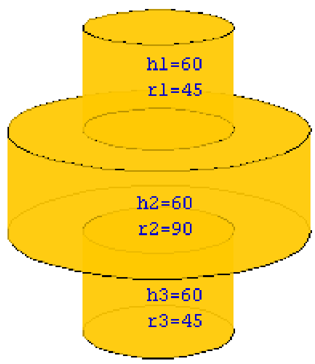


Figura 3

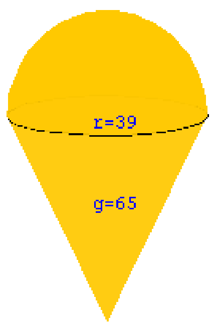
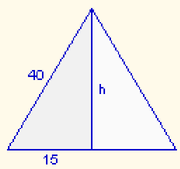


Figura 4

Calcula l'àrea de la figura 1, sabent que las mesures estan expressades en centímetres.

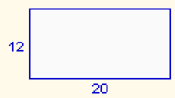
Àrea dels triangles: Hi ha sis triangles iguals a aquest:



$$h = \sqrt{40^2 - 15^2} = \sqrt{1375} = 37{,}08 \text{ cm}$$

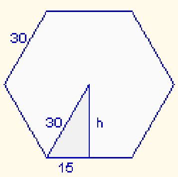
$$A = \frac{30 \cdot 37{,}08}{2} = 556{,}22 \text{ cm}^2$$

Àrea dels rectangles: Hi ha sis rectangles iguals a aquest:



$$A = 20 \cdot 12 = 240 \text{ cm}^2$$

Àrea de les bases (hexàgon): Les cares horitzontals formen un hexàgon de 30 cm de costat:



$$h = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98 \text{ cm}$$

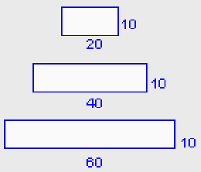
$$A = \frac{6 \cdot 30 \cdot 25{,}98}{2} = 2338{,}27 \text{ cm}^2$$

L'àrea total és:

At = 6·556,22+6·240+2338,27 = 7115,56 cm²

EXERCICIS resolts

10. Calcula l'àrea de la figura 2 de la pàgina anterior, sabent que les mesures estan expressades en centímetres.

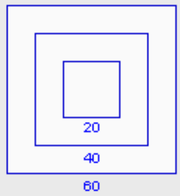


Àrea lateral: hi ha quatre rectangles de cadascun :

$A1 = 20 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2$
$A2 = 40 \cdot 10 = 400 \text{ cm}^2$
$A3 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ cm}^2$

$Al = 4 \cdot 200 + 4 \cdot 400 + 4 \cdot 600 = 4800 \text{ cm}^2$

Àrea de la base: en unir les bases superiors s'obté un quadrat de 60 cm de costat, que coincideix amb el quadrat de la base inferior



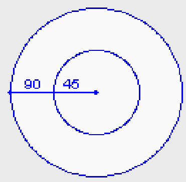
$Ab = 60^2 = 3600 \text{ cm}^2$

Àrea total: $At = 4800 + 2 \cdot 3600 = 12000 \text{ cm}^2$

11. Calcula l'àrea de la figura 3 de la pàgina anterior, sabent que les mesures estan expressades en centímetres.

Àrea lateral: correspon amb l'àrea lateral de tres cilindres:

$A1 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 60 = 16964{,}60 \text{ cm}^2$
$A2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 90 \cdot 60 = 33929{,}20 \text{ cm}^2$
$A3 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 60 = 16964{,}60 \text{ cm}^2$



$Al = 16964{,}60 + 33929{,}20 + 16964{,}60 = 67858{,}40 \text{ cm}^2$

Àrea de la base: en unir les bases superiors per una part i les bases inferiors per l'altra s'obtenen cercles de 90 cm de radi.

$Ab = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 90^2 = 25446{,}90 \text{ cm}^2$

Àrea total: $At = 67858{,}40 + 2 \cdot 25446{,}90 = 118752{,}20 \text{ cm}^2$

12. Calcula l'àrea de la figura 4 de la pàgina anterior, sabent que les mesures estan expressades en centímetres.

Es pot descompondre aquest cos geomètric en una semiesfera i un con:

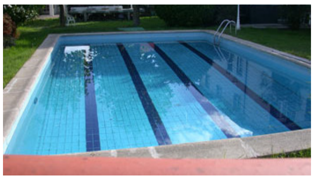
Àrea de la semiesfera: $A_S = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 39^2}{2} = 9556{,}72 \text{ cm}^2$

Àrea lateral del con: $A_c = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 39 \cdot 65 = 7963{,}94 \text{ cm}^2$

Àrea total: $At = A_s + A_c = 9556{,}72 + 7963{,}94 = 17520.66 \text{ cm}^2$

Per a practicar

1. Estic construint una piscina de 5,7 metres de llargada, 4 metres d'amplada i 1,9 metros d'alçada. Vull recobrir les parets i el fons amb rajoles de forma quadrada de 20 cm de costat. Quantes rajoles necessitaré si aproximadament se'n malmeten un 10%?



2. Una mare compra a la seva filla una caixa dels seus bombons favorits. La caixa té forma de prisma triangular de 21 cm de llargada i 12 cm de costat de la base. Quina és la quantitat de paper mínima que es necessita per embolicar-la?

3. Es vol restaurar el lateral i la part superior d'una torre amb forma de prisma octogonal de 12 m d'altura. La base és un octàgon regular de 3 m de costat i 3,62 metres d'apotema. Si l'empresa de restauració cobra 226 euros per cada metre quadrat, quin serà el preu de la restauració?

4. Una pizzeria fa pizzes de diverses mides i les ven en caixes hexagonals de 39 cm de costat i 4,7 cm d'alçada. Quina quantitat de cartó es necessita per cada caixa tenint en compte que la caixa està formada per dues parts compostes d'una base i el lateral?

5. Una piràmide egípcia de base quadrada té 150 metres d'altura i 139 metres d'aresta de la base. Quina és la seva superfície lateral?

6. Calcula els metres quadrats de tela que es necessiten per a fabricar un para-sol amb forma de piràmide dodecagonal de 84 cm d'aresta de la base i 194 cm d'aresta lateral.

7. La part exterior del teulat d'un edifici té forma de tronc de piràmide de bases quadrades de 47 m i 51 m de costat respectivament. L'aresta lateral de la teulada mesura 7,3 m. Calcula la superfície.

8. Un test de plàstic té forma de tronc de piràmide hexagonal. Els costats de les bases mesuren respectivament 36 i 42 cm i l'aresta lateral mesura 7,5 cm. Calcula la quantitat de plàstic que es necessita per a la seva fabricació.

9. Una llauna de conserves té 16,6 cm d'altura i 8,4 cm de radi de la base. Quant de metall es necessita per a la seva fabricació? Quant de paper es necessita per a l'etiqueta?

10. Es volen tractar dos dipòsits amb pintura antioxidant. Els dipòsits tenen 7,3 metres d'altura i 9,7 metres de radi de la base. El preu per pintura de cada metre quadrat és de 39 euros. Quin és el preu final de la pintura, sabent que només es pinta la base superior de cadascun?

11. Una copa té forma de con de 10,2 cm de generatriu i 9,5 cm de diàmetre de la circumferència superior. La base és una circumferència de 4,9 cm de radi. Cada vegada que es neteja, quina superfície de cristall s'ha de netejar?

12. Es vol condicionar una sitja antiga amb forma de con. Per això s'aplicarà una capa aïllant a la paret interior i al terra. Les dimensions de la sitja són 16,5 metres d'altura i 7,5 metres de radi de la base. Quina quantitat de superfície s'ha de tractar?

13. Un got de plàstic té 7,1 cm de diàmetre superior i 5,6 cm de diàmetre inferior. La generatriu mesura 12,6 cm. Quants metres quadrats de plàstic s'han necessitat per fabricar 150 gots?

14. He comprat un paper resistent a la calor per fabricar-me una làmpada amb forma de tronc de con, de 17,3 cm de diàmetre superior i 15,7 cm de diàmetre inferior. L'altura fa 32,2 cm. Quant de paper necessito?

15. Sabent que el radi de la Terra és de 6370 quilòmetres, calcula la superfície del nostre planeta utilitzant diferents aproximacions del número π.

a) 3 b) 3,14 c) 3,1416 d) π

16. a) Calcula la superfície d'una pilota de 5 cm de radi.

b) Calcula la superfície d'una pilota de radi doble de l'anterior.

c) Calcula la superfície d'una pilota de radi 10 vegades major que la primera.

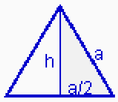
d) Quina relació hi ha entre les superfícies de les esferes?

Per saber-ne més

ÀREA DELS POLIEDRES REGULARS

Els poliedres regulares tenen totes les seves cares iguals. Per calcular la seva àrea, es calcula l'àrea d'una de les seves cares i es multiplica pel nombre de cares que té. Vegem com es pot calcular l'àrea d'un triangle equilàter i d'un pentàgon regular.

Àrea d'un triangle equilàter en funció d'un costat "a"

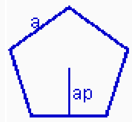


$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{altura: } h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textbf{Àrea: } A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{a^2\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Àrea d'un pentàgon regular en funció del costat "a"

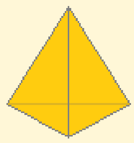


Per calcular l'àrea d'un pentàgon regular es necessita la unitat de Trigonometria de 4t E.S.O.

$$\text{apotema: } ap = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

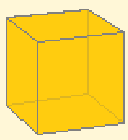
$$\textbf{Àrea: } \mathbf{A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$$

Ara ja es pot calcular l'àrea dels poliedres regulars.



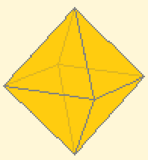
TETRÀEDRE: format per quatre triangles equilàters

$$A = 4\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathbf{A = a^2\sqrt{3}}$$



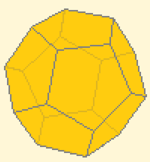
CUB: format por sis quadrats

$$\mathbf{A = 6\cdot a^2}$$



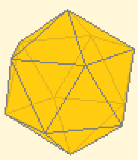
OCTÀEDRE: format por vuit triangles equilàters

$$A = 8\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathbf{A = 2\cdot a^2\sqrt{3}}$$



DODECÀEDRE: format per dotze pentàgons regulars

$$A = 20\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} \Rightarrow \mathbf{A = 5\cdot a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$$



ICOSÀEDRE: format per vint triangles equilàters

$$A = 20\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathbf{A = 5\cdot a^2\sqrt{3}}$$

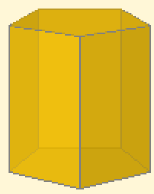
Recorda el més important

ÀREES DE COSSOS GEOMÈTRICS

Àrea lateral: suma de las àrees de totes les cares laterals d'un cos geomètric.

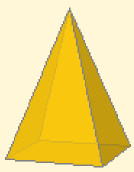
Àrea total: suma de l'àrea lateral i de l'àrea de les bases d'un cos geomètric.

PRISMA



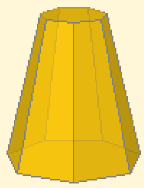
Al = nº cares · àrea del rectangle
At = Al + 2 · àrea del polígon regular

PIRÀMIDE



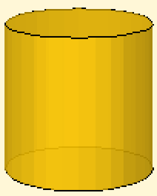
Al = nº cares · àrea del triangle
At = Al + àrea del polígon regular

TRONC DE PIRÀMIDE



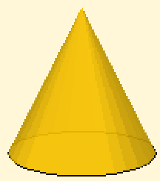
Al = nº cares · àrea del trapezi
At = Al + àrea de polígons regulares

CILINDRE



$$Al = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$
$$At = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

CON



$$Al = \pi \cdot r \cdot g$$
$$At = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

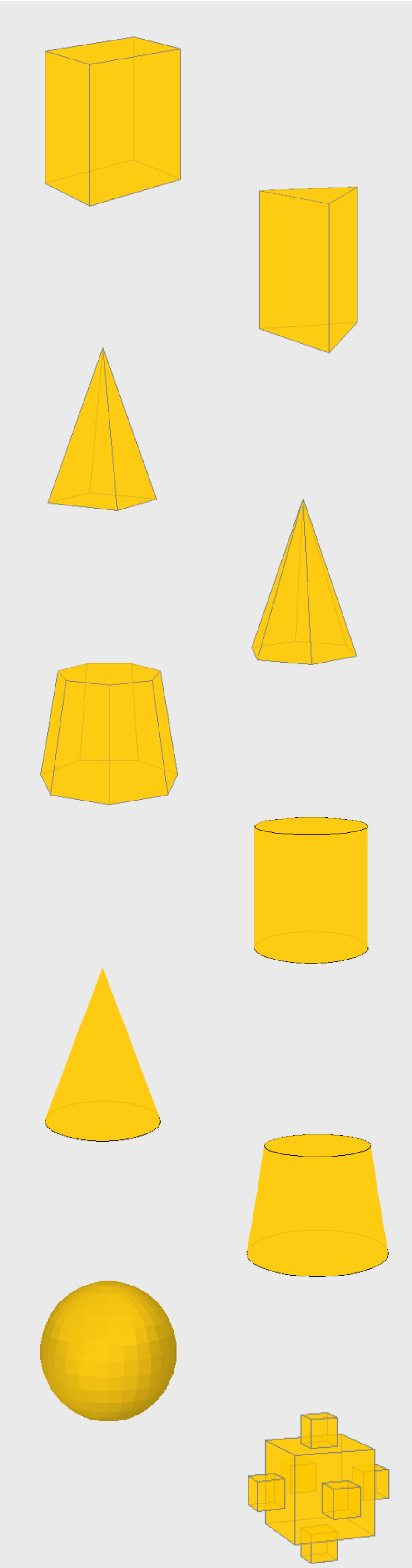
TRONC DE CON

$$Al = \pi \cdot g \cdot (R+r)$$
$$At = \pi \cdot g \cdot (R+r) + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

ESFERA

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Autoavaluació



1. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de 72 metres de llargada, 42 metres d'amplada i 26 metres d'alçada.

2. Calcula l'àrea total d'un prisma triangular de 55 metres d'altura i 30 metres d'aresta de la base.

3. Calcula l'àrea total d'una piràmide de base quadrada de 69 metres d'altura i 77 metres d'aresta de la base.

4. Calcula l'àrea total d'una piràmide hexagonal de 114 metres d'aresta lateral i 100 metres d'aresta de la base.

5. Calcula l'àrea total d'un tronc de piràmide de 7 cares laterals sabent que les arestes de les bases mesuren respectivament 47 i 71 metres, l'aresta lateral mesura 62 metres i les apotemes de les bases mesuren respectivament 48, 80 i 73,78 metres.

6. Calcula l'àrea total d'un cilindre de 81 metres d'altura i 15 metres de radi de la base.

7. Calcula l'àrea total d'un con de 29 metres d'altura i 42 metres de radi de la base.

8. Calcula l'àrea total d'un tronc de con la generatriu del qual mesura 24 metres i els radis de les bases mesuren respectivament 41 i 57 metres.

9. Calcula l'àrea d'una esfera de 67 metres de radi.

10. Calcula l'àrea total d'aquest cos geomètric sabent que l'aresta del cub petit mesura 13 metres i l'aresta del cub gran és el triple.

Solucions dels exercicis per practicar

1. 1641 rajoles
2. 880,71 cm^2
3. 74905,44 euros
4. 10102,95 cm^2
5. 45958,58 m^2
6. 9,55 m^2
7. 1376,05 m^2
8. 4975,59 cm^2
9. 1319,57 cm^2 de metall
   876,13 cm^2 de paper
10. 57759,37 euros
11. 455,28 cm^2
12. 603,76 m^2
13. 4,14 m^2
14. 1669,64 cm^2
15. a) 486922800 km^2
    b) 509645864 km^2
    c) 509905556,16 km^2
    d) 509904363,78 km^2
16. a) 314,16 cm^2
    b) 1256,64 cm^2
    c) 31415,93 cm^2
    d) la relació és igual al quadrat de la relació entre els radis.

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. 11976 m^2
2. 5729,42 m^2
3. 18097,19 m^2
4. 56715,76 m^2
5. 51468,83 m^2
6. 9047,79 m^2
7. 12276,23 m^2
8. 22877,08 m^2
9. 56410,44 m^2
10. 13182 m^2

No oblidis enviar les activitats al tutor ►

10

Volum dels cossos geomètrics.

Objectius

En esta quinzena aprendràs a:

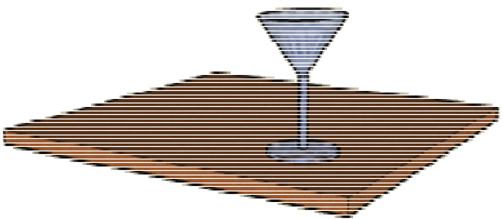
- Comprendre el concepte de "mesura de volum" i utilitzar les unitats de mesura del sistema mètric decimal.
- Obtenir i aplicar expressions per al càlcul de volums de cossos geomètrics bàsics. Observar les possibles similituds entre algunes d'aquestes expressions.
- Discriminar i comparar correctament els conceptes de volum i capacitat.
- Conèixer el principi de Cavalieri i aplicar-lo a l'obtenció d'expressions per al càlcul de volums de determinats cossos oblics.

Abans de començar

En aquesta quinzena aprendràs a calcular amb facilitat els volums dels cossos geomètrics elementals i també els volums d'altres cossos més complicats, per descomposició en cossos senzills. D'aquesta manera, podràs resoldre molts problemes reals, entre d'altres:

Quants peixos es poden introduir en un aquari?

Quant pesa cada bloc de formigó?

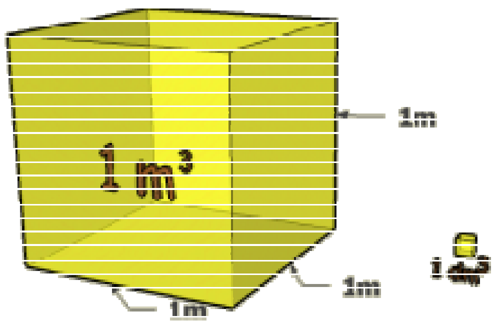


Quina capacitat té la copa?

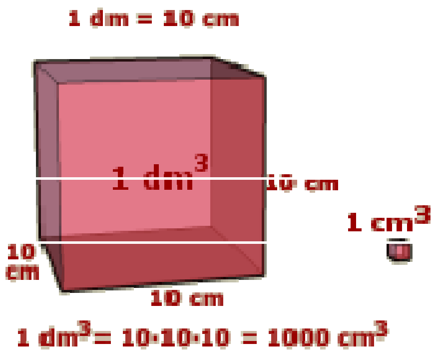
1. Volum i capacitat

Unitats de volum

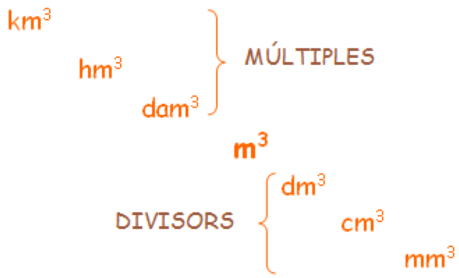
El **volum** d'un cos és la quantitat d'espai que ocupa. La unitat principal és el **metre cúbic (m^3)**.



Una unitat de volum és 1000 vegades més gran que la de l'ordre immediatament inferior i 1000 vegades més petita que la de l'ordre immediatament superior



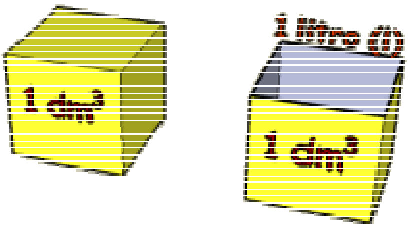
Relació entre les unitats. Cada unitat de volum és 1000 vegades més gran que la de l'orde inferior següent i 1000 vegades més petita que la de l'ordre superior anterior.



Per passar d'una unitat a una altra n'hi ha prou amb observar quants nivells es pugen o es baixen. Multiplicarem per mil tantes vegades com nivells es baixin i dividirem entre mil tantes vegades com nivells es pugin. Per exemple: per passar de hm^3 a m^3 cal baixar dos nivells, el que equival a multiplicar per 1000 dues vegades, que és igual que multiplicar per 1.000.000.

Capacitat i volum

El **volum** és la quantitat d'espai que ocupa un cos i **capacitat** és el que cap dins d'un recipient.



Un **litre (l)** és la capacitat d'una caixa cúbica d'1 dm de costat.

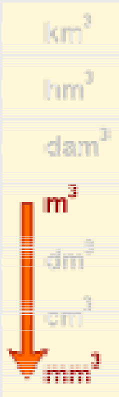
En general, s'anomena capacitat d'un recipient al seu volum.

$$1\ m^3 = 1000\ l$$
$$1\ dm^3 = 1\ l$$
$$1000\ cm^3 = 1\ l$$
$$1\ cm^3 = 1\ ml$$

En general s'anomena capacitat d'un recipient al seu volum. Tant les unitats de volum, com els múltiples i divisors del litre, s'utilitzen per mesurar volums i capacitats.

EXERCICIS resolts

1. Expressa en mm^3 4,3 m^3.



Per passar de m^3 a mm^3 cal baixar 3 nivells. Per tant, cal multiplicar per 1000 tres vegades, el que equival a multiplicar per 1.000.000.000:

$$4{,}3\ m^3 = 4{,}3 \cdot 1.000.000.000\ mm^3 = \mathbf{4.300.000.000\ mm^3}$$

2. Expressa en dam^3 2,4 m^3.

Per passar de m^3 a dam^3 cal pujar 1 nivell. Per tant, cal dividir entre 1000:

$$2{,}4\ m^3 = 2{,}4 : 1000\ dam^3 = \mathbf{0{,}0024\ dam^3}$$

3. Quants mm^3 són 4,9 dm^3?

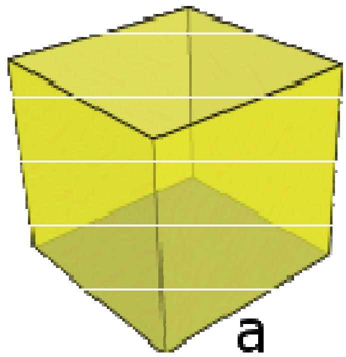
Per passar de dm^3 a mm^3 cal baixar 2 nivells. Per tant, cal multiplicar per 1000 dues vegades, el que equival a multiplicar per 1.000.000:

$$4{,}9\ dm^3 = 4{,}9 \cdot 1.000.000\ mm^3 = \mathbf{4.900.000\ mm^3}$$

2. Volums de prismes i piràmides

Cub

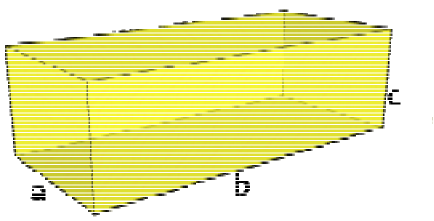
Un **cub** és un prisma particular format per sis cares quadrades. El seu volum és el cub de la longitud de l'aresta.



Volum (V)= a · a · a = a^3

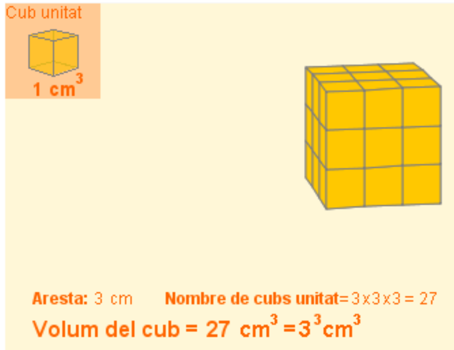
Ortoedre

Un **ortoedre** és un prisma les cares del quals són totes rectangulars.

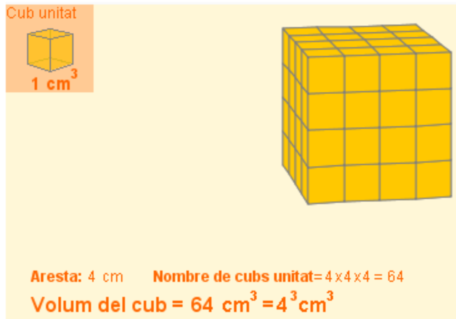


Volum (V)= a · b · c

Deducció de les fórmules



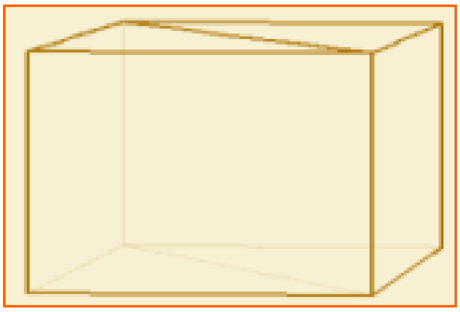
Un cub de 3 cm d'aresta estaria format per 3^3=27 cubs unitat, de un cm^3 cadascun.



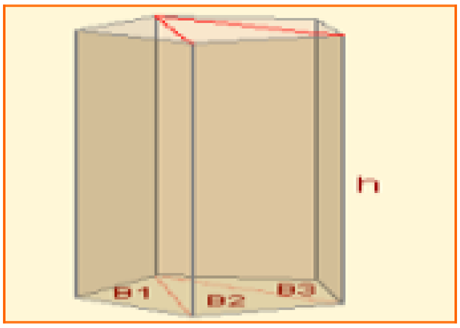
Un cub de 4 cm d'aresta estaria format per 4^3=64 cubs unitat, de un cm^3 cadascun. En general, el volum d'un cub és la longitud de l'aresta al cub.

El volum d'un ortoedre és el producte de les longituds de les arestes.

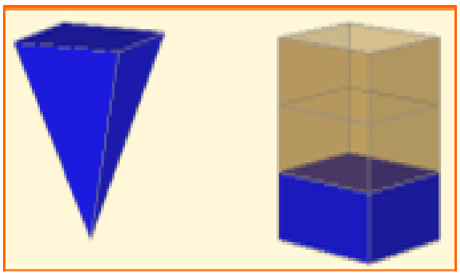
Deducció
de las fórmules.



Amb dos prismes triangulars es pot formar un paral·lelepípede recte, i d'aquest es pot obtenir un ortoedre. És fàcil deduir que el volum del prisma triangular és l'àrea de la seva base per la seva altura.



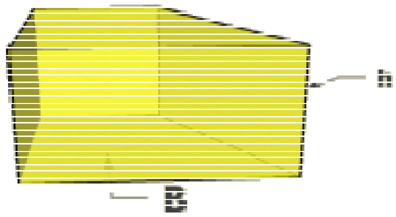
Els prismes rectes es poden descompondre en prismes triangulars. D'aquesta manera es dedueix sense dificultat que el volum d'un prisma recte és l'àrea de la seva base per la seva altura.



El volum d'una piràmide és la tercera part del volum d'un prisma amb la mateixa altura i la mateixa base. Per tant, el volum d'una piràmide és un terç de l'àrea de la seva base per la seva altura.

Prisma recte qualsevol

Un **prisma recte** és un políedre que té dues cares iguals i paral·leles, anomenades bases, i cares laterals que són rectangulars.

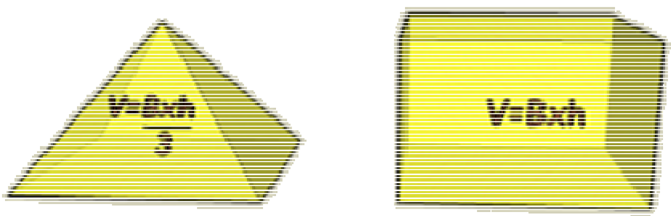


Volum (V)= B · h

B=àrea de la base h=altura

Relació entre prismes i piràmides

El **volum d'una piràmide** és la tercera part del volum d'un prisma amb la mateixa base i la mateixa altura que la piràmide.

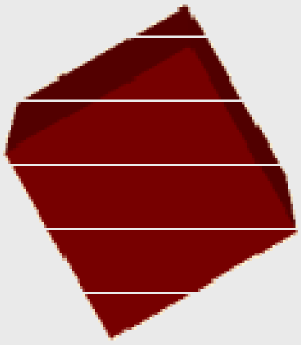


Volum (V)= (B · h)/3

B=àrea de la base h=altura

EXERCICIS resolts

4. Calcula, per tanteig, la longitud de l'aresta d'un cub de 343 m^3 de volum.



L'aresta fa 7 m, ja que:

$$\mathbf{7 \cdot 7 \cdot 7 = 343\ m^3}$$

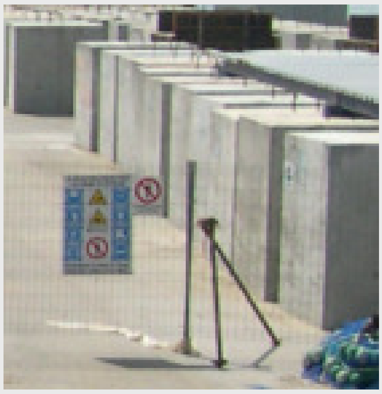
5. Troba el pes d'un bloc cúbic de formigó de 1,9 m de costat.
(Un metro cúbic de formigó pesa 2350 kg)

El volum del bloc és:

$V = (1{,}9)^3 = 6{,}859\ m^3$

El seu pes serà:

$$\mathbf{m = 2350 \cdot 6{,}859 = 16.118{,}7\ Kg.}$$



6. Quants peixos, petits o mitjans, es poden introduir en un aquari les mesures interiors del qual són 88 x 65 x 70 cm? *(Es recomana introduir, com a màxim, un peix mitjà o petit cada quatre litres d'aigua)*

La capacitat de l'aquari és:

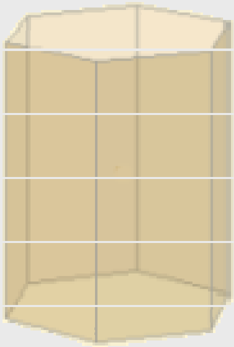
$V = 85 \cdot 65 \cdot 70 = 386.750\ cm^3 = 386{,}8$ litres

Es poden introduir:

$$\frac{386{,}8}{4} \approx \mathbf{96\ peixos}$$

EXERCICIS resolts

7. La base d'aquest prisma és un polígon regular de costat 1,7 cm i apotema 1,5 cm. Calcula el seu volum sabent que la seva altura és 3,9 cm.



L'àrea de la base és:

$$B = \frac{6 \cdot 1{,}7 \cdot 1.5}{2} = 7{,}65 \text{ cm}^2$$

El volum és:

$$\mathbf{V = 7{,}65 \cdot 3{,}9 = 29{,}83\ cm^3}$$

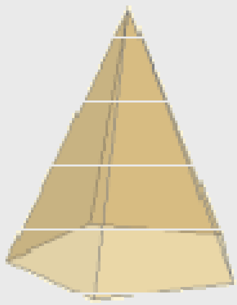
8. La base d'aquesta piràmide és un polígon regular de costat 1,3 cm i apotema 0,9 cm. Calcula el seu volum sabent que la seva altura és 2,7 cm.

L'àrea de la base és:

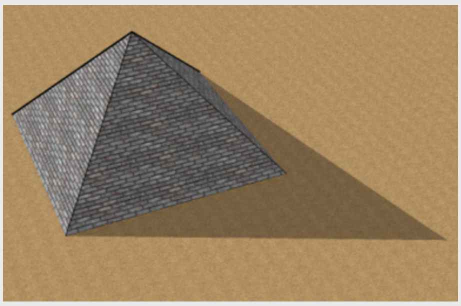
$$B = \frac{5 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}9}{2} = 2{,}93 \text{ cm}^2$$

El volum és:

$$V = \frac{2{,}93 \cdot 2{,}7}{3} = \mathbf{2{,}64\ cm^3}$$



9. La Gran Piràmide de Giza és l'única que perdura de les *set meravelles del món antic*. Actualment té una altura de 137 m i la base és un quadrat de 230 m de costat. Quin és el seu volum aproximat?



L'àrea de la base és:

$B = 230 \cdot 230 = 52.900\ m^2$

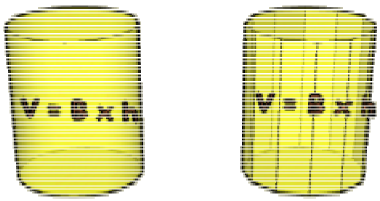
El seu volum aproximat és:

$$V = \frac{52900 \cdot 137}{3} = \mathbf{2.415.767\ m^3}$$

3. Cossos de revolució

Volum d'un cilindre

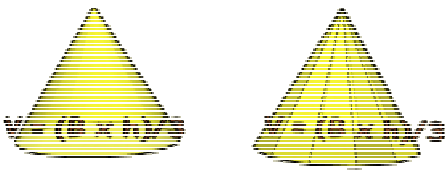
Podem considerar que si creix el nombre de cares d'un prisma indefinidament, es transforma en un cilindre. Com en el prisma, el **volum d'un cilindre** és l'àrea de la base ($\pi \cdot r^2$) per l'altura (h).



Volum (V)= $\pi \cdot r^2 \cdot h$

Volum d'un con

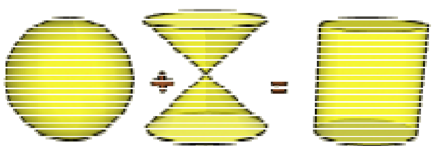
Podem considerar que si creix el nombre de cares d'un prisma indefinidament, es transforma en un cilindre. Com en el prisma, el **volum d'un cilindre** és l'àrea de la base ($\pi \cdot r^2$) per l'altura (h).



Volum (V)= ($\pi \cdot r^2 \cdot h$)/3

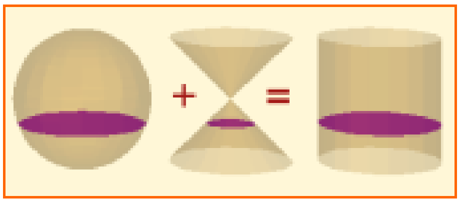
Volum d'una esfera

El **volum d'una esfera** es pot obtenir a partir del volum d'un cilindre i de dos cons.



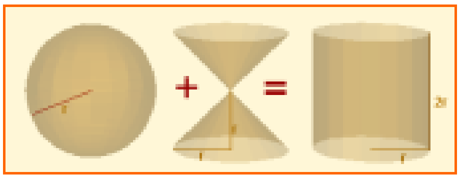
Volum (V)= (4/3)·π·r^3

Deducció de la fórmula del volum d'una esfera.



Una propietat important. En la figura, el radi de les bases del con i del cilindre és el mateix que el radi de l'esfera. L'altura del cilindre és el diàmetre de l'esfera i l'altura dels cons coincideix amb el radi de l'esfera. En aquestes condicions, en seccionar els tres cossos per un pla horitzontal es té que la suma de les àrees de las seccions de l'esfera i del con és igual a l'àrea de la secció del cilindre.

De la propietat anterior es dedueix que el volum d'aquesta esfera més el dels dos con coincideix amb el volum del cilindre:



I d'aquesta relació es té que:

$$V_{esfera} = V_{cilindre} - V_{cons}$$

Se sap que:

$$V_{cilindre} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_{cons} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot r}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

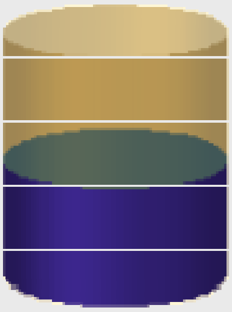
Por tant, el volum de l'esfera queda:

$$2 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

EXERCICIS resolts

10. S'aboquen 7 cm^3 d'aigua en un recipient cilíndric de 1,3 cm de radi. Quina alçada assolirà l'aigua?



$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, aïllant h:

$$h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{7}{3{,}14159 \cdot 1{,}3^2} = \mathbf{1{,}32\ cm}$$

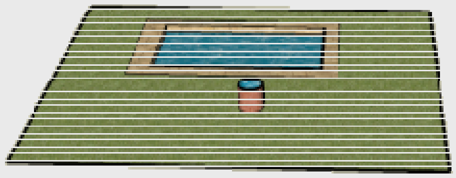
11. Quants cubs cilíndrics, de 47 cm d'altura i 16 cm de radi, s'han de buidar en una piscina de 10x6x1,5 m per omplir-la?

La capacitat de cada cub és:
V= 3,14159 · 16^2 · 47 = 37.799,61 cm^3

La capacitat de la piscina és:
V= 10 · 6 · 1,5 = 90 m^3 = 90.000.000 cm^3

Seran necessaris:

$$\frac{90.000.000}{37799{,}61} \approx 2381 \text{ cubs d'aigua}$$



12. Quantes copes es poden omplir amb 6 litres de refresc, si el recipient cònic de cada copa té una altura interior de 6,5 cm i un radi interior de 3,6 cm?

La capacitat de cada copa és:

$$V = \frac{3{,}14159 \cdot 3{,}6^2 \cdot 6{,}5}{3} = 88{,}22\,\text{cm}^3$$

Es poden omplir:

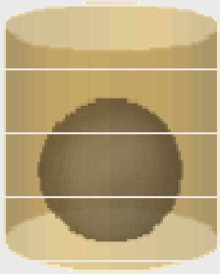
$$\frac{6000}{88{,}22} \approx \mathbf{68\ copes}$$

13. S'introdueix una bola de plom, de 1 cm de radi, en un recipient cilíndric de 3,1 cm d'altura y 1,5 cm de radio. Calcula el volum d'aigua necessari per omplir el recipient.

El volum del cilindre és:
V = 3,14159 · 1,5^2 · 3,1 = 21,91 cm^3
El volum de la bola és:
V = (4/3)·3,14159 · 1^3= 4,19 cm^3

Per omplir el recipient, cal afegir:

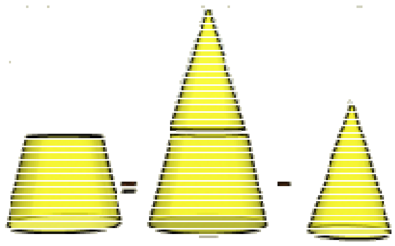
21,91 – 4,19 = **17,72 cm^3**



4. Altres cossos

Tronc de con

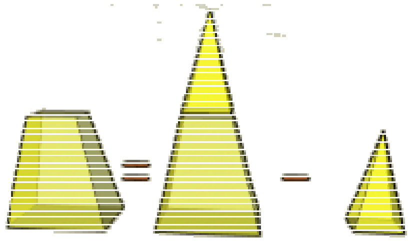
Per calcular el **volum d'un tronc de con,** n'hi ha prou amb conèixer la seva altura i els radis de les seves bases.



$$V_{\text{tronc de con}} = \\ = V_{\text{con gran}} - V_{\text{con petit}}$$

Tronc de piràmide

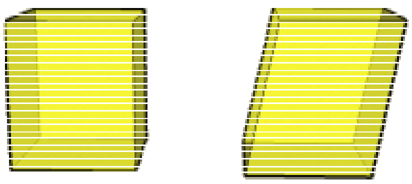
Per calcular el **volum d'un tronc de piràmide** s'aplica el procediment que s'expressa a la imatge:



$$V_{\text{tronc de piràmide}} = \\ = V_{\text{piràmide gran}} - V_{\text{piràmide petita}}$$

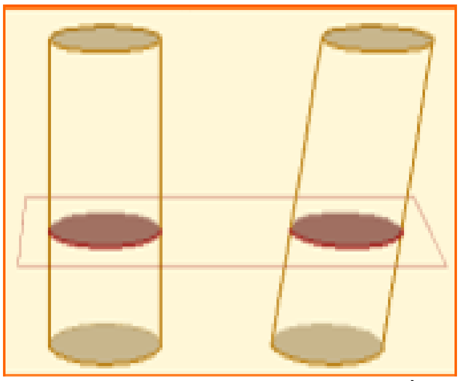
Paral·lelepípede

El **volum d'un paral·lelepípede** coincideix amb el d'un **ortoedre** que tingui la **mateixa altura i la mateixa àrea de la base.**

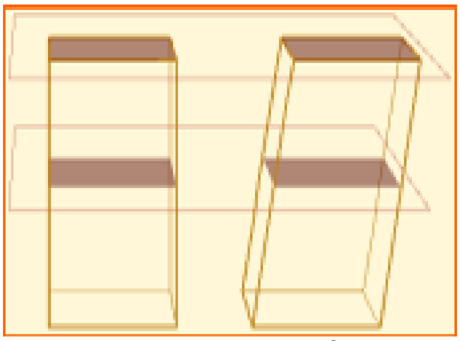


$$V = B \cdot h$$

Cada piló té 21 monedes de 20 cèntims. És evident que els tres pilons tenen el mateix volum. Aquesta senzilla observació permet calcular els volums d'alguns cossos geomètrics a partir de la deformació d'altres.



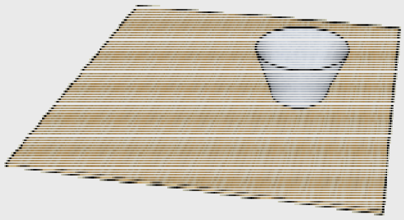
Teorema de Cavalieri. Si dos sòlids tenen la mateixa altura i les seccions planes paral·leles a les seves bases, a la mateixa distància d'aquesta, tenen àrees iguals, ambdós sòlids tenen el mateix volum.



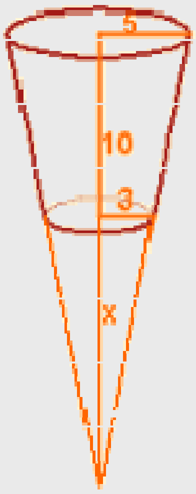
Volum d'un paral·lelepípede. Si apliquem el Teorema de Cavalieri, el volum d'un paral·lelepípede serà igual que el d'un ortoedre que tingui la mateixa altura i igual àrea de la base. Les seccions planes tenen àrees iguales.

EXERCICIS resolts

14. El recipient de la imatge té 10 cm d'altura i els radis de les seves bases són 3 i 5 cm. Té més d'un litre de capacitat?



Per resoldre aquest problema es completa el tronc de con, fins a formar un con. La capacitat del recipient serà la diferència entre el volum del con gran i el volum del con petit (l'afegit):



$$\frac{x}{3}=\frac{x+10}{5};\quad 5x = 3(x+10);$$

$$5x = 3x + 30;\quad 2x = 30;\quad x = 15$$

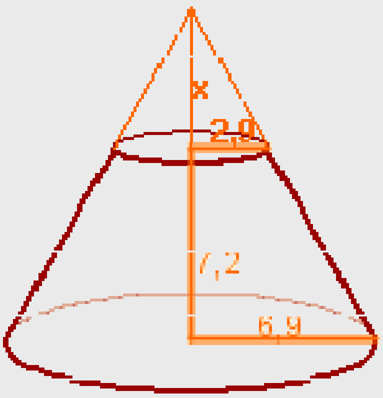
$$V_{\text{tronc de con}} = V_{\text{con gran}} - V_{\text{con petit}} =$$

$$= \frac{3{,}14159\cdot 5^2\cdot 25}{3} - \frac{3{,}14159\cdot 3^2\cdot 15}{3} =$$

$= 654{,}5 - 141{,}37 =$ **513,13 cm³**

No arriba al litre de capacitat

15. Calcula el volum d'un tronc de con de 7,2 cm d'altura, sabent que els radis de les seves bases fan 2,9 y 6,9 cm.



$$\frac{x}{2{,}9}=\frac{x+7{,}2}{6{,}9};\quad 6{,}9x = 2{,}9(x+7{,}2);$$

$$6{,}9x = 2{,}9x + 20{,}88;\quad 4x = 20{,}88;$$

$$x = 5{,}22$$

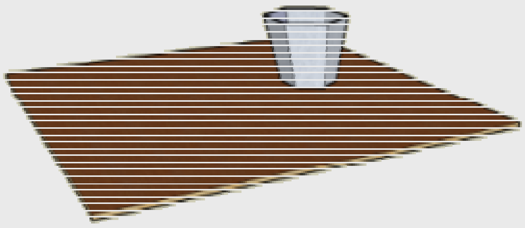
$$V_{\text{tronc de con}} = V_{\text{con gran}} - V_{\text{con petit}} =$$

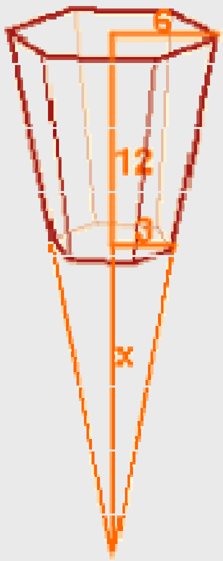
$$= \frac{3{,}14159\cdot 6{,}9^2\cdot 12{,}42}{3} - \frac{3{,}14159\cdot 2{,}9^2\cdot 5{,}22}{3} =$$

$= 619{,}22 - 45{,}97 =$ **573,25 cm³**

EXERCICIS resolts

16. El recipient de la imatge té 12 cm d'altura i les seves bases són hexàgons regulares de costats 3 i 6 cm i apotemes 2,6 y 5,2 cm. Té més d'un litre de capacitat?





(En els hexàgons regulars els radis coincideixen amb els costats)

$\frac{x}{3}=\frac{x+12}{6}$; 6x = 3(x+12);

6x = 3x + 36; 3x = 36; x=12

$V_{\text{recipient}} = V_{\text{piràmide gran}} - V_{\text{piràmide petita}} =$

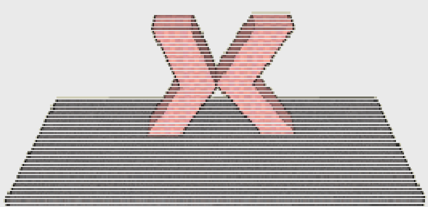
$$=\frac{\left(\frac{6\cdot 6\cdot 5{,}2}{2}\right)\cdot 24}{3}-\frac{\left(\frac{6\cdot 3\cdot 2{,}6}{2}\right)\cdot 12}{3}=$$

= 748,8 - 93,6 = **655,2 cm^3**

No arriba al litre de capacitat

17. Calcula l'altura de l'edifici de la imatge sabent que les seves bases són quadrats de 35 m de costat i que la seva altura és 115 m.

Aplicant el Teorema de Cavalieri, es pot deduir que :
El volum de l'edifici és el de dos ortoedres amb la mateixa base i la mateixa altura que aquest.



V = $2\cdot 35^2\cdot 115$= **281.750 m^3**

Per a practicar

1. Expressa els següents volums en litres:

a) 3 dm^3
b) 50 dam^3
c) 1200 cm^3
d) 0,0007 m^3

2. Expressa les següents quantitats en cm^3:

a) 0,00001 dam^3
b) 10 dm^3
c) 30000mm^3
d) 1,5 m^3

3. Quants gots de 250 cm^3 es poden omplir amb 0,04 m^3 d'aigua?

4. Transforma en m^3:

a) 0,006 hm^3
b) 788 dm^3
c) 0,00008 km^3
d) 16000 mm^3

5. Un pantà té una capacitat de 450 hm^3. Si actualment està a un 76% de la seva capacitat, quants metres cúbics d'aigua conté?

6. Expressa:

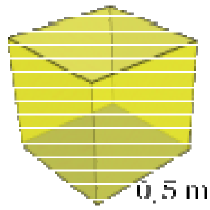
a) 34 hm^3 en km^3
b) 3440 cm^3 en m^3
c) 2,34 km^3 en dam^3
d) 0,000008 dm^3 en mm^3
e) 34567 cm^3 en dm^3
f) 0,02 m^3 en cm^3

7. M'han encarregat 6 litres de refresc de taronja. A la botiga només queden ampolles de 250 cl. Quantes n'he de comprar?

8. Dóna un valor que et sembli raonable per cadascuna de les següents capacitats:

a) Capacitat d'un got d'aigua.
b) Capacitat d'un pantà gran.
c) Capacitat d'una piscina de un xalet.
d) Capacitat del maleter d'un cotxe.

9. Quina quantitat és més gran, mig metre cúbic o el volum d'un cub de mig metre d'aresta? Raona la resposta.



10. Calcula el volum, en litres, d'un cub de 2 m d'aresta.

11. Troba el pes d'un bloc cúbic de formigó de 2,3 m d'aresta. *(Un metre cúbic de formigó pesa 2350 Kg.)*

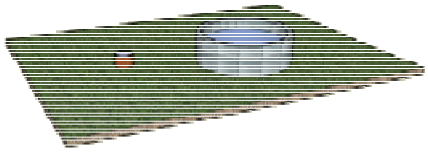
12. Calcula, en litres, el volum d'un *tetrabrik* les dimensiones del qual són 12x7x15 cm.

13. Durant una tempesta es van registrar unes precipitacions de 80 litres per metre quadrat. Quina alçada assoliria l'aigua en un recipient cúbic de 10 cm d'aresta?

14. Una piscina té unes dimensions de 7x4x2 m. Quan de temps trigaran en omplir-la dues aixetes el cabal de les quals és de 70 litres per minut per cadascuna d'elles?

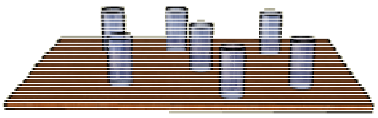
15. Calcula, en litres, el volum d'un con que té 12 cm d'altura i la base del qual té un radi de 5 cm.

16. Quantes vegades cal buidar un cub cilíndric de 40 cm d'altura i 20 cm de radi per omplir un dipòsit cilíndric de 2,5 m d'altura i 3 m de radi?



17. S'aboquen 2,5 cm^3 d'aigua en un recipient cònic la base del qual té 1,7 cm de radi i una altura de 2,8 cm. Quin percentatge de la capacitat del recipient omplim?

18. Quants vasos cilíndrics de 19 cm d'altura i 2,7 cm de radi es poden omplir amb 3,8 litres de refresc?

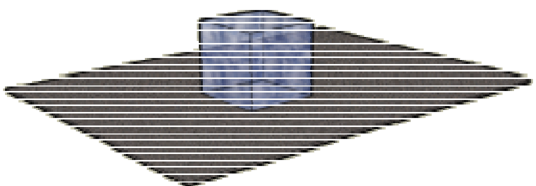


19. Introduïm una bola de plom, de 0,6 cm de radi, en un recipient cilíndric de 3,1 cm d'altura i 0,9 cm de radi. Calcula el volum d'aigua necessari per omplir el recipient.

20. Quants metres cúbics d'aigua es consumeixen en buidar 6 vegades al dia una cisterna de 7,5 litres durant 30 dies?

21. Quants litres d'aigua pot contenir un dipòsit amb forma d'ortoedre, si les seves mides interiors són 189x60x58 cm?

22. Quina quantitat d'aigua s'obté en desfer un bloc cúbic de gel de 31,4 cm d'aresta? *(La densitat del bloc de gel és 0,917 g/cm^3)*.



23. Quants peixos, petits o mitjans, podem introduir en un aquari les mides interiors del qual són 129x51x47 cm? *(Es recomana introduir, com a màxim,, un peix, petit o mitjà, cada quatre litres d aigua).*

24. Quant temps trigarà una aixeta en omplir un dipòsit si aboca 130 litres d'aigua per minut? El dipòsit és un prisma de 3,6 m d'altura i base hexagonal, de 2 m de costat i 1,7m d'apotema.

25. Calcula el pes, en tones, d'una piràmide de formigó, amb una base quadrada de 6 m de costat i 17 m d'altura. Un metre cúbic de formigó pesa 2,35 tones.

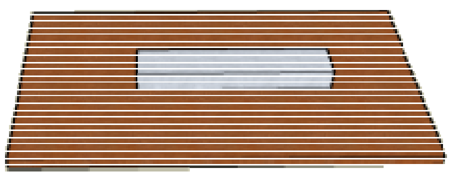
26. Calcula el volum d'un tronc de con de 6,1 cm d'altura, sabent que els radis de les seves bases són 6,1 cm i 3,8 cm.

27. Troba el volum, en litres, d'una esfera de 25 cm de radi.

28. Un paral·lelepípede té una altura de 12 cm i les seves bases són rombes les diagonals dels quals mesuren 7 cm i 4 cm. Calcula el seu volum.

29. S'aboquen 150 cm^3 d'aigua en un got cilíndric de 4 cm de radi. Quina altura assolirà l'aigua?

30. Calcula el pes en grams d'un lingot de plata de 24x4x3 cm. La densitat de la plata és 10,5 g/cm^3.



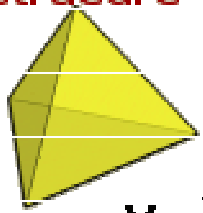
31. L'etiqueta lateral de paper, que envolta completament una llauna cilíndrica de tomata fregida, fa 25x13 cm. Calcula el volum de la llauna.

32. Calcula el pes d'un fil cilíndric de coure de 2 mm de diàmetre i 1350 m de longitud, sabent que la densitat del coure és 8,9 g/cm^3.

Per saber-ne més

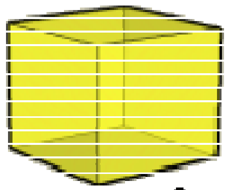
VOLUM DELS POLIEDRES REGULARS

Tetraedre



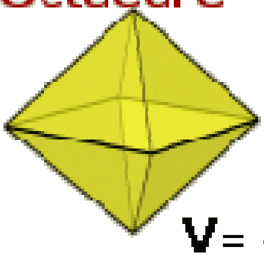
$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3$$

Cub



$$V = a^3$$

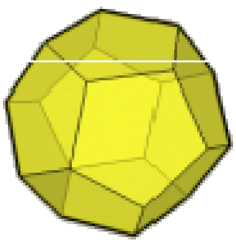
Octaedre



$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a^3$$

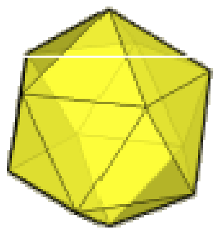
a=longitud de les arestes

Dodecaedre



$$V = \frac{1}{4}\cdot\left(15+7\sqrt{5}\right)\cdot a^3$$

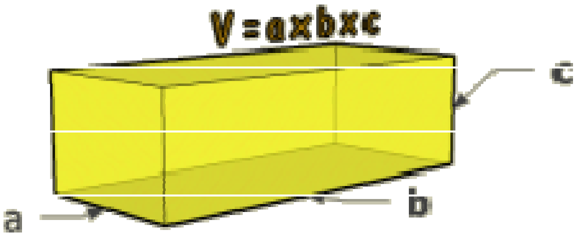
Icosaedre

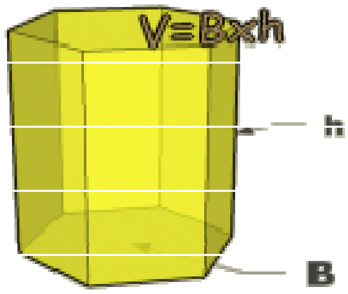


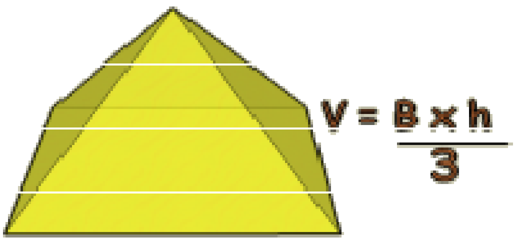
$$V = \frac{5}{12}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\,a^3$$

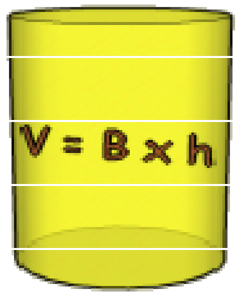
Recorda
el més important

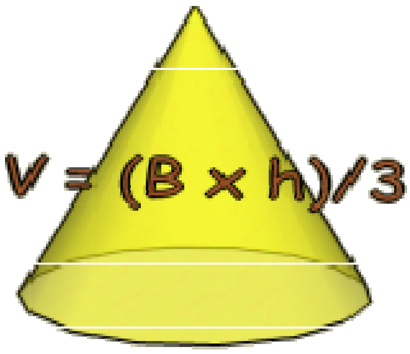
VOLUM DELS COSSOS ELEMENTALS

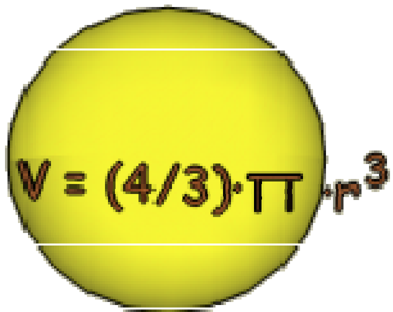








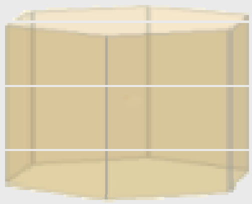




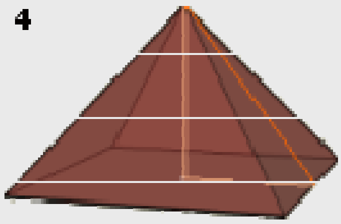
Autoavaluació

2

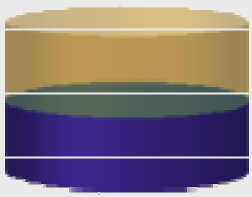
3



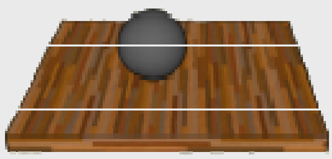
4



6

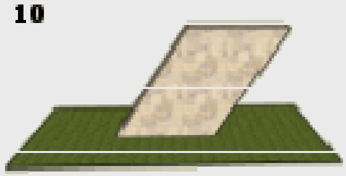


8



9

10



1. La capacitat d'un pantà és de 295 hm^3. Expressa aquesta capacitat en litres.

2. Calcula el pes en grams d'un lingot de plata de 19x4x3 cm. La densitat de la plata és 10,5 g/cm^3.

3. Calcula el volum del prisma de la figura, l'altura del qual és 4 cm i el costat de la base del qual fa 2,4 cm. L'apotema de la base fa 1,6 cm.

4. L'apotema d'una piràmide regular fa 11 dm i la base és un quadrat de 15 dm de costat. Calcula el seu volum.

5. Quants blocs cúbics de pedra, aproximadament, de 50 cm de aresta, fan falta per construir una piràmide regular amb base quadrada de 208 m de costat i 101 m d'altura?

6. S'aboquen 19,8 cm^3 d'aigua en un recipient cilíndric de 1,8 cm de radi. Quina altura assolirà l'aigua?

7. Quantes copes puc omplir amb 11 litres de refresc, si el recipient cònic de cada copa té una altura interior de 9 cm i un radi interior de 5 cm?

8. Quants quilograms pesa una bola de plom de 17 cm de radi? El plom té una densitat de 11,4 g/cm^3.

9. Calcula el volum d'un tronc de con de 7,6 cm d'altura, sabent que els radis de les seves bases fan 4,9 cm i 2,1 cm.

10. Calcula el volum de l'escultura de la imatge, sabent que les seves bases son rectangles de 3 x 12 dm i la seva altura 20 dm.

Solucions dels exercicis per practicar

1.a) 3 l
b) 50.000.000 l
c) 1,2 l
d) 0,7 l

2.a) 10.000 cm^3
b) 10.000 cm^3
c) 30 cm^3
d) 1.500.000 cm^3

3. 160 gots.

4.a) 6.000 m^3
b) 0,788 m^3
c) 80.000 m^3
d) 0,000016 m^3

5. 342.000.000 m^3

6.a) 0,034 km^3
b) 0,00344 m^3
c) 2.340.000 dm^3
d) 8 mm^3
e) 34,567 dm^3
f) 20.000 cm^3

7. 24 ampolles.

8.a) 250 cm^3
b) 500 hm^3
c) 70 m^3
d) 350 l

9. Mig metre cúbic. Un cub de mig metre d'aresta té un volum de 0,125 m^3.

10. 8.000 l

11. 28592,45 kg

12. 1,26 l

13. 8 cm

14. 400 minuts.

15. 0,31 l

16. 1407 vegades.

17. 29,5%

18. 8 gots.

19. 6,99 cm^3 de agua.

20. 1,35 m^3

21. 657,7 l

22. 28,4 l

23. 77 peces

24. 282,5 minuts.

25. 300 m^2

26. 3409,07 TN

27. 478,01 cm^3

28. 168 cm^3

29. 2,98 cm.

30. 3024 g

31. 646,54 cm^3

32. 37,75 kg

Solucions AUTOEVALUACIÓN

1. 295.000.000.000 l

2. 2.394 g

3. 46,08 cm^3

4. 603,75 dm^3

5. 11.652.437 blocs aprox.

6. 1,95 cm

7. 46 copes

8. 234,6 kg

9. 308,08 cm^3

10. 720 dm^3

No t'oblidis d'enviar les activitats al tutor ▶