Apunts de Matemàtiques per a l'Accés a la UIB per a majors de 25 anys

Teoria i exercicis per a la preparació de les "Proves d'accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys i menors de 40 anys" de l'assignatura de Matemàtiques

Xavier Bordoy

Xisco Sebastià

Títol: ”Apunts de Matemàtiques per a l'Accés a la UIB per a majors de 25 anys. Teoria i exercicis per a la preparació de les Proves d'accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys i menors de 40 anys de l'assignatura de Matemàtiques”
Autors: Bordoy, Xavier; Sebastià, Xisco
ISBN: 979-8-32-481593-6 (tapa dura)
Format: US Executive (7 polsades $\times$ 10 polsades)
Mathematics Subject Classification (2020): 00-01, 00A05, 00A06

La versió d'aquest document és la 2.8.0.rc7 (2024.05.19), amb el contingut generat a partir de la revisió número 449, la qual està disponible a `https://repo.or.cz/apunts-acces-uib-majors-25-anys-matematiques.git/`.

Xavier Bordoy

Professor de Matemàtiques de Secundària (Palma, Illes Balears)
Correu electrònic: `somenxavier@posteo.net`
Mastodon: `https://mathstodon.xyz/@somenxavier`
Web: `https://xavierb.xyz`

Índex

Pròleg

De què va aquest llibre?

Aquesta obra pretén ser un manual per a la preparació de la prova d'accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys [10] de l'assignatura de Matemàtiques. Per tant, l'objectiu és clar: poder servir a l'alumnat en tot el possible per aprovar l'examen.

Des del 2010 fins ara, la prova de Matemàtiques consta de quatre preguntes, una per a cada bloc del temari: Àlgebra lineal, Geometria analítica, Anàlisi, i Probabilitat i Estadística. L'alumne que s'examina ha de triar lliurement tres de les quatre preguntes i, per tant, tres dels quatre blocs. D'aquests quatre blocs, els apunts només en cobreixen tres: es deixa de banda el bloc d'Anàlisi. Per tant, un alumne que empri aquest text pot treure, teòricament, un deu de l'examen però, en canvi, ha de triar sempre els mateixos tipus d'exercicis. El motius d'aquest fet són tres: falta de temps per escriure tot el temari, deixar de banda la part del currículum que necessita més coneixements previs per entendre'l, i, tanmateix, la falta de temps per veure tot el temari — recordem que un curs de preparació a la UIB de qualsevol centre d'Educació de Persones Adultes comprèn d'octubre a principis d'abril, quan solen realitzar-se les proves d'accés, i es disposa de 3 hores a la setmana[1].

L'alumnat que prepara la prova d'accés és ben divers: alumnat que ha acabat l'ESO, alumnat que no ha acabat batxillerat, alumnat amb un cicle formatiu de grau mitjà i, fins i tot, persones amb l'antiga EGB. Per tant, el manual ha de suposar uns coneixements mínims per començar a llegir-lo. Es suposarà que l'alumnat que usi aquests apunts té un coneixement equivalent a l'Educació Secundària Obliga-

[1]No descartem incorporar en futures revisions el bloc d'Anàlisi, per tal que l'alumnat i el professorat puguin triar els tres blocs que considerin més convenients.

tòria (ESO) si vol llegir fluïdament el text: operacions amb els diferents tipus de nombres, resolució d'equacions de primer i segon grau, factorització de polinomis, etc. (vegeu Apèndix A). Tanmateix, recomanem sempre que sigui possible la lectura amb un professor o algú que pugui servir de recolsament en la lectura, ja que el vocabulari i l'estil d'escriptura no són els que l'alumnat d'ESO tenen avesats. Pel que fa al nivell dels continguts, podem dir que es correspon, essencialment, amb un nivell de segon de batxillerat excepte la part de Geometria al pla i Probabilitat i Estadística que equivaldrien a un nivell d'ESO.

D'on prové la idea d'escriure'l?

Aquesta obra prové de la necessitat d'escriure una obra completa i coherent per preparar la prova d'accés i no fer servir materials dispersos i inconnexos.

L'autor original del text és en Xisco Sebastià del CEPA Llevant. El 2014 en Xisco Sebastià, a qui coneixia amb anterioritat, va alliberar el text molt amablement sota una llicència Creative Commons Reconeixement 4.0. Això va permetre que pogués escriure la meva versió dels apunts incorporant els canvis que creia oportuns. De llavors ençà, en Xisco i jo hem intercanviat les nostres versions per poder aprofitar les parts que més ens agraden de l'altra versió.

Segurament existeixen, almenys, dues versions paral·leles: la que manté en Xisco Sebastià, que es pot descarregar a la web oficial del CEPA Llevant, i la meva.

El codi font d'aquest llibre està disponible a l'adreça web `https://repo.or.cz/apunts-acces-uib-majors-25-anys-matematiques.git`.

Com està estructurat aquest llibre?

Cada bloc es divideix en un o més capítols, en els quals hi ha teoria intercalada amb exemples i exercicis d'aplicació directa. Al final de cada tema hi ha la secció "exercicis proposats", la qual conté un compendi d'exercicis mesclats de tot el tema, i la secció que conté algunes de les solucions dels exercicis.

Al final del llibre hi ha diversos apèndixos: el recordatori de matemàtica elemental, exàmens proposats i els exàmens oficials classificats per blocs.

Palma, 19 de maig de 2024.
Xavier Bordoy

Part I

Àlgebra lineal

1
Determinants

Un ***determinant*** és un nombre, que es calcula segons determinades regles, associat a una disposició de nombres escrits en forma de files i columnes. Els determinants tenen el mateix nombre de files i de columnes.

La mida del determinant, és a dir, el nombre de files (i de columnes) que té, s'anomena ***ordre***.

Per indicar el començament i la fi d'un determinant, s'escriu un segment recte vertical al principi i al final dels nombres que el conformen.

Alguns exemples de determinants són:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

En aquest cas, el primer determinant té ordre 2 i el segon determinant té ordre 3.

1.1 Càlcul de determinants

Existeix un procediment de càlcul que depèn de l'ordre del determinant. Els casos que més apareixen en els exercicis són els d'ordre 2 i 3.

Ordre 1 El determinant d'ordre 1 és el propi element que el constitueix:

$$|a| = a$$

No hem de confondre el determinant d'ordre 1 amb el valor absolut del nombre, que es denota de la mateixa manera. Recordem que el ***valor absolut*** d'un nombre és la distància que hi ha a la recta numèrica d'aquest nombre a 0, és a dir, $|-2| = 2$ i $|2| = 2$.

Ordre 2 Es calculen mitjançant la regla següent:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

EXEMPLE 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3{\cdot}(-1) - (-5){\cdot}2 = -3 + 10 = 7$$

Observem que el que va precedit del signe positiu és aquell que s'aconsegueix multiplicant els nombres en *sentit dret*. En canvi, el terme precedit pel signe negatiu s'obté multiplicant els dos nombres en *sentit esquerre*.

Ordre 3 Es calculen mitjançant la regla de Sarrus

ALGORISME 1 (regla de Sarrus)**.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

De la mateixa manera que per als determinants d'ordre 2, els termes del determinant que es calculen multiplicant els nombre en *sentit dret* van precedits de signe positiu i tenen signe negatiu els que provénen de multiplicacions de nombres *en sentit esquerre*. Gràficament (Figura 1.1):

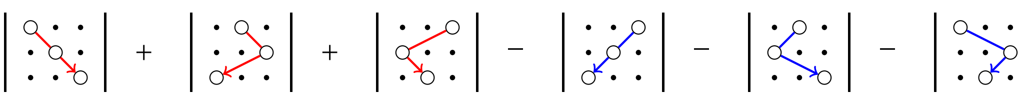


Figura 1.1: Regla pnemotècnica per a recordar la regla de Sarrus

EXEMPLE 2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 \cdot 4 \\ &\quad - (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 4 \\ &= -4 + 0 - 36 - 6 + 30 - 0 \\ &= -16 \end{aligned}$$

EXERCICI 1. Calculeu els determinants següents:

a)
$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

c)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

d)
$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

e)
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

f)
$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Solució. *a*) 5, *b*) −7, *c*) 15, *d*) 30, *e*) −40, *f*) 68. ■

Exercici 2. Calculeu els determinants següents:

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2x^2 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} x+2 & x-2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

c)
$$\begin{vmatrix} 2x & 3 & 0 \\ -2 & 3 & x+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

d)
$$\begin{vmatrix} x & 5+x \\ 7 & -8x \end{vmatrix}$$

e)
$$\begin{vmatrix} 3-x & 4x^2 \\ 6 & 7+2x \end{vmatrix}$$

f)
$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

Solució. *a*) x^2, *b*) $-2x+16$, *c*) $15x+15$, *d*) $-8x^2-7x-35$, *e*) $-26x^2-x+21$, *f*) x^3+3x^2. ■

Ordre ≥ 4 Per a calcular els determinants d'ordre superior a 3 es fa ***desenvolupant*** el determinant per una fila o una columna. En general, es calcula un determinant d'ordre n a partir de n determinants d'ordre $n-1$.

Algorisme 2 (desenvolupament d'un determinant).

1. *Es tria una fila o columna qualsevol (la tria és arbitrària)*
2. *El resultat del determinant és la suma dels elements d'aquesta fila pels seus adjunts.*

L'***adjunt*** d'un element és el determinant que resulta de suprimir la fila i la columna a les quals pertany aquest element. El signe de l'adjunt ve determinat segons l'esquema següent:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

és a dir, s'alternen els signes + i −, començant pel signe + que li correspon a l'element que es troba a la primera fila i primera columna. Això es pot escriure en termes més compactes $(-1)^{i+j}$, on i denota la fila i j la columna. Això vol dir que si la suma de la fila i la columna és parell, aleshores el signe de l'adjunt serà positiu, i si la suma és senar, aleshores l'adjunt tendrà signe negatiu.

Exemple 3. Calcularem el valor del determinant següent desenvolupant-lo per la quarta columna:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= -3 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \left(\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3 \cdot (-70) + 1 \cdot 28 + 0 + 3 \cdot (-77) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Observem que, amb aquest mètode, és convenient triar aquella línea que contengui més zeros, ja que per a aquests no és necessari ni tan sols calcular el seu adjunt.

Exercici 3. Calculeu el valor dels determinants següents:

a)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -6 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Solució. *a*) 2326, *b*) 0 ■

1.2 Exercicis proposats

1.2.1 Càlcul de determinants

Exercici 4. Calculeu el valor dels determinants següents:

$$a)\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad e)\ \begin{vmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix} \qquad f)\ \begin{vmatrix} x & 4x & -1 \\ x & 2x & 0 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix}$$

Exercici 5. Calculeu aquests determinants:

$$a)\ \begin{vmatrix} x+2 & x \\ 3 & 4x \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 2x+3 & 5x^2 \\ 3 & 5x-6 \end{vmatrix}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} 3x & x & 2 \\ 1 & x & x \\ x+1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} x+1 & x & 3 \\ x-5 & x & 2 \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

1.2.2 Resolució d'equacions amb determinants

Per afrontar aquesta secció és necessari conèixer la resolució d'equacions de primer, de segon grau i de grau major o igual que 3 (vegeu Secció A.2, Secció A.4 i Secció A.5; concretament exemple 135).

Exercici 6. Resoleu les equacions següents:

$$a)\ \begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad d)\ \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2 & x & x+1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$b)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad e)\ \begin{vmatrix} x-2 & 1 & x \\ 1 & x-2 & x \\ -2 & -2 & 2x-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Exercici 7. Per a quin valor de x s'anul·la el determinant següent?

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

EXERCICI 8. Resoleu l'equació següent:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

EXERCICI 9. Trobeu, en funció de a, el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

Trobeu les arrels del polinomi resultant.

EXERCICI 10. Trobeu, en funció de a, el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a \\ a & a+1 & 1 \\ a+2 & a & a+1 \end{vmatrix}$$

i digueu quan el determinant val 0.

1.3 Solucions

4 *a*) 13, *b*) 73 *c*) -12 *d*) 18 *e*) -256

5 *a*) $4x^2 + 5x$ *b*) $x^3 - 10x - x + 4$ *c*) $-5x^2 + 3x - 18$ *d*) $-23x$

6 *a*) Hem de resoldre l'equació $x^3 - x = 0$, que té solucions $x = 0, x = \pm 1$.

b) L'equació resultant és $-2a + 2 = 0$, que té com a única solució $a = 1$.

c) Aplicant la regla de Sarrus, obtenim $a^2 + 2a - 3 = 0$, que té solucions $a = 1$ i $a = -3$; s'ha de notar que treient factor comú $a - 1$ podem veure que el determinant és igual a $(a-1)(a+3)$, el que simplifica la resolució.

d) L'equació és $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. Aplicant la regla de Ruffini i la fórmula general de segon grau, obtenim que les solucions cercades són $x = 1, x = 1/2 \pm \sqrt{5}/2$.

e) L'equació que hem de resoldre és $2x^3 - 8x^2 + 10x - 12 = 0$. Aplicant el mètode de Ruffini, obtenim que això és equivalent a $(x-3)(2x^2-2x+4) = 0$. Per tant, la única solució és $x = 3$.

7 Aplicant la regla de Sarrus, obtenim que el determinant val $x - x^3 = x(1-x^2)$. Per tant, el determinant val zero si, i només si, $x = 0$ o bé $x = \pm 1$.

8 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val $x^3 + 1$. Per tant, $x^3 + 1 = 0$ si, i només si $x = \sqrt[3]{-1} = -1$.

9 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val $3a + 1$. Les arrels d'aquest polinomi són $a = -1/3$.

10 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val $-3a^2 + 2a + 5$. Per tant, si resolem l'equació corresponent, $-3a^2+2a+5 = 1$, usant la fórmula de segon grau (vegeu Secció A.4), obtenim que el determinant val 0 si, i només si, $a = -1$ o $a = 5/3$.

2

Matrius

2.1 Definicions

Definició 1 (matriu)**.** Una ***matriu*** és una col·lecció de nombres disposats en files i columnes. Es diu ***quadrada*** si aquesta disposició té tantes files com columnes; en cas contrari es diu ***rectangular***.

Exemple 4. Són exemples de matrius les següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La primera és una matriu rectangular i la segona és una matriu quadrada.

Definició 2 (ordre d'una matriu)**.** L'***ordre*** d'una matriu és el nombre de files i columnes que té, i s'escriu de la forma $n \times m$, on n és el nombre de files i m és el nombre de columnes.

De vegades també s'anomena ***dimensió*** de la matriu.

En el cas de les matrius quadrades es sol indicar el seu ordre únicament amb el nombre de files (o columnes), ja que el nombres de files i columnes coincideixen.

Exemple 5. A l'exemple anterior la primera és d'ordre 2×3, i la segona és d'ordre 2×2, o bé, simplement, d'ordre 2.

Tipus de matrius

Definició 3 (matriu nul·la)**.** Una matriu és ***nul·la*** quan tots els seus elements són iguals a zero.

Exemple 6. Les matrius

a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

són nul·les; d'ordre 3×4 i 3×3 respectivament.

Definició 4 (matriu oposada)**.** Donada una matriu A, la seva ***oposada*** és la matriu formada pels elements d'A amb signe oposat.

Exemple 7. La matriu $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -a & 6 \end{pmatrix}$ és la matriu oposada de la matriu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & a & -6 \end{pmatrix}.$$

Definició 5 (matriu fila)**.** Una matriu es diu ***matriu fila*** si només té una fila, és a dir, quan és d'ordre $1 \times m$.

Definició 6 (matriu columna)**.** Una matriu s'anomena ***matriu columna*** si només té una columna, o sigui, quan té ordre $n \times 1$.

Exemple 8. Les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

són matrius fila i columna, respectivament.

Definició 7 (diagonal principal)**.** S'anomena ***diagonal principal*** d'una matriu quadrada al conjunt d'elements que van del vèrtex superior esquerre a l'inferior de la dreta.

Exemple 9. A la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

els nombres $3, -1$ i 7 són els que formen la diagonal principal.

Definició 8 (matriu identitat)**.** Es diu ***matriu identitat*** (o ***matriu unitat***) a aquella matriu quadrada en la qual tots els elements de la diagonal principal són uns i la resta d'elements són zeros. Es simbolitza per I o Id. Si es vol indicar el seu ordre, aleshores s'indica mitjançant un subíndex:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

són les matrius unitat d'ordre 2, d'ordre 3, etc.

Definició 9 (matriu triangular)**.** Una matriu es diu ***triangular*** quan els elements per davall o per damunt de la diagonal principal són zero.

Definició 10 (matriu diagonal)**.** Una matriu $A = (a_{ij})$ s'anomena ***diagonal*** si, i només si, tots els elements fora de la diagonal principal són zero.

Exemple 10. De les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

la matriu A és una matriu diagonal i la matriu B és una matriu diagonal.

Observació 1. Una matriu no té *res* a veure amb un determinant: un determinant és un nombre i una matriu, una col·lecció de nombres. Encara que a tota matriu quadrada li podem associar un determinant, que es denota per $|A|$ o bé $\det(A)$.

Igualtat entre matrius

Definició 11 (igualtat de matrius)**.** Direm que dues matrius són ***iguals*** si, i només si, tenen el mateix ordre i els seus elements respectius són iguals un a un.

Exemple 11. Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3-3 \\ \pi & 24/2 & -4 \end{pmatrix}$$

són iguals.

Exercici 11. Calculeu el valor de x perquè les matrius A i B siguin iguals, amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -x+4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Operacions amb matrius

2.2.1 Suma i diferència de matrius

Definició 12 (suma i resta de matrius)**.** Per sumar o restar dues matrius, les dues matrius han de tenir el mateix ordre. En aquest cas, la ***suma*** de les matrius es calcula sumant els elements que es troben a la mateixa posició. La ***diferència*** (o resta) es calcula, de manera anàloga, restant els elements corresponents.

És a dir, si sumem dues matrius A i B, llavors l'element de la matriu suma que es troba a la fila i i la columna j és la suma dels elements de A i de B que es troben a la fila i i columna j. De la mateixa manera, l'element de la fila i i columna j que correspon a la resta de $A - B$ es calcula restant els elements A i B de la fila i i columna j.

La matriu que resulta de sumar dues matrius s'anomena ***matriu suma***.

Exemple 12. Vegem una diferència de matrius:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-1) & 3-5 \\ 5-5 & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 12. Calculeu $A+B$, $A-B$, $B-A$ i $-A+B$, amb

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Multiplicació d'un nombre per una matriu

Definició 13 (multiplicació de nombres i matrius)**.** Per ***multiplicar un nombre per una matriu*** es multiplica aquest nombre per cadascun dels elements de la matriu.

De vegades aquest nombre s'anomena ***escalar***.

Exemple 13.

$$-5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5\cdot 1 & -5\cdot(-2) & -5\cdot 0 \\ -5\pi & -5\cdot 12 & -5\cdot(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -5\pi & -60 & 20 \end{pmatrix}$$

Exercici 13. Calculeu

$$-3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Transposició d'una matriu

Definició 14 (transposició de matrius)**.** La ***transposició*** d'una matriu és l'operació per la qual es canvien de manera ordenada les files per les columnes (i viceversa). La ***matriu transposta*** de la matriu A es representa per A^t.

Exemple 14. La matriu transposta de la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

és la matriu

$$A^t=\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 5 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercici 14. Escriviu les transpostes de les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Producte de dues matrius

No sempre és possible multiplicar dues matrius. Per aquest motiu, abans de definir la multiplicació de dues matrius hem de veure quina condició han de complir les matrius que volem multiplicar per a que aquesta operacióes pugui fer.

Condició 1 (producte de dues matrius)**.** *Per poder multiplicar dues matrius s'ha de complir que el nombre de columnes de la primera matriu (la que es col·loca a l'esquerre) ha de coincidir amb el nombre de files de la segona (la que es col·loca a la dreta).*

Aquesta condició, a més de ser necessària per a la multiplicació de dues matrius, és suficient.

Degut a què el nombre de files i de columnes de dues matrius poden ser qualssevol, pot passar que es pugui calcular el producte $A \cdot B$ de les matrius A i B, però que no es pugui calcular $B \cdot A$.

Exemple 15. No podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

però sí podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vegem ara com es multipliquen dues matrius.

Definició 15 (multiplicació de matrius)**.** Siguin A i B dues matrius d'ordres $n \times m$ i $m \times p$ respectivament. El seu producte té ordre $n \times p$, esquemàticament:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & AB \\ n \times m & & m \times p & & n \times p \end{array}$$

El seu producte calcula de la manera següent:

1. L'element c_{ij} de la matriu $A \cdot B$ que està ubicat a la fila i i columna j, es calcula multiplicant la fila i-èssima de A per la columna j-èssima de B, és a dir,

   $$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mj},$$

   on a_{ij} denota l'element de A que està a la fila i-èssima i columna j-èssima, i b_{ij} denota l'element de B que està a la fila i-èssima i columna j-èssima.

2. Això es realitza per a totes les files i columnes

És a dir, en altres paraules, l'element c_{11} s'obté multiplicant la fila 1 de A per la columna 2 de B, l'element c_{12} s'obté multiplicant la fila 1 de A per la columna 2 de B, etc.

Exemple 16.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2(-2) + 0{\cdot}3 + (-3)(-4) & 2(-1) + 0{\cdot}5 + (-3){\cdot}0 & 2{\cdot}0 + 0{\cdot}2 + (-3){\cdot}6 \\ \\ 0(-2) + 1{\cdot}3 + 1(-4) & 0(-1) + 1{\cdot}5 + 1{\cdot}0 & 0{\cdot}0 + 1{\cdot}2 + 1{\cdot}6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

És a dir, l'element que ha d'anar, per exemple, a la 2a fila i 1a columna es calcula sumant els productes dels elements de la 2a fila de la primera matriu amb els elements de la 1a columna de la segona matriu.

Exercici 15. Calculeu els productes de les matrius següents:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3 Propietats de les operacions amb matrius

En aquesta secció ens feim ressò de les propietats de matrius més importants.

Propietats de la transposició de matrius

a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

b) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Propietats dels determinants de matrius

a) El determinant del producte de dues matrius és igual al producte dels seus determinants, és a dir,
$$|A{\cdot}B| = |A| \cdot |B| .$$

b) El determinant d'una matriu (quadrada) A és igual al determinant de la seva matriu transposta, és a dir,
$$|A| = \left|A^t\right| .$$

c) Quan una matriu és triangular, en particular si és diagonal, el seu determinant es calcula multiplicant els elements de la diagonal principal.

Exemple 17. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenim que $|A| = -3$ i $|B| = 2$ i, per tant, $|A| \cdot |B| = -6$, que coincideix amb

$$|A{\cdot}B| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Exercici 16. Tenim dues matrius A i B tals que $|A| = 10$ i $|A \cdot B| = 20$. Calculeu què val $|A|$.

Exemple 18. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es té que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \text{ i } \left|A^t\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16.$$

2.4 Matriu inversa

Definició 16 (matriu inversa)**.** Donada una matriu quadrada A, la seva ***matriu inversa***, que es denota per A^{-1}, és una matriu del mateix ordre tal que compleix les condicions següents de forma simultània:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I, \\ A^{-1} \cdot A &= I. \end{aligned}$$

Noteu que una condició per a què una matriu tengui inversa és que sigui quadrada. Les matrius rectangulars no tenen matriu inversa perquè un dels productes no existeix (vegeu condició 1).

Definició 17 (matriu regular)**.** Les matrius que tenen inversa s'anomenen ***matrius regulars***. En altre cas, es diu que la matriu és ***singular***.

Observació 2. No totes les matrius són regulars: per exemple la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

no té inversa, ja que si en tengués arribaríem a un error: si suposem que $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, aleshores s'hauria de complir, en particular, que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el que implica que

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - t = 0 \\ -x + z = 0 \\ -y + t = 1 \end{cases}$$

Però la primera i la tercera equació impliquen que $0 = 1$, ja que $x-z = 1$ i $-(x-z) = 0$. Contradicció! Per tant, això vol dir que la matriu original no té inversa, ja que si en tengués, llavors arribaríem a un absurd[1].

Com heu vist, saber si una matriu té o no inversa *a pèl* és un poc llarg. El teorema següent estableix un criteri, de comprovació més àgil, per saber quan això passa.

Teorema 1 (criteri per conèixer la regularitat d'una matriu). *Una matriu quadrada A és regular si, i només si, $|A| \neq 0$. És a dir*

$$A \text{ té inversa} \iff |A| \neq 0.$$

Expressat amb paraules:

a) *Si una matriu quadrada té inversa, aleshores el seu determinant és diferent de zero.*

b) *I si el determinant d'una matriu quadrada no val zero, aleshores aquesta matriu té inversa.*

Exemple 19. Apliqueu el resultat anterior per saber si la matriu anterior (observació 2).

Solució. Simplement hem de calcular el determinant de A: $|A| = 1 - 1 = 0$. Per tant, la matriu no té inversa. ■

Ara sabem quina condició s'ha de complir per a què una matriu sigui regular, però com es calcula la matriu inversa d'una matriu quadrada? Sempre podríem procedir com en observació 2, calculant la possible matriu inversa a pèl, però el resultat següent ens proporciona un algorisme més àgil (algorisme 3).

Teorema 2 (càlcul de la matriu inversa). *Si A és regular, aleshores*

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|},$$

on $Adj(A)$ denota la ***matriu adjunta*** *d'A, formada pels adjunts dels elements de A.*

Algorisme 3 (càlcul de la matriu inversa). *Per calcular la matriu inversa d'una matriu quadrada A seguirem les passes següents:*

1. *En primer lloc calcularem $|A|$. Si aquest val 0, ja podem assegurar que la matriu A no té inversa. Si $|A| \neq 0$, seguim amb els punts. següents.*

[1] Aquesta tècnica de demostració s'anomena *reducció a l'absurd*.

2. *Calculam la matriu adjunta de A, és a dir, $Adj(A)$.*
3. *Farem la transposta de $Adj(A)$. La denotarem per $(Adj(A))^t$.*
4. *Finalment, es té que*
$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}.$$

Nota 1. Es pot demostrar que $Adj(A)^t = Adj(A^t)$. Per tant, es pot adaptar l'algorisme anterior si voleu calcular, en primer lloc, la matriu trasposada de A.

Exemple 20. Si existeix, calculeu la matriu inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució. Tenim que $|A| = -9 - 16 = -25 \neq 0$. El fet de què aquest determinant no valgui zero ens assegura que existeix la matriu inversa de A. Anem a calcular-la: la matriu adjunta de A és

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -9 & -8 & 12 \\ -6 & 3 & 8 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

La transposta de l'adjunta és, aleshores,

$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa de A és:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}}{-25} = \begin{pmatrix} 9/25 & 6/25 & 4/25 \\ 8/25 & -3/25 & -2/25 \\ -12/25 & -8/25 & 3/25 \end{pmatrix}$$

■

Observació 3. És el mateix fer la transposada de la matriu dels adjunts de A que la matriu dels adjunts de la transposada de A. En altres paraules, $Adj(A)^t = Adj(A^t)$.

Exercici 17. Esbrineu si les matrius següents tenen o no inversa:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 18. Calculeu, en cas de tenir-ne, les matrius inverses de les matrius següents:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.1 Matriu inversa en funció d'un paràmetre

Exemple 21. Suposem que volem calcular la matriu inversa de

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu depèn del paràmetre a. Per tant, podem suposar que la matriu inversa de B existirà o no segons el valor numèric que prengui el paràmetre a. ¿Què ha de valer a per a què existeixi B^{-1}? Aquest valor de a quedarà imposat per la condició

$$|B| \neq 0,$$

que és la condició que ens assegura que existeix la matriu inversa de B. Calculem $|B|$:

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 21a - 7$$

Aquest determinant val 0 si, i només si, quan $21a - 7 = 0$. És a dir, quan $a = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. Aquí apareixen dues possibilitats:

a) Si $a = 1/3$, tenim que $|B| = 0$, i, per tant, no existeix la matriu inversa de B.

b) Si $a \neq 1/3$, aleshores $|B| \neq 0$, i, per tant, existeix B^{-1}. En aquest cas, podem calcular la matriu inversa de B, que òbviament dependrà del paràmetre a

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & a \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-7a & -1 & 7 \\ -1 & -3 & 21 \\ a & 3a & -7 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu inversa de B és:

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{(Adj(B))^t}{|B|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 2-7a & -1 & a \\ -1 & -3 & 3a \\ 7 & 21 & -7 \end{pmatrix}}{21a-7} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2-7a}{21a-7} & \frac{1}{7-21a} & \frac{a}{21a-7} \\ \frac{1}{7-21a} & \frac{3}{7-21a} & \frac{3a}{21a-7} \\ \frac{7}{21a-7} & \frac{21}{21a-7} & \frac{7}{7-21a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercici 19. Calculeu la matriu inversa de B en funció del paràmetre α, amb

a)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 5 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

c)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & -1 & 2 \\ \alpha & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.5 Rang d'una matriu

Definició 18 (menor d'una matriu)**.** Si en una matriu qualsevol (no necessàriament quadrada) seleccionam p files i p columnes, els elements en què s'encreuen aquestes p files i p columnes formen una submatriu quadrada d'ordre p. El determinant d'aquesta submatriu s'anomena ***menor d'ordre*** p (o simplement *menor*) de la matriu inicial.

Exemple 22. De la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ \pi & 12 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pi & -4 \end{vmatrix}$$

és un menor d'ordre 2.

En aquest cas, hem seleccionat els elements en els quals s'encreuen les files 1 i 2 i les columnes 1 i 3.

Definició 19 (rang d'una matriu)**.** Donada una matriu qualsevol A, es defineix el seu ***rang***, el qual es denota com $rg(A)$ o simplement $rg A$, al màxim ordre dels seus menors no nuls. És a dir, el rang d'una matriu és un nombre p que compleix les condicions següents:

a) Existeix un menor no nul d'ordre p.

b) Tots els menors d'ordre $p+1$ són nuls, o bé no existeixen menors d'ordre $p+1$.

En altres paraules, calculem el

$$\max\{p \mid \text{ existeix un menor d'ordre } p \text{ no nul}\},$$

és a dir, el màxim ordre que té un menor no nul.

Exemple 23. El rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

és 3, ja que existeix, al menys, un menor d'ordre 3 no nul, com, per exemple, el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

i no hi ha cap menor d'ordre 4.

Tot seguit, veurem com podem calcular el rang d'una matriu de forma efectiva. Per això, hem d'introduïr el concepte d'independència lineal. En primer lloc, recordem la definició de combinació lineal:

Definició 20 (combinació lineal)**.** Una línia L és *combinació lineal* de n línies L_1, L_2, …, L_n si, i només si, podem obtenir la línia L com a suma de les línies L_1, …, L_n prèviament multiplicades per nombres reals, és a dir,

$$L = a_1 \cdot L_1 + a_2 \cdot L_2 + \ldots + a_n \cdot L_n.$$

Exemple 24. En la matriu següent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la tercera columna és combinació lineal de les dues primeres, ja que es pot aconseguir sumant la primera columna multiplicada per 2 i la segona columna multiplicada per 3, és a dir, $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$.

Proposició 3 (relació de la combinació lineal i els determinants)**.** *Per un determinant qualsevol, són equivalents:*

- *Existeix una línia que és combinació lineal de les altres línies paral·leles.*
- *Totes les línies són combinació lineal de les altres línies paral·leles.*
- *El determinant val 0.*

Exemple 25. Tal com hem dit en l'example anterior (exemple 24), la tercera columna és combinació lineal de les dues anteriors. Per la proposició, això vol dir que:

- la primera columna també és combinació lineal de la segona i tercera columnes.
- la segona columna és combinació lineal de la primera i tercera columnes.
- el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

  val 0.
- qualsevol fila és combinació lineal de les altres files.

Definició 21 (dependència lineal)**.** Una línia és ***linealment dependent*** de n línies $L_1, L_2, \ldots, L_n$ si, i només si, L es pot expressar com a combinació lineal de $L_1, \ldots, L_n$.

En cas contrari, L és ***linealment independent***, és a dir, no existeixen cap nombres $a_1, \ldots, a_n$ tals que L sigui igual a $a_1 \cdot L_1 + \ldots + a_n \cdot L_n$.

Proposició 4 (fites del rang d'una matriu)**.** *Es pot veure que, si A és una matriu qualsevol d'ordre $n \times m$, aleshores:*

a) rgA *és igual al nombre de línies linealment independents.*

b) $rgA \leq \min\{m, n\}$.

c) $rgA \geq 0$. *I* $rgA = 0$ *si, i només si, A és igual a la matriu nul·la.*

d) Si A no és la matriu nul·la, aleshores $rgA \geq 1$.

Algorisme 4 (càlcul del rang d'una matriu de dalt a baix). *Per a calcular el rang d'una matriu A d'ordre $n \times m$ es segueixen els passos següents:*

a) Es calcula el mínim del nombre de files i columnes d'A, és a dir, $r = \min\{n, m\}$. Aquest és el rang màxim que pot tenir A.

b) Es calculen els menors d'ordre r d'A. Si algun d'aquests és no nul, aleshores automàticament $rgA = r$. En cas contrari, $rgA < r$.

Notem que només calcularem tots *els menors d'ordre r quan* tots *ells sigui nuls. Tot d'una que trobem un menor d'ordre r no nul, ja no calcularem cap més menor d'ordre r i conclourem que $rgA = r$.*

c) Es procedeix de manera anàloga al pas anterior pels menors d'ordre $r - 1$ i es conclou que $rgA = r - 1$ o bé $rgA < r - 1$.

d) Es repeteixen aquestes passes successivament.

Exemple 26. Calculeu el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Solució. *a*) Per la proposició 4, tenim que $rgA \leq \min\{3, 4\} = 3$.

b) Hem de veure si existeix un menor d'ordre 3 no nul. Hi ha quatre possibilitats per a formar menors d'ordre 3: *a*) triar les columnes 1, 2 i 3, *b*) triar les columnes 1, 2 i 4, *c*) triar les columnes 1, 3 i 4 i *d*) triar les colimnes 2, 3 i 4. Si algun d'aquests menors fos no nul, aleshores el rang d'A seria 3. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $rgA < 3$.

c) Vegem si és dos: existeix un menor no nul d'ordre 2? Sí, per exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Per la qual cosa, $rgA = 2$.

■

Exercici 20. Calculeu el valor del rang de la matriu següent:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2.5.1 Rang d'una matriu en funció d'un paràmetre

De vegades, una matriu pot incloure un paràmetre. El rang d'aquesta matriu dependrà, aleshores, del valor que tengui aquest paràmetre. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 27. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Anem a calcular el seu rang. De manera anàloga a l'exemple 26, calcularem el rang d'A arran dels menors més grans possibles. Així, en aquest exemple començarem amb

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 2\alpha + 6 - 4\alpha = 16 - 2\alpha,$$

que és el menor més gran que es pot treure a partir d'A. Aquest menor val 0 si, i només si, $16 - 2\alpha = 0$, és a dir, quan $\alpha = 8$.

Diferenciem casos:

a) Si $\alpha \neq 8$: existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0 ($\Delta \neq 0$), i no hi ha menors d'ordre superior a 3 ($rgA \leq 3$). Per tant, el rang de A és 3.

b) Si $\alpha = 8$: tots els menors d'ordre 3 (de fet, l'únic menor d'ordre 3 en aquest cas) són zero. Per tant, $rgA < 3$. Cerquem, aleshores, un menor d'ordre 2 diferent de 0. Per exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

per la qual cosa el rang és 2.

En conclusió, si $\alpha \neq 8$, aleshores $rgA = 3$. I si $\alpha = 8$, aleshores $rgA = 2$.

Exercici 21. Calculeu rgA en funció del paràmetre α, on

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & \alpha & -2 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

2.6 Exercicis proposats

Exercici 22. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu, si és possible, AB i BA.

Exercici 23. Calculeu $3AA^t - 2I$, amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 24. Comproveu que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ amb les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 25. Determineu els valors de m per als quals es verifica que $X^2 - \frac{5}{2}X + I = \mathbf{0}$, amb

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 26. Determineu a i b de forma que es verifiqui que $A^2 = A$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

Exercici 27. Trobeu totes les matrius X de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ tals que } X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 28. Trobeu dos nombres reals m i n tals que $A + mA + nI = \mathbf{0}$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 29. Siguin A i B les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobeu les condicions que han de complir els coeficientes a, b i c perquè es verifiqui que $AB = BA$.

Exercici 30. Trobeu dues matrius X i Y que verifiquin el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2X-3Y & = & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ X-Y & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Exercici 31. Calculeu, si és possible, la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

d)
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 32. Calculeu la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

a)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$$

b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 33. Digueu en funció dels paràmetres corresponents quan les matrius següents són regulars. En cas de ser-ho, trobeu la seva inversa:

a)
$$A = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{pmatrix}$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \alpha+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

e)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a-1 & -2 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

f)
$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$$

g)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

h)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

i)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

j)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

k)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

l)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

m)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

o)

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

p)

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

Exercici 34. Calculeu el rang de cadascuna de les matrius següents:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercici 35. Estudieu el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$$

d)

$$D = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

e)

$$E = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$$

f)

$$F = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$$

g)

$$G = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 36. Estudieu el rang de la matriu següent en funció de a, b i c:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

2.7 Solucions

22 Tenim que $AB = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ en canvi BA no es pot fer

23 $\begin{pmatrix} 33 & -12 & -15 \\ -12 & 12 & -9 \\ -15 & -9 & 29 \end{pmatrix}$

28 $m = -1$ i $n = 0$

30 $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

33 Les matrius són singulars per *a*) $\alpha = -1$ i $\alpha = -4$, *b*) $a = \pm\sqrt{3}$, *c*) $a = -3$, *d*) $\alpha = -1/3$ i $\alpha = 2$, *e*) $a = 0$, *f*) sempre, *g*) $m = 0$, *h*) $a = 0$ i $a = 1$, *i*) mai, *j*) $a = 0$ i $a = \pm 1$, *k*) $k = 0$, *l*) $a = 1$ i $a = 2$, *m*) $a = 1$ i $a = \pm\sqrt{2}$, *n*) $a = 2$ i $a = \pm\sqrt{2}$, *o*) $a = 0$, *p*) $k = \pm 1$

3

Sistemes d'equacions lineals

3.1 Definicions

Definició 22 (sistema d'equacions lineal). Un ***sistema d'equacions lineals de m equacions i n incògnites*** és un conjunt d'equacions que tenen l'aspecte general següent:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. ,$$

de manera que s'han de verificar conjuntament.

Anomenarem:

a) A $x_1, \ldots, x_n$ les ***incògnites*** del sistema

b) A a_{ij}, on $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$, els ***coeficients*** del sistema

c) A $b_1, \ldots, b_m$ els ***termes independents*** del sistema

Una ***solució*** del sistema és un conjunt de valors $c_1, \ldots, c_n$ de manera que verifiquen simultàniament cada equació, és a dir,

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11} \cdot c_1 + a_{12} \cdot c_2 + \ldots + a_{1n} \cdot c_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot c_1 + a_{22} \cdot c_2 + \ldots + a_{2n} \cdot c_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot c_1 + a_{m2} \cdot c_2 + \ldots + a_{mn} \cdot c_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Aquests valors es poden escriure en forma de n-tupla ordenada $(c_1, \ldots, c_n)$.

Resoldre el sistema és trobar totes les n-tuples que són solució d'aquest.

3.2 Tipus de sistemes

Definició 23 (tipus de sistemes lineals)**.** Atenent al nombre de solucions, un sistema pot esser de diversos tipus:

- Si un sistema no té solució, s'anomena ***incompatible***
- Si té solució, s'anomena ***compatible***.
  - Si el sistema té una sola solució, aleshores s'anomena ***compatible determinat***.
  - Si el sistema té més d'una solució, aleshores s'anomena ***compatible indeterminat***. En els sistemes lineals, un sistema compatible indeterminat té infinites solucions (no en pot tenir un nombre finit distint d'1).
    - Un sistema compatible indeterminat es diu ***simplement indeterminat*** si el conjunt de solucions depèn d'un paràmetre.
    - Un sistema compatible indeterminat es diu ***doblement indeterminat*** si el conjunt de solucions depèn de dos paràmetres.[1]

Definició 24 (sistema homogeni)**.** Un sistema d'equacions s'anomena ***homogeni*** si tots els seus termes independents són iguals a zero. És a dir, els sistemes d'equacions tenen la pinta següent:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exemple 28. El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x - y + 6z & = & -9 \\ -x + 3y - 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

és compatible, ja que el conjunt de tres nombres $x = -2, y = 1, z = 0$ és solució del sistema, donat que

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4 \cdot (-2) - 1 + 6 \cdot 0 & = & -9 \\ -(-2) + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 & = & -1 \end{array}\right.$$

En canvi, el conjunt $x = 3$, $y = 27$, $z = 1$ no es solució, ja que alguna de les equacions no es verifica (la segona en aquest cas):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4 \cdot 3 - 27 + 6 \cdot 1 & = & -9 \\ -3 + 3 \cdot 27 - 2 \cdot 1 & \neq & -1 \end{array}\right. .$$

[1] Per exemple, les solucions del sistema format per l'única equació $2x - 3y + 4z = 1$ es poden expressar com $y = a, z = b$ i $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2b$, on a i b són nombres reals qualssevol (paràmetres).

Exemple 29. El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ x+y &=& 2 \end{array}\right\}$$

és incompatible (no té solució), ja que no existeixen dos nombres, x i y, tals que la seva suma sigui, a la vegada, 3 i 2 (o la suma dóna 3 o dóna 2, però no els dos valors a la vegada).

3.3 Sistemes matricials

Per resoldre sistemes d'equacions de forma còmoda, és necessari passar de la seva forma algebraica clàssica (com a conjunt d'equacions) a una forma matricial (com a igualtat entre matrius). Això facilitarà enormement esbrinar el nombre de solucions d'un sistema i el seu càlcul.

Un sistema de m equacions i n incògnites $x_1, \ldots, x_n$ adopta la forma general:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}\right. .$$

Aquest es pot expressar de forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o bé en la forma més compacte

$$A \cdot x = b,$$

on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

La matriu A s'anomena ***matriu de coeficients del sistema***, la matriu columna b s'anomena ***matriu de termes independents*** i x reb el nom de ***matriu de variables***.

Anomenarem ***matriu ampliada (o completa) del sistema*** i la representarem com a M, a la matriu d'ordre $m \times (n+1)$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Exemple 30. Per exemple, en el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & -2 \end{array}\right.$$

les incògnites són x, y i z, i els termes independients són 0 i -2. La matriu dels coeficients i la matriu ampliada són, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple 31. El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x - y + 6z & = & -9 \\ -x + 3y - 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

és el mateix que

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Regla de Cràmer

La regla de Cràmer permet trobar la solució de sistemes d'equacions lineals en els que es verifiquin, simultàniament, les condicions següents:

- Hi ha tantes equacions com a incògnites.
- La matriu de coeficients té determinant no nul.

Amb aquestes condicions, la regla de Cràmer permet trobar la solució del sistema. En aquest cas, podem assegurar que només existeix una única solució (el sistema és compatible determinat), però això ho veurem més endavant (Secció 3.5).

Algorisme 5 (regla de Cràmer)**.** *Sigui*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. .$$

un sistema d'equacions de n equacions amb n incògnites tal que el determinant de la seva matriu de coeficients, $|A|$, és no nul. Aleshores, el sistema té una única solució, $(x_1, \ldots, x_n)$, que ve donada per:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Exemple 32. Resoleu el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x + 3z &= -2 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

Solució. Aquest sistema té 3 equacions i 3 incògnites i, a més, es compleix que

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 6 = -8 \neq 0$$

Per tant, podem aplicar la regla de Cràmer, amb el que la solució del sistema és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{-8} = \frac{-7}{8}$$

Per tant, $(5/8, 3/8, -7/8)$ és la solució del sistema d'equacions. ■

Exercici 37. Resoleu els sistemes següents:

a)

$$\begin{cases} x+y-2z &= 5 \\ 2x-y &= 3 \\ 3x+5z &= 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} -2y-z &= 2 \\ x-y-z &= 7 \\ 3x-8z &= 31 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x+y-z &= \frac{9}{10} \\ -2x+5y &= 1 \\ 2x-z &= 2 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} -x-2y+5z &= -3 \\ 3x+3z &= 4 \\ 2x-2y+z &= 0 \end{cases}$$

Solució. *a*) $x = 2$, $y = 1$ i $z = -1$; *b*) $x = 5$, $y = 0$ i $z = -2$; *c*) $x = 1/2$, $y = 2/5$ i $z = 0$; *d*) $x = 25/21$, $y = 53/42$ i $z = 1/7$ ■

3.5 Classificació d'un sistema de equacions

Per suposat, no tots els sistemes d'equacions lineals tenen tantes equacions com incògnites, i fins i tot en aquest cas, no tots compleixen que el determinant de la seva matriu de coeficients sigui no nul. Per tant, la regla de Cràmer no és aplicable en aquests casos. Ara bé, tendrem algorismes per a la resolució dels sistemes d'equacions més generals (Secció 3.7)

Tot i així, abans d'ocupar-nos de la resolució general dels sistemes d'equacions lineals, ens interessarem sobre els criteris que han de complir per a què aquests tenguin solució. És a dir, estudiarem en quins casos un sistema d'equacions té solució i, en aquest cas, quantes en té. D'aquesta manera, podem assegurar-nos que, abans de resoldre un sistema d'equacions, aquest té una solució i, per tant, no començarem a resoldre sistemes que no tenguin solució, amb el conseqüent guany de temps.

Teorema 5 (teorema de Rouché-Frobenius)**.** *Sigui un sistema d'equacions lineals qualsevol amb n incògnites. I siguin A la matriu de coeficients i M la matriu ampliada. Aleshores:*

- $rgA \neq rgM \iff$ *El sistema és incompatible (no té solució).*
- $rgA = rgM \iff$ *El sistema és compatible (té solució).*
  - $rgA = rgM = n \iff$ *El sistema és compatible determinat (té una única solució).*
  - $rgA = rgM < n \iff$ *El sistema és compatible indeterminat (té infinites solucions).*

D'aquesta manera, per saber si un sistema d'equacions té solució o no, en primer lloc s'han de calcular els valors de rgA i rgM i procedir a classificar el sistema segons la taula anterior.

Observació 4. Recordem que el rang d'una matriu és el nombre de línies linealment independents (proposició 4). Per tant, clarament, tenim que

$$rgA \leq rgM$$

Notem que, en el cas d'un sistema homogeni, aquest desigualtat realment és una igualtat, és a dir, $rgA = rgM$.

Observació 5. La idea que s'amaga darrera del teorema de Rouché-Frobenius (teorema 5) és analitzar si una equació és combinació lineal de les altres: si això passa, aleshores la podem suprimir del sistema, ja que aquesta equació no ens aporta cap informació. Per exemple, en el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+4z & = & 2 \\ x+2y+3z & = & 1 \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

tenim que la tercera equació és combinació lineal de les dues primeres ($L_3 = L_1 - L_2$). En el nostre cas, això és el mateix que dir que el rang de la matriu ampliada és menor que 3 (el nombre d'incògnites), per aplicació de proposició 4, ja que les files de la matriu ampliada són les equacions del sistema d'equació. Si el rang de la matriu ampliada coincideix amb el nombre d'incògnites, vol dir que totes les equacions són linealment independents i, per tant, no n'hi ha cap que sigui deduïble de les altres.

D'altra banda, la comparació entre els rangs de la matriu ampliada i la matriu de coeficients ens dóna informació sobre la compatibilitat del sistema. Per a què un sistema tengui solució, la independència lineal de les seves equacions ha de ser la mateixa que la independència lineal de les equacions considerades sense termes independents.

Exemple 33. Classifiqueu el sistema de equacions següent:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-y+z & = & 0 \\ x+3z & = & -2 \\ 3x-y+4z & = & -2 \end{array}\right.$$

Solució. Per a determinar quin tipus de sistema és, hem de calcular els rangs de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- Com que

  $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

  aleshores $rgA < 3$. Si cercam un menor d'ordre 2, en trobem un no nul:

  $$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

  Per tant, $rgA = 2$.

- Com que $rgA = 2$ i $rgA \leq rgM$, sabem que $rgM \geq 2$. Hem de veure si rgM pot ser igual a 3. Per aixo, hem de calcular tots els menors d'ordre 3 de M. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

  pel que $rgM = 2$.

- Per tant, $rgA = rgM = 2 < 3$. Per la qual cosa, aquest sistema és compatible indeterminat. Per tant, té un nombre infinit d'incògnites.

■

Exercici 38. Clasifiqueu els sistemes d'equacions següents:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - 3z &= 3 \\ 3x - 3y - 2z &= 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 4y + z &= 0 \\ 2x - z &= 3 \\ x + y + z &= 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -2x + y - z &= 1 \\ 2x - 5z &= 4 \\ -6x + 2y + 3z &= 0 \end{cases}$$

Solució. *a*) Compatible indeterminat *b*) Compatible determinat *c*) Incompatible ■

3.6 Discussió d'un sistema de equacions

Quan en un sistema apareix un paràmetre en els termes independents o en els coeficients del sistema, aleshores la classificació d'aquest depèn del valors que té aquest paràmetre. En aquest cas, classificar el sistema en funció d'aquest paràmetre s'anomena ***discutir*** el sistema.

Exemple 34. Discutiu el sistema d'equacions en funció del paràmetre α

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z &= 0 \\ x - 3z &= -2 \\ 3x - \alpha y + 2z &= -2 \end{cases}$$

Solució. Estudiem els valors dels rangs de les seves matrius de coeficients i ampliada en funció del paràmetre α.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -\alpha & 2 \end{vmatrix} = 33 - 11\alpha$$

Pel que, $|A|$ valdrà zero si, i només si, $33 - 11\alpha = 0$, és a dir, si $\alpha = 3$. D'aquí es segueix que hem de diferenciar casos:

a) Si $\alpha \neq 3$, aleshores $|A| \neq 0$. Per tant, $rgA = 3$. I, per tant, com que $rgA \leq rgM \leq 3$, tenim que $rgM = 3$. I tenim tres incògnites, pel que el sistema és compatible determinat (té una única solució per a cada valor concret de α).

b) Si $\alpha = 3$, aleshores les matrius de coeficients i ampliades són:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, sabem que $rgA < 3$ (l'únic menor d'ordre 3, $|A|$, és zero). I com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

aleshores $rgA = 2$ (hi ha un menor d'ordre dos no nul).

Queda ara calcular el rang de M. Sabem segur que rgM com a mínim és 2. Hem de veure si pot ser tres. Per això, calculem tots els menors d'ordre tres:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, $rgM = 2$.

En resum, si $\alpha \neq 3$, el sistema és compatible determinat. I si $\alpha = 3$, el sistema és compatible indeterminat. ■

Exercici 39. Classifiqueu els sistemes següents en funció del paràmetre α:

a)

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ \alpha x - 3z = 3 \\ 3x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + \alpha y + z = -1 \\ 2x + 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = \alpha \\ 3x + y = 10 \\ \alpha x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

Notem que l'aplicació del teorema de Rouché-Frobenius (teorema 5) no proporciona les solucions del sistema, sinó tan sols quantes en té. En l'apartat següent es mostra com trobar aquestes solucions.

3.7 Resolució d'un sistema d'equacions

La resolució d'un sistema d'equacions varia lleugerament segons si aquest és un sistema compatible determinat o un sistema compatible indeterminat. Ara bé, a grans trets, sempre es realitzen els mateixos passos:

1. En primer lloc, s'esbrina si el sistema és compatible o incompatible usant el teorema de Rouché-Frobenius (teorema 5). En cas de què el sistema sigui incompatible, s'ha acabat (no hi ha solució per tant no es pot calcular).

2. Quan es té un sistema compatible, es determina si aquest és determinat o indeterminat.

   (a) Si el sistema és compatible determinat, s'usa la regla de Cràmer per a resoldre el sistema i es calcula la seva única solució.

   (b) En l'altre cas, es transforma el sistema en un altre compatible determinat, el qual depèn d'un paràmetre, i es calcula la seva solució, aplicant, de nou, la regla de Cràmer. En aquest cas, s'obté una solució que depèn d'un paràmetre.

Volem exemples de cadascun dels casos comentats.

Exemple 35 (resolució d'un sistema compatible determinat). Resoleu el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-2y+3z & = & -2 \\ 4x-3y & = & 0 \\ y+z & = & -1 \\ 3x-2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Solució. Volem resoldre aquest sistema. Per fer-ho, escrivim les matrius de coeficients i ampliada, respectivament:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i calculem els seus rangs:

- A té un menor d'ordre 3 no nul:

  $$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0,$$

  Per tant, $rgA = 3$ (recordem que $rgA \leq 3$ perquè no hi pot haver menors d'ordre 4).

- $|M| = 0$, ja que

  $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

  (que és l'únic menor d'ordre 4 de M). Per tant, $rgM = 3$.

- Com que $rgA = rgM = 3$, aleshores el sistema és compatible determinat (teorema de Rouché-Frobenius).

Per tant, per ara sabem que el sistema té una solució i que aquesta és única, però encara no sabem com calcular-la. El pas següent és reduïr el nombre d'equacions del sistema: el nostre sistema té tres incògnites i quatre equacions. Per tant, de qualque manera, *sobra* una equació. Per saber quina sobra, trobarem quines equacions són (linealment) independents unes de les altres. Ara bé, hem vist que el menor

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

era diferent de zero. Aquest menor correspon a les files 2a, 3a i 4a. Això vol dir que les equacions 2a, 3a i 4a són independents unes de les altres (tres línies són linealment independents si el seu determinant no és zero). O sigui, la primera equació és redundant (és combinació lineal de les altres).

Aleshores, a partir d'ara les úniques equacions que es tendran en compte seran la segona, la tercera i la quarta. El nostre sistema és ara:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 4x - 3y & = & 0 \\ y + z & = & -1 \\ 3x - 2z & = & -1 \end{array} \right.$$

Ara el nostre sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer ($\Delta \neq 0$ i hi ha tantes equacions com a incògnites). Aleshores, aplicant aquesta regla es té que la seva solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{3}{-17} = \frac{-3}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{4}{-17} = \frac{-4}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{13}{-17} = \frac{-13}{17}$$

Per tant, l'única solució del sistema és:

$$x = \frac{-3}{17},\ y = \frac{-4}{17},\ z = \frac{-13}{17}$$

■

Exercici 40. Resoleu els sistemes següents:

a)

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+y & = & -1 \\ -x+3y & = & 2 \\ 3x+4y & = & 1 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y-z & = & 5 \\ -x+4y-2z & = & 9 \\ 4x-4y & = & -4 \end{array}\right.$$

Exemple 36 (resolució d'un sistema compatible indeterminat). Resoleu el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} 6x+y-3z & = & 1 \\ 2x-y+z & = & -1 \\ 10x-y-z & = & -1 \end{array}\right.$$

Solució. La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, hem de calcular rgA i rgM per a saber de quin tipus de sistema es tracta:

- En primer lloc, calculem el determinant d'A:

  $$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

  Per tant, $rgA<3$. I com que

  $$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=6+6=12\neq 0,$$

  aleshores $rgA=2$.

- Per a calcular rgM, mirem si existeixen menors d'ordre tres no nuls. Ja sabem que $|A|=0$. Per tant, ens queden tres menors d'ordre tres a calcular:

  $$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

  Per tant, el rgM no pot ser 3. I com que $rgA\leq rgM$, tenim que $rgM=2$.

- Amb tot, el sistema és compatible indeterminat, ja que $rgA=rgM=2<$ nombre d'incògnites del sistema. Per tant, té infinites solucions.

El menor que ha decidit el rang d'ambdues matrius ha estat

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Per tant, aquest és el menor que indica quines són les *les equacions i incògnites principals* del sistema. Aquest menor correspon a les files 1a i 2a i a les columnes 1a i 3a. Per les que les úniques equacions que es tendran en compte a partir d'ara seran la primer i la segona. D'altra banda, aïllarem a l'esquerre del símbol =, les incògnites x i z (que són la primera i la tercera), i es passaran a la dreta de l'igual els termes de la incògnita y. Aleshores, el nostre sistema és ara:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 6x-3z &=& 1-y \\ 2x+z &=& -1+y \end{array}\right.$$

Les incògnites x i z depenen d'una tercera incògnita, y, que pot tenir el valor que es vulgui. És a dir, y és un paràmetre. Per a fer constar aquest fet i no confondre una incògnita amb un paràmetre, es fa el canvi de variable $y = \lambda$, on λ és un nombre real qualsevol. Amb tot el sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 6x-3z &=& 1-\lambda \\ 2x+z &=& -1+\lambda \end{array}\right.$$

Ara volem resoldre aquest sistema que té incògnites x i z. Aquest sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer (té tantes equacions com a incògnites i el determinant de la matriu de coeficients és no nul, ja que aquest és Δ). Aplicant la regla de Cràmer, s'obté que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-2+2\lambda}{12} = \frac{2\,(-1+\lambda)}{2\cdot 6} = \frac{-1+\lambda}{6} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1-\lambda \\ 2 & -1+\lambda \end{vmatrix}}{12} = \frac{-8+8\lambda}{12} = \frac{4\,(-2+2\lambda)}{4\cdot 3} = \frac{-2+2\lambda}{3} \end{aligned}$$

Per tant, les solucions del sistema d'equacions són:

$$x = \frac{-1+\lambda}{6},\ y = \lambda\ z = \frac{-2+2\lambda}{3},$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ és un nombre qualsevol. ■

Exercici 41. Resoleu els sistemes següents:

a)

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-5y+2z &=& -3 \\ -5x-y &=& 2 \\ -4x-6y+2z &=& -1 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y-z &=& 1 \\ 3x-y &=& 4 \\ 7x+5y-2z &=& 6 \end{array}\right.$$

3.7.1 Resolució de sistemes d'equacions amb un paràmetre

La solució, en cas d'existir, d'un sistema d'equacions lineals en el que apareix un paràmetre dependrà del valors d'aquest paràmetre. Vegem-ne un exemple.

Exemple 37. Resoleu el sistema d'equacions

$$\left\{\begin{array}{rcc} \alpha x + y + z & = & 4 \\ x + y + z & = & \alpha \\ x - y + \alpha z & = & 2 \end{array}\right.$$

Solució. Aquest sistema depèn del paràmetre α. L'existència de solucions i quines siguin aquestes solucions, en cas d'existir, dependrà, doncs, del valor d'α.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, hem de classificar el sistema. Per tant, hem de calcular rgA i rgM. Però, com què ambdues matrius depenen d'α, aquests rangs també dependran d'aquest paràmetre. D'aquesta manera, hem d'estudiar els rangs de A i M en funció d'α.

Comencem, per exemple, amb la matriu de coeficients. Prenem el menor més gran possible:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$$

Aquest menor valdrà zero si, i només si,

$$\alpha^2 - 1 = 0 \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm 1$$

Per tant, hem de considerar diverses possibilitats:

a) Si $\alpha \neq \pm 1$, aleshores $|A| \neq 0$. Per tant, existeix un menor d'ordre 3 no nul. El que implica que, $rgA = 3$. I aleshores $rgM = 3$. Per tant, el sistema és compatible determinat. I a més es compleixen les condicions de la regla de Cràmer. Per tant,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 4)(-\alpha - 1)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{4 - \alpha}{\alpha - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^3 - 7\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 3)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha + 3)}{\alpha + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha - 10}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha + 5)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}$$

Per tant, per a cada possible valor de α, tenim una única solució.

b) Si $\alpha = 1$, aleshores les matrius A i M són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esbrinem el rang de M. Per això, calculem tots els seus menors d'ordre 4, excepte $|A|$ que ja hem calculat. Ara bé, no importa calcular-los tots[2], ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Per tant, tenim que $rgM = 3$. Ara bé, $rgA \neq 3$. Per tant, el sistema és incompatible. I per tant, no té solució.

c) Si $\alpha = -1$, aleshores les matrius de coeficients i ampliada són iguals a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabem que $rgA \neq 3$. D'altra banda, $rgM = 3$, ja que el menor següent és no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Per tant, de nou, el sistema és incompatible.

■

Exercici 42. Resoleu els sistemes següents en funció del paràmetre corresponent:

a)

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \lambda x + y - z & = & 2 \\ 3x + 2y + z & = & 8 \\ -x - 2y + z & = & -4 \end{array} \right.$$

b)

$$\left. \begin{array}{rcr} 2\lambda x + y + \lambda z & = & 2 \\ 3x + 2y + \lambda z & = & 8 \\ 5x + 3y & = & 10 \end{array} \right\}$$

[2]Els altres dos menors donen 0 i 6.

3.8 Exercicis proposats

Exercici 43. Apliqueu la regla de Cràmer per resoldre els sistemes següents:

$$a)\ \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 3x-2y=4 \\ y-z=4 \\ 2x+2z=4 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 3y+2z=-1 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} 2x+3y+4z=0 \\ -5x-4y-3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x+y+2z=2 \\ x-z=0 \\ y-z=-1 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Exercici 44. Classifiqueu els sistemes d'equacions següents:

$$a)\ \begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 6x-2y=-1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-y-t=2 \\ z-t=0 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 5x+z=2 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases}$$

Exercici 45. Discutiu els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:

$$a)\ \begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+y+z=m \\ x-y+mz=2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+my+z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} mx+y+z=m \\ x+y+z=3 \\ x+y+mz=3 \end{cases}$$

Exercici 46. Resoleu, si es pot, els sistemes següents:

$$a)\ \begin{cases} -x+2y+z=3 \\ 5x-y+4z=3 \\ -3x+3y-5z=-2 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x-3y+8z=2 \\ x+3y-z=8 \\ -x+2y+z=-3 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x+2y+5z=1 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x-4y+z=-6 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 6x-4y+7z=11 \\ -x+2y+3z=2 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + 4y - 5z = 0 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + 5y + 7z = 1 \\ -x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

Exercici 47. Resoleu els sistemes compatibles de l'exercici 44.

Exercici 48. Resoleu aquests sistemes compatibles indeterminats:

$$a)\ \begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ x + 3y + 4z = 11 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - 6y + 3z = 18 \\ x - 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x + 2y + 6z = 12 \\ x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ 2x - y = 5 \\ 5x + z = 20 \end{cases}$$

Exercici 49. Discutiu i resoleu els sistemes següents en funció del paràmetre corresponent:

$$a)\ \begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x - az = 1 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercici 50. Hi ha algun valor de a per al qual el sistema tengui infinites solucions?

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+1)x + 2y + z & = & a + 3 \\ ax + y & = & a \\ ax + 3y + z & = & a + 2 \end{array}\right\}$$

3.8.1 Problemes de sistemes d'equacions

Exercici 51. En una fàbrica es produeixen tres tipus de perns: A, B i C. Es fabriquen 140 per hora. El nombre de perns del tipus B representa 3/5 del nombre de perns de tipus A, i el nombre de perns del tipus C és 1/4 del nombre de perns del tipus B. Quants perns de cada tipus es fabriquen cada hora?

Exercici 52. Els diners que tenc a totes les meves butxaques, esquerra, dreta i del darrere, sumen 200€. A la butxaca del darrere tenc la mateixa quantitat de diners que tenc a les butxaques dreta i esquerra. I a la butxaca esquerra tenc 3/2 dels diners que tenc a la butxaca dreta. Quants diners tenc a cada butxaca?

Exercici 53. Tres amics va al forn a comprar bunyols: el primer compra 3 bunyols de crema, 2 de nata i 1 de xocolata i li costen 15,75€. El segon compra 2 bunyols de crema, 1 de nata i 1 de xocolata i li costen 10 €. Finalment, el tercer en compra dos de cada tipus i es gasta 15€. Perden la factura i volen saber què costa cada tipus de bunyol.

La Mariona va tres diumenges seguits a la pastisseria. El primer diumenge compra tres pastissets de moniato, dos de nata i un de xocolata, i es gasta 15,75 €. El segon diumenge compra dos pastissets de moniato, un de nata i un de xocolata, i es gasta 10 €. El tercer dia compra un pastisset de cada tipus i es gasta 7,5 €. Quin és el preu de cada pastisset?

Exercici 54. En la fruitera hi ha 12 peces de fruita entre pomes, peres i plàtans. El triple del nombre de pomes és igual a la suma del nombre de peres i plàtans i el doble del nombre de peres és igual a la suma del nombre de pomes i plàtans. Trobeu el nombre de pomes, peres, i plàtans que hi ha a la fruitera.

Exercici 55. Dos amics inverteixen 20.000 € cadascun. El primer col·loca una quantitat A al 4% d'interès, una quantitat B al 5% i la resta al 6%. L'altre inverteix la mateixa quantitat A al 5%, la quantitat B al 6% i la resta al 4%. Determineu les quantitats A, B i C si el primer obté uns interessos de 1.050 € i el segon de 950 €

Exercici 56. Una botiga ha venut 600 exemplars d'un article per un total de 6.384€. El preu original era de 12 €, però també han venut còpies defectuoses, amb descomptes del 30% i del 40%. També sabem que el nombre de còpies defectuoses venudes va ser la meitat del de còpies en bon estat. Amb aquestes informacions, calculeu el nombre de còpies que es varen vendre amb el preu original, amb el 30% de descompte i amb el descompte del 40%.

Exercici 57. Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 €, i un total de 2.000€. Si el nombre de bitllets de 10€ és el doble que el nombre de bitllets de 20€, calculeu quants de bitllets hi ha de cada tipus.

Exercici 58. La suma de les tres xifres d'un nombre és 7. La xifra de les centenes és igual a la suma de la xifra de les desenes més el doble de la xifra de les unitats. D'altra banda, si s'inverteix l'ordre de la xifres, el nombre original disminueix en 297 unitats. Calculeu les xifres del nombre inicial

Exercici 59. Es vol fer un *clúster* d'ordinadors a partir de tres models diferents: A, B i C, els quals tenen 8 nuclis, 4 nuclis i 2 nuclis en el processador, respectivament. El clúster ha de tenir 100 ordinadors i ha de comptar amb 500 nuclis de processament. Finalment es decideix que el sistema en conjunt consumeixi 2600W/h. En aquest sentit, sabem que els ordinadors del model A consumeixen 50W/h, els del model B, 15W/h i els del model C, 5W/h. Quants d'ordinadors de cada tipus han d'escollir per a fabricar el clúster especificat?

Exercici 60. En el mercat es poden trobar tres classes d'aliments preparats per cans, el quals contenen les quantitats següents de proteïnes, lípids i glúcids per quilogram de producte:

- 600g de proteïnes, 300g de lípids i 100g de glúcids.

- 200g de proteïnes, 600g de lípids i 200g de glúcids.
- 300g de proteïnes, 400g de lípids i 300g de glúcids.

Volem mesclar aquests productes per tal d'oferir al nostre ca 470 grams de proteïnes, 370 grams de lípids i 160 grams de glúcids per a cada quilogram d'aliment, quin percentatge dels productes anteriors hem de mesclar per obtenir els valors desitjats?

Exercici 61. Tres amics volen determinar el seu pes, el qual és inferior a 100kg, amb una bàscula que només pesa quantitats superiors a 100 quilograms. Tots tres plegats pesen 200kg; el primer amic més el segon amic pesen 120kg; i el segon, el tercer amic i un objecte de 10 quilograms pesen 140kg. Determinau què pesa cada amic.

Exercici 62. Un país decideix crear una organització educativa formada per càrrecs polítics; docents d'infantil, primària i secundària; i catedràtics d'universitat. Sabem, que l'organització ha de tenir 700 membres i, per assegurar la independència política, el nombre de càrrecs polítics ha de ser un sisè de la suma de docents i catedràtics. D'altra banda, per raons tècniques, el nombre de catedràtics d'universitat i polítics han de sumar la meitat dels membres totals de l'organització. Determineu quants membres de cada tipus ha de tenir l'organització.

Exercici 63. En un sistema ecològic es sap que hi ha depredadors i dues classes de preses A i B. Per a què el sistema funciona de forma òptima, el nombre depredadors ha de ser la meitat de la suma de les preses. Les preses del tipus A ha de ser igual inferior a 200 individus al doble de les preses del tipus B. Per últim, sabem que en total hi ha d'haver 1500 animals. Calculeu quants de tipus d'animals hi ha d'haver per assolir l'òptim d'aquest sistema.

Exercici 64. Un pintor només diposa a la seva paleta de colors de tres colors diferents: ultramarí, marró i herba. Vol mesclar-los per obtenir un altre color, que ha anomenat cambrià.

- El color ultramarí conté $\frac{0}{255}$ parts de color vermell, $\frac{30}{255}$ parts de color verd i $\frac{90}{255}$ parts de color blau.
- El color marró conté $\frac{90}{255}$ parts de color vermell, $\frac{60}{255}$ parts de color verd i $\frac{10}{255}$ parts de color blau.
- El color herba conté $\frac{10}{255}$ parts de color vermell, $\frac{90}{255}$ parts de color verd i $\frac{0}{255}$ parts de color blau.[3].

Quin tant per cent de cada color ha de mesclar per obtenir el color cambrià, que té $\frac{55}{255}$ parts de vermell, $\frac{54}{255}$ de color verd i $\frac{33}{255}$ de color blau?

[3]En termes informàtics, això s'anomena codi RGB.

3.9 Solucions

46 *a*) $(0, 1, 1)$ *b*) $(1, 2, -1)$ *c*) $(5, 1, 0)$ *d*) $(1/2, -1/4, 1)$ *e*) compatible indeterminat $(\lambda/2, 3\lambda/2, \lambda)$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$ *f*) incompatible

51 80 perns del tipus *A*, 48 perns del tipus *B* i 12 del tipus *C*

52 A l'esquerra tenc 60€, a la dreta, 40€ i al darrere, 100€.

53 Un bunyol de crema costa 2,5€, el de nata, 3,25€ i el de xocolata, 1,75€.

54 Hi ha 3 pomes, 4 peres i 5 plàtans.

55 Inverteixen 5.000€, 5.000 € i 10.000€.

56 El nombre de còpies venudes amb el preu original va ser de 400 exemplarts, el nombre de còpies vemnudes amb el 30% de descompte va ser de 120 exemplars, i el nombre de còpies venudes amb el 40% de descompte va ser de 80 exemplars.

57 El nombre de bitllets de 10€, 20€ i 50€ és 50, 25 i 20, respectivament.

58 El nombre original és 421.

59 Han d'escollir 40 ordinadors del model *A*, i 30 dels models *B* i *C*.

60 Hem de mesclar 62%, 16% i 22% de cada producte.

61 Els amics pesen 70, 50 i 80 quilograms repectivament.

62 Els càrrecs polítics són 100, el nombre de docents són 350 i el nombre de catedràtics universitaris són 250.

63 Hi ha d'haver 500 depredadors, 600 preses del tipus *A* i 400 preses de tipus *B*.

64 Ha de mesclar un 30% de color ultramarí, un 60% de color marró i un 10% de color herba.

Part II

Geometria analítica

4

Geometria del pla

En aquest tema s'estudiaran els vectors i les rectes definits sobre un espai de dues dimensions.

4.1 Punts

Aquest apartat tracta de l'estudi dels vectors i de les seves operacions a l'espai de dues dimensions. Aquest espai queda representat per uns ***eixos de coordenades***, que són dues rectes reglades entre les quals hi ha un angle recte (vegeu Figura 4.1):

- L'eix horitzontal s'anomena ***eix de les abscises*** (o simplement ***eix de les*** X) i s'hi col·loca la lletra X.
- L'eix vertical s'anomena ***eix de les ordenades*** (o simplement ***eix de les*** Y) i s'hi col·loca la lletra Y.

En conjunt, els eixos formen el que s'anomena ***Pla cartesià***.

Cada ***punt*** del pla queda determinat per les seves projeccions sobre cadascun dels eixos, el que s'anomenen ***coordenades*** (vegeu Figura 4.2).

L'***origen de coordenades*** és el punt de coordenades $(0, 0)$. Sovint es denota per la lletra O.

A partir d'aquest moment identificarem un punt amb les seves coordenades.

Notació 1 (notació dels punts)**.** Els punts es poden escriure de dues maneres diferents: $A = (0, 1)$ o bé $A(0, 1)$.

Per comoditat, es poden obviar les lletres que denoten els eixos de coordenades.

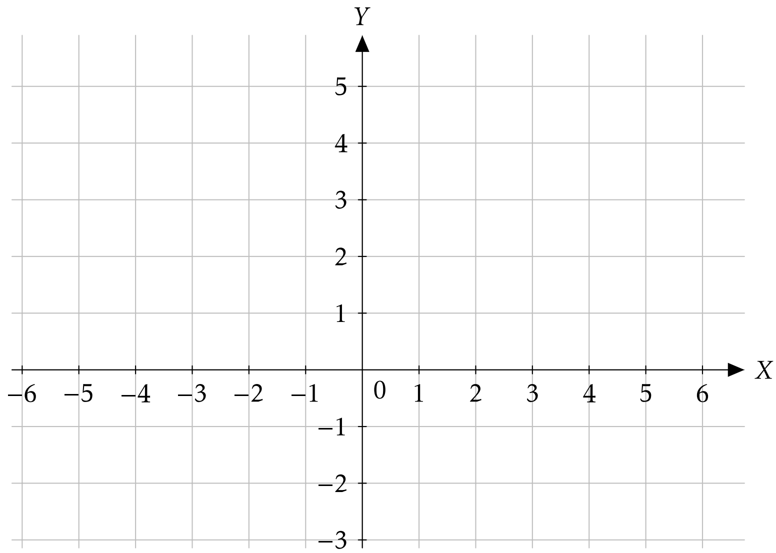


Figura 4.1: Pla cartesià

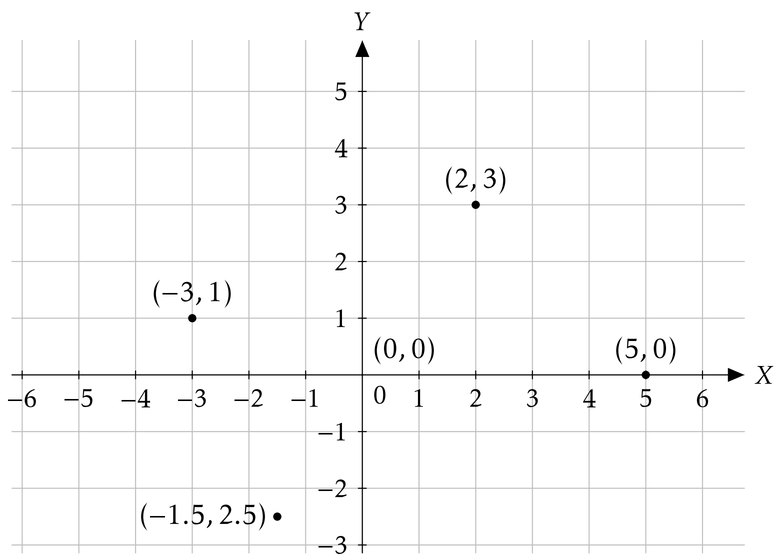


Figura 4.2: Diversos punts al pla cartesià

4.1.1 Punt mitjà

Donats dos punts del pla, $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$, que determinen un segment, podem preguntar-nos quines són les cooordenades del punt mitjà d'aquest segment, que podem anomenar P_M.

Aquest punt queda determinant per la expressió següent:

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$

és a dir, P_M s'obté fent la mitjana aritmètica de les coordenades de P i Q.

Exemple 38. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinat pels punts $P = (0, -5)$ i $Q = (-3, 1)$.

Solució. El punt mitjà P_M és:

$$P_M = \left(\frac{0 + (-3)}{2}, \frac{-5 + 1}{2} \right) = \left(\frac{-3}{2}, -2 \right)$$

■

Exercici 65. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinat pels punts $P = (-3, 7)$ i $Q = (-5, 3)$.

Exercici 66. Donat el punt $P(0, -5)$, calculeu les coordenades del punt simètric de P respecte del punt $M = (-1, 12)$.

Observació 6. Hem de notar que, encara que pareixi que sí, aquest resultat no es pot estendre quan es vol trobar un punt que estigui a distància $1/3$ d'A en el segment $\overline{AB}$ (en general, a distància $d \neq 1/2$). En aquest cas, s'haurà de procedir a raonar amb vectors (Secció 4.2), per exemple trobant el vector $1/3 \cdot \overrightarrow{AB}$ i situant-lo amb origen A. El seu extrem final seria el punt desitjat.

4.2 Vectors

Definició 25 (vector fix)**.** Un ***vector fix*** és un segment orientat a l'espai (és a dir una fletxa), que té un ***origen*** (el punt on comença) i un ***final*** (punt on acaba). Els dos punts s'anomenen ***extrems del vector***.

Per tant, un vector té:

- Una ***direcció***: la recta sobre la qual està el vector.
- Un ***sentit***: cap a on apunta la fletxa. Si A i B són els extrems d'un vector, aleshores aquest vector pot tenir dos sentits:
  - de A cap a B (punt origen és A i el punt destí és B).
  - o de B cap a A (punt origen és B i el punt destí és A).
- La seva ***longitud***. Formalment s'anomena ***mòdul*** del vector.

Notació 2 (notació de vectors)**.** Els vectors es denoten amb una fletxa a damunt del seu nom. D'aquesta manera escriurem $\overrightarrow{AB}$ per denotar el vector que té origen A i final a B. Si volem obviar els extrems, podem escriure $\vec{u}$, per exemple.

Exemple 39. Siguin els vectors següents (Figura 4.3):

- Els extems dels vectors són:
  - El vector $\vec{a}$ té origen $(-1, 1)$ i final $(-3, -1)$.
  - El vector $\vec{b}$ té origen $(-1, -1)$ i final $(0, 0)$.

  - El vector $\vec{c}$ té origen $(-4,3)$ i final $(-1,3)$.
  - El vector $\vec{d}$ té origen $(-4,2)$ i final $(-4,-1)$.
  - El vector $\vec{u}$ té origen $(1,1)$ i final $(3,3)$.
  - El vector $\vec{v}$ té origen $(4,1)$ i final $(6,3)$.
  - El vector $\vec{w}$ té origen $(1,-1)$ i final $(3,1)$.

- Els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ tenen la mateixa direcció.
- Els vectors $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tenen el mateix sentit, però el vector $\vec{a}$ té sentit contrari.
- Els vectors $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tenen el mateix mòdul. El mòdul de $\vec{b}$ és la meitat que el mòdul de $\vec{u}$. I $\vec{c}$ i $\vec{d}$ tenen el mateix mòdul (encara que no tenguin ni la mateixa direcció ni sentit).

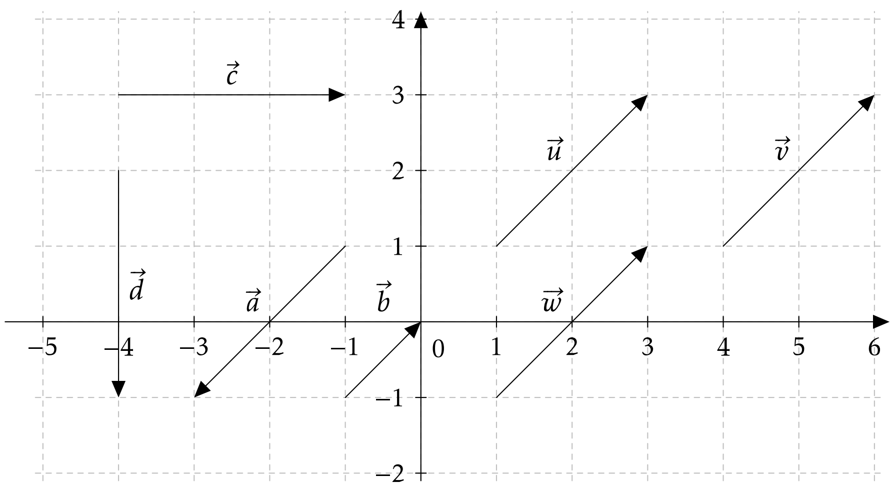


Figura 4.3: Diversos vectors al pla

Definició 26 (vector lliure)**.** Un ***vector lliure*** és un segment orientat al pla, però del qual tenim la llibertat de triar el seu origen. És a dir, vector que tenen la mateixa direcció, sentit i longitud són, a partir d'ara, iguals per a nosaltres, independentment d'on estiguin situats. Formalment, aquests vectors s'anomenen ***equipolents***.

Exemple 40. Els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són equipolents (Figura 4.3). És més, tots aquests vectors es consideren el mateix vector que $\overrightarrow{(2,2)}$. En canvi, el vector $\vec{a}$ no és el mateix vector, ja que té sentit contrari.

Observació 7. A partir d'ara, tots els vectors seran vectors lliures i el seu origen serà $(0,0)$. En aquest sentit, escriurem un vector com a $\vec{v} = \overrightarrow{(3,5)}$ i no $\vec{v} = \overrightarrow{(0,0)(3,5)}$, obviant el seu origen.

Aquest ús és general i en tots els textos matemàtics, inclosos els exàmens d'accés, es suposa que es fa feina amb vectors lliures, i no amb vectors fixos.

Definició 27 (components d'un vector)**.** Donat un vector $\vec{v}$, els seus ***components*** són dos vectors perpendiculars que el formen i que són les projeccions del vector als eixos del coordenades.

Si $\vec{v} = \overrightarrow{(v_x, v_y)}$, aleshores els seus components són els vectors $\overrightarrow{(v_x, 0)}$ i $\overrightarrow{(0, v_y)}$ (vegeu Figura 4.4).

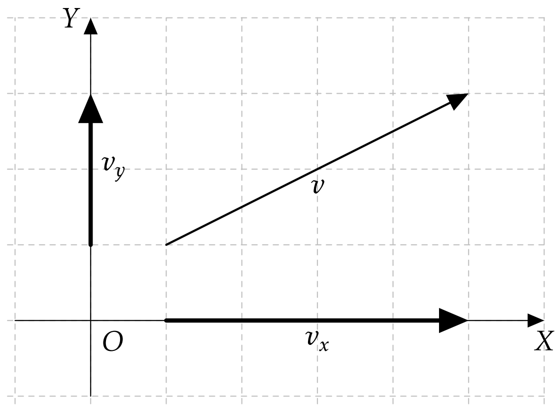


Figura 4.4: Components d'un vector

En general, podem passar fàcilment de les coordenades d'un vector $\overrightarrow{(v, w)}$ als seus components: $\overrightarrow{(v, 0)}$ i $\overrightarrow{(0, w)}$, i a la inversa. En aquest sentit, es parla indistintament de coordenades o components d'un vector.

Exercici 67. Representeu gràficament els vectors $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (5, -1)$ i $\vec{w} = (1, 0)$.

Proposició 6 (vector d'extrems donats)**.** *Donats els punts $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ que té origen en P i final en Q és:*

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(x_2 - x_1, y_2 - y_1)},$$

és a dir, restem les coordenades del punt final menys les coordenades del punt inicial.

Exemple 41. Calculeu les coordenades i els components del vector que comença en el punt $P(0, -6)$ i acaba en el punt $Q(-3, 2)$

Solució. Les coordenades del vector són:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(-3 - 0, 2 - (-6))} = \overrightarrow{(-3, 8)}$$

I per tant, els seus components són: $\overrightarrow{(-3, 0)}$ i $\overrightarrow{(0, 8)}$. ■

Exercici 68. Calculeu els components del vector d'origen $P = (-2, 1)$ i que acaba en el punt $Q = (-3, -5)$.

Exercici 69. Els punts $A(3, 0)$, $B(-5, 4)$ i $C(6, -4)$ són vèrtexos d'un paral·lelogram. Representeu gràficament aquests punts i calculeu les cooordenades de vèrtex restant. Trobeu els vectors que tenen com a extrems els vèrtex del paral·lelogram.

Definició 28 (mòdul d'un vector)**.** El ***mòdul*** d'un vector és la seva longitud. El mòdul del vector $\vec{u} = (a, b)$, que es representa per $\left|\vec{u}\right|$, es calcula amb la fórmula:

$$\left|\vec{u}\right| = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemple 42. El mòdul del vector $\vec{u} = \overrightarrow{(3, -2)}$ és:

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Exercici 70. Calculeu el valor del mòdul del vector $\vec{u}(-5, 1)$.

Acabem amb unes quantes definicions:

Definició 29 (vector unitari)**.** Un vector és ***unitari*** quan té mòdul 1.

Definició 30 (ortogonalitat, ortonormalitat)**.** Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, direm que $\vec{u}$ és ***ortogonal*** a $\vec{v}$ simplement quan $\vec{u}$ sigui perpendicular a $\vec{v}$, és a dir, quan ambdós formen un angle de 90 graus.

Si a més, $\vec{u}$ és unitari, aleshores direm que $\vec{u}$ és ***ortonormal*** a $\vec{v}$.

4.2.1 Operacions amb vectors

4.2.1.1 Producte d'un escalar per un vector

Definició 31 (escalar)**.** Quan parlem de vectors, els nombres s'anomenen ***escalars***.

Definició 32 (producte d'un escalar per un vector)**.** Donat un nombre $k \in \mathbb{R}$ i un vector $\vec{u}(a, b)$, ***el producte de** k **per*** $\vec{A}$, $k \cdot \vec{u}$, es defineix com:

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot \overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$$

Exemple 43. Donats el vector $\vec{u} = \overrightarrow{(3, -2)}$ i el número $k = -5$, es té que el seu producte és:

$$k{\cdot}\vec{u} = -5 \cdot \overrightarrow{(3, -2)} = \overrightarrow{(-5 \cdot 3, -5 \cdot (-2))} = \overrightarrow{(-15, 10)}$$

En el dibuix següent es veu un exemple gràfic del producte d'un nombre (en aquest cas el 3) per un vector (Figura 4.5):

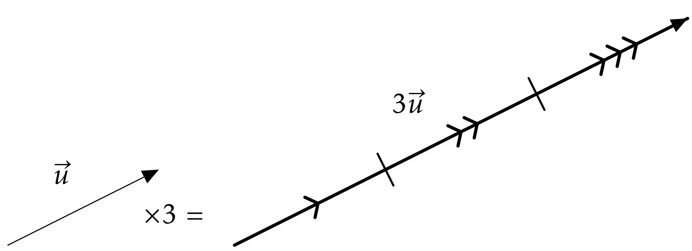


Figura 4.5: Exemple d'un producte d'un escalar per un vector

Exercici 71. Calculeu gràficament i analítica el producte $-3 \cdot \vec{u}$, amb $\vec{u} = \overrightarrow{(3, -1)}$.

Vectors paral·lels

OBSERVACIÓ 8. L'operació del producte d'un escalar per un vector dóna sempre un vector paral·lel al vector inicial. És més, el vector resultant és una allargament (si $k > 1$) o una escurçament (si $k < 1$) del vector original.

OBSERVACIÓ 9. Sempre podem obtenir un vector paral·lel a un donat i que sigui unitari, multiplicant per la inversa del seu mòdul. És a dir, $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ sempre és un vector unitari paral·lel a $\vec{u}$.

PROPOSICIÓ 7 (Condició de parel·lelisme entre dos vectors). *Siguin $\vec{u}(a,b)$ i $\vec{v}(c,d)$ dos vectors qualssevol amb $a, b \neq 0$:*

$$\vec{u} \text{ és paral·lel a } \vec{v} \iff \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

Expressat en paraules, això ens diu que si dos vectors són paral·lels, aleshores el quocient entre les seves respectives coordenades dóna el mateix resultat, i viceversa, és a dir, que si el quocient entre les respectives coordenades de dos vectors dóna el mateix resultat, aleshores aquests dos vectors són paral·lels.

NOTA 2. Si alguns dels vectors anteriors té alguna coordenada igual a zero, l'altre vector per ser-hi proporcional ha de tenir la mateixa coordenada igual a zero. Per exemple $\vec{u} = \overrightarrow{(5,0)}$ és proporcional a $\vec{v} = \overrightarrow{(-7,0)}$ (perquè $\frac{-7}{5} \cdot \vec{u} = \vec{v}$) però no ho és a $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{(0,3)}$ ni a $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{(5,3)}$.

EXEMPLE 44. Determineu, a cadascun dels apartats següents, si els vectors són paral·lels entre si:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{(2,-3)}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{(4,-6)}$:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$$

Per tant, aquests dos vectors són paral·lels entre si.

b) $\vec{c} = \overrightarrow{(2,-1)}$ i $\vec{d} = \overrightarrow{(4,-3)}$:

$$\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{-3}$$

Així, aquests dos vectors no són paral·lels entre si.

EXERCICI 72. Determineu si els vectors següents són paral·lels entre si:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{(1,-3)}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{(5,-6)}$

b) $\vec{c} = \overrightarrow{(3,-1)}$ i $\vec{d} = \overrightarrow{(-6,2)}$

c) $\vec{e} = \overrightarrow{(3,0)}$ i $\vec{f} = \overrightarrow{(5,0)}$

4.2.1.2 Suma i diferència de dos vectors

Definició 33 (suma de dos vectors)**.** . Siguin $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$ dos vectors. La seva ***suma*** es defineix com:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c, b+d)}$$

Exemple 45. Donats els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(3,-2)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(-5,1)}$, la seva suma és:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{(3,-2)} + \overrightarrow{(-5,1)} = \overrightarrow{(3-5,-2+1)} = \overrightarrow{(-2,-1)}$$

Noteu que, per a què es puguin sumar dos vectors aquests han de tenir el mateix origen o bé ser lliures. En aquest cas, la suma de dos vectors es pot calcular gràficament: en el dibuix següent es representa la suma gràfica de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (Figura 4.6):

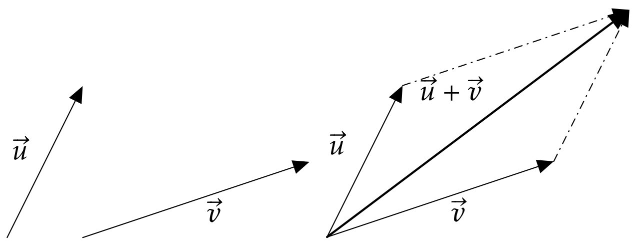


Figura 4.6: Regla del paral·lelogram per al càlcul de la suma de vectors

Es pot procedir de manera anàloga per a qualssevol vectors. Aquesta manera gràfica d'aconseguir la suma es coneix com ***regla del paral·lelogram***.

Exercici 73. Calculeu gràficament i analítica la suma dels vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(-5,4)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(3,-1)}$.

Definició 34 (diferència de dos vectors)**.** Donats dos vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$, la seva ***diferència*** es defineix com:

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$$

Exemple 46. Donats els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(3,-2)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(-5,1)}$, la seva diferència és:

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{(3,-2)} - \overrightarrow{(-5,1)} = \overrightarrow{(3+5,-2-1)} = \overrightarrow{(8,-3)}$$

Exercici 74. Calculeu $\vec{u} - \vec{v}$ i $\vec{v} - \vec{u}$, amb $\vec{u} = \overrightarrow{(-5,4)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(3,-1)}$.

Observació 10. Notem que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} + (-1)\vec{v}$. Per tant, la diferència de dos vectors es pot calcular sumant el primer vector i l'oposat del segon.

4.2.1.3 Producte escalar de dos vectors

Definició 35 (producte escalar de dos vectors)**.** El ***producte escalar de dos vectors***, $\vec{u}(a,b)$ i $\vec{v}(c,d)$, que es denota per $\vec{u} \cdot \vec{v}$, es defineix de la manera següent:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a,b) \cdot (c,d) = a \cdot c + b \cdot d \tag{4.1}$$

Com es veu, el producte escalar de dos vectors és un nombre.

Exemple 47. El producte escalar dels vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(-3,1)}$ és igual a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2,0) \cdot (-3,1) = 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = -6$$

Exercici 75. Calculeu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, amb $\vec{u} = \overrightarrow{(-3,4)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(-2,-8)}$.

Exercici 76. Per a quins valors de λ el producte escalar $\overrightarrow{(3,-4)} \cdot \overrightarrow{(\lambda,2)}$ serà 5?

Exercici 77. Sigui $\vec{u} = \overrightarrow{(2,-3)}$. Trobeu un vector paral·lel i dieu-li $\vec{v}$. Calculeu el producte $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercici 78. Trobeu un vector unitari que sigui paral·lel a $\vec{u} = \overrightarrow{(-8,-15)}$.

Angle entre dos vectors

Proposició 8 (Relació entre producte escalar i angle entre dos vectors)**.** *Es pot provar que es cumpleix que la relació:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha, \tag{4.2}$$

on α és l'angle que formen entre si els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Això permet calcular l'angle α entre dos vectors, o qualsevol altre variable desconeguda d'aquesta fórmula (4.2) *si es coneixen les altres. Recordeu que el producte escalar es pot calcular amb seva fórmula* (4.1). *Per tant, l'equació anterior és equivalent a:*

$$ac + bd = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \cdot \cos\alpha \tag{4.3}$$

Observació 11. Recordeu que, donat un angle α, el ***cosinus*** de α, $\cos\alpha$, es defineix com la projecció horitzontal del radi unitat que forma un angle α amb l'eix X. Els valors del cosinus dels angles més usuals es mostren a continuació (taula Taula 4.1)[1]:

	0 rad	$\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad	$\pi/3$ rad	$\pi/2$ rad	π rad	$3\pi/2$ rad
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0

Taula 4.1: Valors dels cosinus pels angles més usuals

Encara que es pot calcular el cosinus d'un angle arbitrari amb la calculadora científica.

Exemple 48. Què val l'angle format pels vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(-3,1)}$?

Solució. Si aplicam la darrera fórmula i denotam l'angle per α, es té que

$$2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = \sqrt{2^2+0^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+1^2} \cdot \cos\alpha$$

[1]Els conceptes de sinus, cosinus i tangent són els primers que apareixen a un curs de Trigonometria. Si només voleu calcular el valor del producte escalar, podeu ometre aquests conceptes i, simplement, calcular el $\cos\alpha$ usant la calculadora. El valor de l'angle α amb cosinus donat, es calcula amb l'arccosinus (bototons arccos o $\cos^{-1}$ a la calculadora).

$$-6 = 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{-6}{2\sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$
$$\alpha = \arccos\frac{-3}{\sqrt{10}} \simeq 161,565^\circ$$

■

Exercici 79. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(-2,-5)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(-3,2)}$.

Propietats del producte escalar

Teorema 9 (Propietats del producte escalar)**.** *Donats vectors $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$ i un nombre k qualssevol, el producte escalar té les propietats següents:*

a) $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$. *És a dir, el mòdul d'un vector es pot calcular amb l'arrel quadrada del producte escalar per si mateix.*

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ *(propietat conmutativa).*

c) $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ *(propietat associativa).*

d) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ *(propietat distributiva).*

e) ***Condició de perpendicularitat entre dos vectors****: si el producte escalar de dos vectors és* 0*, aleshores aquests dos vectors són perpendiculars entre si, i viceversa, és a dir, que si dos vectors són perpendiculars entre si, aleshores el seu producte escalar és* 0*. Matemàticament,*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}.$$

Exemple 49. Per exemple, els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(30,-9)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(3,10)}$ són perpendiculars, ja que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 30\cdot 3 + (-9)\cdot 10 = 0$.

Exercici 80. En cada cas, calculeu x per a què els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(8,-15)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(2,x)}$ siguin:

a) paral·lels

b) perpendiculars

Exercici 81. Donat el vector $\vec{u} = \overrightarrow{(5,12)}$, trobeu:

a) un vector paral·lel

b) un vector perpendicular

4.3 La recta en el pla

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de dues dimensions.

Una ***recta***, en particular, és una col·lecció de punts. Per tant, un objectiu principal serà trobar les coordenades de tots els seus punts. La manera més senzilla de trobar-la és usar vectors.

Donada una recta r, sempre podem obtenir un punt qualsevol P i un vector $\vec{v}$ sobre aquesta — per exemple, si sabéssim dos punts A i B sobre la recta, aleshores tendríem un punt, A o B, i un vector amb aquestes condicions, $\overrightarrow{AB}$ o qualsevol múltiple seu. Per tant, per a qualsevol punt X sobre la recta, aquest forma el vector $\overrightarrow{OX}$, que té com a origen l'origen de coordenades i com a destí X. Aquest vector es pot posar com a suma del vector $\overrightarrow{OP}$ i un múltiple del vector $\vec{v}$ (vegeu la figura Figura 4.7), és a dir, existeix un nombre λ tal que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v}. \tag{4.4}$$

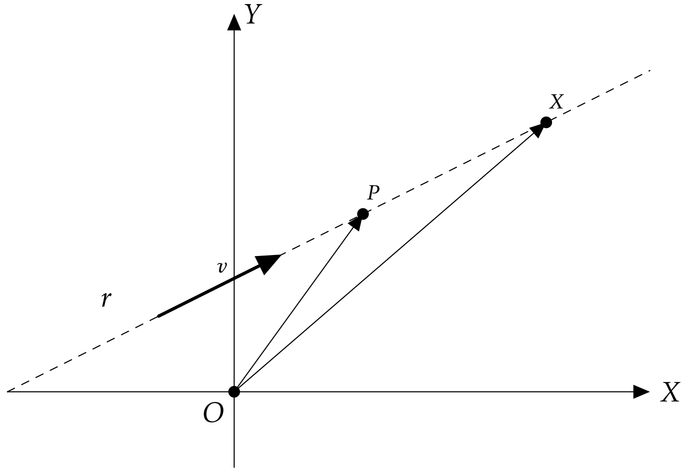


Figura 4.7: Visualització de l'equació vectorial d'una recta

Aquest equació (4.4) s'anomena ***equació vectorial de la recta*** i al vector $\vec{v}$ se li diu ***vector director*** de r.

Observació 12. Noteu que realment no fa falta que el vector director v estigui sobre la recta. Basta qualsevol que tengui la mateixa direcció, ja que suposem que feim feina amb vectors lliures. En aquest sentit parlarem de *el* vector director de la recta r i no d'*un* vector director, per a qualsevol d'aquests vectors, ja que els haurem identificat.

Exemple 50. Trobeu l'equació vectorial de la recta que passa pels punts $A = (2, 3)$ i $B = (4, 5)$.

Hem de prendre un punt de la recta i un vector director. Ja tenim el punt: podem prendre A o B. Agafarem $A = (2, 3)$.

Per trobar el vector director, calcularem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(4-2, 5-3)} = \overrightarrow{(2, 2)}$.

Per tant, l'equació vectorial de la recta en qüestió és:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{(2,2)}$$

Si denotam $X = (x, y)$ les coordenades del punt X, tenim que aquesta equació es transforma en:

$$\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(2,3)} + \lambda\overrightarrow{(2,2)}.$$

Observació 13. A part d'aquesta equació, n'hi ha d'altres però totes provénen d'aquesta. L'ús d'una o de l'altra dependrà de l'exercici concret que volguem resoldre i de la nostra comoditat.

4.3.1 Equació paramètrica de la recta

Sigui r una recta donada pel punt $P = (x_1, y_1)$ i el vector director $\vec{v_r} = \overrightarrow{(v_x, v_y)}$, aleshores l'equació vectorial de la recta r ve donada per

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v},$$

on $X = (x, y)$ és un punt qualsevol de la recta. Si desenvolupem aquesta equació obtenim que

$$\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(x_1,y_1)} + \lambda \cdot \overrightarrow{(v_x,v_y)},$$

és a dir,

$$\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)}.$$

Dos vectors són iguals si, i només si, els seus components són iguals. Per tant, $(x, y) = (x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)$, és a dir, s'han de complir simultàniament les equacions següents:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot v_x, \\ y = y_1 + \lambda \cdot v_y. \end{cases}$$

Hem obtingut l'***equació paramètrica***. L'equació paramètrica d'una recta dóna les coordenades de tots els punts d'una recta depenent d'un paràmetre λ (d'aquí el seu nom). Per a cada valor de λ obtenim un punt de la recta.

Recapitulant, si r és una recta que passa pel punt $P = (x_1, y_1)$ i té com a vector director $\vec{v_r} = \overrightarrow{(v_x, v_y)}$, aleshores l'equació paramètrica de r ve donada per:

$$r : \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_x \\ y = y_1 + \lambda v_y \end{cases}, \tag{4.5}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 51. Si una recta passa pel punt $(0, -1)$ i el seu vector director és $\vec{v} = \overrightarrow{(-3, 2)}$, aleshores la seva equació paramètrica és la següent:

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda\,(-3) \\ y = -1 + \lambda \cdot 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir λ per un nombre qualsevol a les expressions anteriors.

EXEMPLE 52. Si a la recta anterior feim $\lambda = 2$, tenim que

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \end{cases},$$

i, per tant, que $(-6, 3)$ és un altre punt de la recta.

EXERCICI 82. Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per $A = (-3, 0)$ i segueix la direcció $\vec{v} = \overrightarrow{(5, -1)}$. Trobeu tres punts més d'aquesta recta.

OBSERVACIÓ 14. Per saber si un punt pertany a una recta donada, només hem de veure si aquest punt verifica l'equació de la recta. Per exemple, si volem saber si $P = (5, 3)$ pertany o no a la recta de l'exemple 51, només hem de substituir a les equacions:

$$\begin{cases} 5 = -3\lambda \\ 3 = -1 + 2\lambda \end{cases},$$

i hem de resoldre aquest sistema. Si aquest sistema té solució, és a dir, existeix λ, aleshores P pertanyarà a la recta; sinó, no ho farà. En el nostre cas, $\lambda = -5/3$ de la primera equació i $\lambda = 2$ de la segona. Per tant, P no és de la recta.

Aquest fet també ens servirà per a les altres equacions de la recta.

4.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllem λ a cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (4.5), obtenim

$$\lambda = \frac{x - x_1}{v_x}, \ \lambda = \frac{y - y_1}{v_y}.$$

Si ara igualam les dues equacions, s'obté ***l'equació contínua de la recta***

$$r : \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}, \tag{4.6}$$

on $P = (x_1, y_1)$ és qualsevol punt de la recta i $\vec{v_r} = \overrightarrow{(v_x, v_u)}$ és el vector director de la recta.

EXEMPLE 53. Seguint amb la recta de l'exemple anterior, exemple 51, la seva equació contínua és:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y + 1}{2}$$

OBSERVACIÓ 15. Notem que si alguna component del vector director $\vec{v_r}$ és zero, aleshores no existeix la fracció corresponent a l'equació (4.6) (no es pot dividir per zero). Ara bé, en aquest cas es veu l'equació (4.6) com a *notació*.

Per exemple, la recta que passa pel punt $(2, 3)$ i té com a vector director $\overrightarrow{(5, 0)}$, té com a equació contínua:

$$\frac{x - 2}{5} = \frac{y - 3}{0}$$

4.3.3 Equació general de la recta

Si a l'equació de la recta en forma contínua llevam els denominadors i ho transposam tot al primer membre, l'equació de la recta s'escriu de la manera següent:

$$Ax + By + C = 0, \tag{4.7}$$

amb A, B i C nombres reals. Aquesta equació rep el nom d'***equació general de la recta*** o ***equació implícita de la recta***.

Exemple 54. Seguint amb la recta anterior, exemple 51, la seva equació general és:

$$r \equiv 2x = -3\,(y + 1)\,,$$

que simplificada és:

$$r \equiv 2x + 3y + 3 = 0.$$

Observació 16. Notem que, si a l'exemple anterior, feim $x = \lambda$, llavors

$$y = (-3 - 2x)\,/3 = -1 + 2/3\lambda,$$

per la qual cosa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \cdot \lambda.$$

Això implica que r passa pel punt $(0, -1)$ i té com a vector director $\overrightarrow{(1, -2/3)}$. Noteu que aquest darrer vector director és equivalent a $(-3, 2)$ (aquest darrer és el primer multiplicat per 3), el qual és el que teníem a l'exemple exemple 51.

Exercici 83. Trobeu les equacions contínua i general de la recta que passa per $P = (2, -5)$ i segueix la direcció del vector director $\vec{v} = \overrightarrow{(-2, 7)}$.

Exercici 84. Donada la recta d'equació $5x - y + 6 = 0$, trobeu les cooordenades de dos dels seus punts. A partir d'aquests, calculeu el seu vector director.

4.3.3.1 Vector director a partir de l'equació general

Proposició 10. *Donada una recta en forma general, és a dir,* $Ax + By + C = 0$, *el seu vector director és* $\vec{v} = \overrightarrow{(-B, A)}$.

Demostració. Una recta genèrica r que passa pel punt $P = (x_1, y_1)$ i que té com a vector director $\vec{v_r}(v_x, v_y)$ té l'equació contínua

$$r \equiv \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

Per tant, $v_y \cdot (x - x_1) = v_x \cdot (y - y_1)$. Aleshores, $v_y x - v_x y + (-v_y x_1 + v_x y_1) = 0$. Per la qual cosa, $A = v_y$, $B = -v_x$ i $C = -v_y x_1 + v_x y_1$. Per tant, el vector director és $\overrightarrow{(v_x, v_y)} = \overrightarrow{(-B, A)}$. ∎

Proposició 11. *Donada una recta* $r \equiv Ax + By + C = 0$ *en forma implícita, tenim que el vector* $\overrightarrow{(A, B)}$ *és perpendicular a la recta.*

Demostració. El vector (A, B) és perpendicular al vector $(-B, A)$ — ja que el seu producte escalar és 0. Per tant, el vector (A, B) és un vector perpendicular a la recta d'equació $Ax + By + D = 0$. ■

EXEMPLE 55. El vector director de la recta $5x - 2y + 1 = 0$ és $\vec{v} = (2, 5)$.

EXERCICI 85. Calculeu el vector director de les rectes següents:

a) $4x - 3y + 1 = 0$

b) $-y + 5 = 0$

EXERCICI 86. Donada la recta $x - 5y + 8 = 0$, trobeu:

a) l'equació de la recta paral·lela que passa pel punt $(2, -7)$

b) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt $(2, -7)$

OBSERVACIÓ 17. La proposició 10, serveix per a passar de l'equació general a l'equació contínua o bé a l'equació paramètrica: directament es pot obtenir el seu vector director $\vec{v_r}$. I després subtituïnt x o y, podem trobar un punt seu.

EXEMPLE 56. Obteniu l'equació contínua de la recta s que té equació general $s \equiv 5x - 9y - 2 = 0$.

Solució. Per la proposició 10, tenim que el vector director de s és $\vec{v_s} = \overrightarrow{(9, 5)}$.

D'altra banda, trobarem un punt de s. Prendre'm $x = 0$, per exemple, amb el que obtenim $y = -2/9$. Per tant $(0, -2/9) \in s$.

Amb tot, tenim que l'equació contínua de s serà:

$$s \equiv \frac{x}{9} = \frac{y + \frac{2}{9}}{5}$$

■

EXERCICI 87. Donada la recta $r \equiv 2x - 9y + 5 = 0$, trobeu les equacions contínua, paramètrica i vectorial.

EXEMPLE 57. Trobeu el punt de tall de les rectes $r \equiv 2x - 5y + 10 = 0$ i $s \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{8}$.

Solució. Diem $P(a, b)$ al punt de tall de r i s. Si $P \in r \cap s$, aleshores P verifica les equacions de r i s simultàniament. Per tant, s'ha de verificar el sistema:

$$\begin{cases} 2a - 5b + 10 = 0 \\ \dfrac{a-2}{5} = \dfrac{b-3}{8} \end{cases}$$

Aplicant el mètode de reducció multiplicant la segona equació per 40 (vegeu Secció A.8), tenim que

$$\begin{cases} 2a - 5b = -10 \\ 8a - 5b = 1 \end{cases}$$

Per tant, $a = 3/2$ i $b = 13/5$. Llavors el punt de tall és $P(\frac{3}{2}, \frac{13}{5})$. ■

Noteu que no sempre dues rectes tendran punt de tall: quan aquestes siguin paral·leles, aleshores no existiran punts de tall. En aquest cas, el sistema no tendria solució. Vegeu l'apartat referent a la posició relativa de dues rectes (Subsecció 4.3.6).

Exercici 88. Donades les rectes $r \equiv 5x - 2y + 8 = 0$ i $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{5}$, trobeu:

a) dues rectes paral·leles a r

b) dues rectes paral·leles a s

c) una recta perpendicular a s que passi per $(10, 10)$

d) una recta perpendicular a r que passi per $(0, 0)$

e) el punt de tall de r i s

f) el punt de tall de r i la recta perpendicular a s que passa per $(5, 20)$

4.3.4 Equació explícita de la recta

Si de l'equació general d'una recta (4.7) aillam la y ens queda una equació de la forma:

$$y = mx + b, \tag{4.8}$$

amb m i b nombres reals. Aquesta equació es coneix amb el nom de ***equació explícita de la recta***. S'anomena ***pendent*** al coeficient m i ***ordenada a l'origen*** al nombre b. La interpretació gràfica d'aquests dos paràmetres és la següent:

- El pendent de la recta és la inclinació d'aquesta:

  – Si $m > 0$, aleshores la recta és ***creixent*** (quan els valors de x creixen, els valors de y creixen).

  – Si $m < 0$, aleshores la recta és ***decreixent*** (quan les valors de x creixen, els valors de y decreixen).

  – Si $m = 0$, aleshores la recta és ***constant***. Té una forma completament horitzontal.

  D'altra banda, quan $|m|$ és major, la inclinació de la recta és major en el sentit que és més vertical. Per exemple, $y = 3x + 2$ tendrà més inclinació que $y = x + 2$, i $y = -5x + 10$ tendrà més inclinació que $y = -2x + 10$.

- L'ordenada a l'origen b és el valor que de l'eix de les Y quan $x = 0$. És a dir, l'ordenada a l'origen ens diu en quin punt talla la recta a l'eix OY. En altres paraules, $(0, b)$ és el punt de tall de la recta amb l'eix OY.

Exemple 58. Representeu gràficament la recta $r \equiv y = -2x + 3$ i trobeu els seus punts de tall amb els eixos.

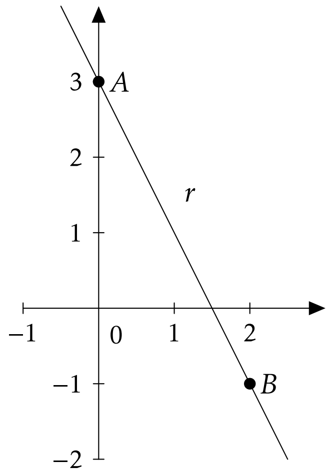


Figura 4.8: Visualització de l'equació explícita d'una recta

Solució. Sabem que r és decreixent, ja que $-2 < 0$, i que passa per $(0, 3)$. Per representar-la només ens fa falta un altre punt (una recta ve determinada per dos punts). Substituïm, per exemple, per $x = 2$: $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$. Per tant, $(2, -1) \in r$. Aleshores, r té la representació següent (Figura 4.8):

Només fa falta trobar el punt de tall amb l'eix de les abscises. En aquest cas, $y = 0$. Per tant, $0 = -2x + 3$, el que implica que $x = 3/2$. Per tant, el punt $(\frac{3}{2}, 0)$ és el punt de la recta que està sobre l'eix OX. ■

4.3.4.1 Pendents de rectes paral·leles i perpendiculars

Existeix una relació entre els pendents de rectes paral·leles o perpendiculars, la qual no es podrà generalitzar a la geometria a l'espai:

Proposició 12 (relació entre els pendents de rectes paral·leles i rectes perpendiculars)**.** *Siguin* $r\colon y = m_r x + n_r$ *i* $s\colon y = m_s x + n_s$ *dues rectes en el pla. Aleshores:*

- $r \parallel s \iff$ *r, s tenen la mateix pendent* $\iff m_r = m_s$
- $r \perp s \iff m_r = -\frac{1}{m_s}$

Exemple 59. Si el pendent d'una recta donada val -5, el pendent de qualsevol recta paral·lela val també -5, i la de qualsevol recta perpendicular val $1/5$.

Exercici 89. Donada la recta $x + 5y - 3 = 0$, calculeu la seva pendent, la de una recta paral·lela i la de una recta perpendicular.

4.3.5 Equació de la recta determinada per dos punts

Si volem cercar la recta r determinada per dos punts $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, tenim diverses opcions depenent de l'equació de la recta que vulguem calcular:

a) Si volem calcular l'equació vectorial, paramètrica o contínua, llavors ens fa falta determinar el vector director de la recta i un punt per on passa. El vector director pot ser $\vec{v} = (\overrightarrow{x_2 - x_1, y_2 - y_1})$ i, el punt per on passa r pot ser A o B.

b) Si volem calcular l'equació general o la explícita, podem o bé substituir A i B a l'equació corresponent i resoldre un sistema d'equacions; o bé, emprar aquests resultats:

Proposició 13 (pendent de la recta). *Donats dos punts $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, el pendent de la recta r que passa per A i B és:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

i després substituir un dels punts a l'equació de la recta per a trobar b.

Proposició 14 (equació contínua de la recta determinada per dos punts donats). *Donats dos punts coneguts $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, si volem conèixer la recta que determinen, podem emprar la fórmula següent:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

que ens dóna l'equació contínua de la recta.

Exemple 60 (trobar l'equació explícita de la recta). Trobeu l'equació explícita de la recta r que passa pels punts $A = (2, 3)$ i $B = (10, 15)$.

Solució. Sigui $r\colon y = mx + n$ l'equació explícita de la recta r. Hem de determinar m i n. Facem-ho de dues maneres:

- Substituïnt els dos punts a l'equació explícita.

  Com que A i B són punts de la recta r, verifiquen la seva equació. Per tant,

$$\begin{cases} 3 = m \cdot 2 + n \\ 15 = m \cdot 10 + n \end{cases}$$

  Si resolem aquest sistema per m i n, obtenim $m = 3/2$ i $n = 0$.

- Emprant la fórmula de el pendent

  Podem calcular el pendent amb la fórmula:

$$m = \frac{15 - 3}{10 - 2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

  Per tant, $r\colon y = \frac{3}{2}x + n$. Prenem un punt qualsevol de la recta, per exemple A, i substituïm-lo a aquesta equació: $3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + n$. D'aquí tenim que $n = 0$.

$\blacksquare$

Exemple 61 (trobar l'equació contínua de la recta). Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A = (0, -2)$ i $B = (-4, 1)$.

Solució. Pel resultat anterior, proposició 14, l'equació és la següent:

$$\frac{x}{-4} = \frac{y+2}{3}$$

■

EXERCICI 90. Calculeu l'equació contínua de la recta que passa pels punts $A = (3, -5)$ i $B = (-1, 7)$.

EXEMPLE 62. Trobeu la recta que passa pels punts $A = (5, 9)$ i $B = (-10, 8)$.

Solució. Ho farem de diverses maneres:

- Calculant el vector director i amb un punt:

  El vector director pot ser $\vec{v} = \overrightarrow{(-10-5, 8-9)} = \overrightarrow{(-15, -1)}$. Qualsevol múltiple seu també és vector diretor de la recta. Per tant, triarem $\vec{v} = \overrightarrow{(15, 1)}$ per evitar els signes.

  D'aquí podem obtenir diverses equacions de la recta fàcilment:

  – L'equació vectorial: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{(5, 9)} + \lambda \cdot \overrightarrow{(15, 1)}$
  – L'equació paramètrica: $r\colon \begin{cases} x = 5 + 15\lambda \\ y = 9 + \lambda \end{cases}$
  – L'equació contínua: $r\colon \frac{x-5}{15} = y - 9$

- Trobant el pendent:

  Amb la fórmula, $m = \frac{8-9}{-10-5} = 1/15$. Per tant $r\colon y = 1/15x + n$. Substituïnt, per exemple, A a l'equació de la recta, tenim que $9 = 1/15 \cdot 5 + n$. Pel que $n = 26/3$. Per tant, $r\colon y = 1/15x + 26/3$.

- A partir de la contínua o a partir de la explícita, podem trobar l'equació general. També ho podem fer resolent un sistema d'equacions.

■

EXEMPLE 63. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $P = (3, -2)$ i que té per vector director $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -4)}$.

Solució.

- L'equació paramètrica és: $r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - 4\lambda \end{cases}$
- L'equació contínua és $r : x - 3 = \frac{y+2}{-4}$
- L'equació general és $-4 \cdot (x - 3) = y + 2$, és a dir, $-4x - y + 10 = 0$
- Si aïllam la y, llavors tenim que $y = -4x + 10$. Aleshores, el pendent d'aquesta recta és -4.

■

4.3.6 Posició relativa entre dues rectes

Proposició 15 (posició relativa entre dues rectes). *Dues rectes al pla cartesià poden ser (vegeu Figura 4.9):*

- ***secants**, és a dir, que es tallen a un punt*
- ***paral·leles**. Per tant, no es tallen a cap punt.*
- ***coincidents**, és a dir, són la mateixa recta.*

*Cadascuna d'aquestes posicions s'anomenen la **posició relativa** entre les dues rectes.*

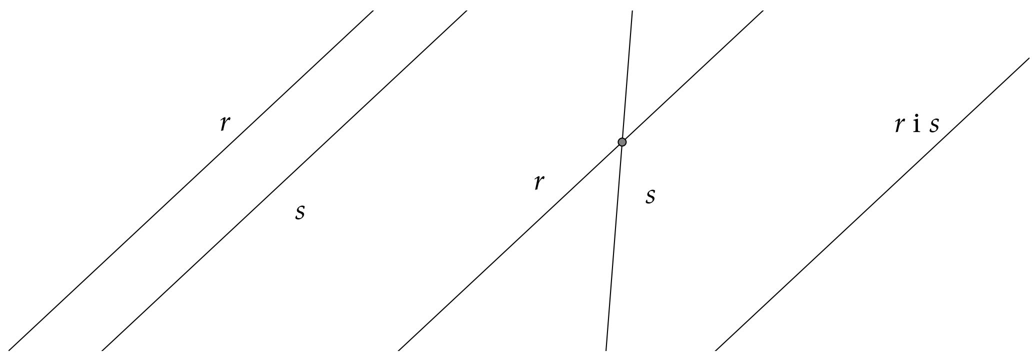


Figura 4.9: Les diferents posicions relatives possibles entre dues rectes: rectes paral·leles, rectes secants i rectes coincidents, respectivament

La proposició següent ens diu quan dues rectes són secants, paral·leles o coincidents.

Proposició 16 (criteri de posició relativa). *Per a dues rectes r i s en el pla es compleix:*

- *Si r i s tenen diferent pendent, aleshores són secants.*
- *Si r i s tenen la mateixa pendent, aleshores són paral·leles o coincidents. En aquest cas:*
  - *Si r i m tenen diferents ordenades a l'origen, llavors són paral·leles.*
  - *Si r i m tenen la mateixa ordenada a l'origen, llavors són coincidents.*

Aquest criteri usant vectors directors és el següent:

Proposició 17 (criteri de posició relativa). *Per a dues rectes r i s en el pla es compleix:*

- *Si r i s no tenen vectors directors proporcionals, aleshores són secants.*
- *Si r i s tenen vectors directors proporcionals[2], aleshores són paral·leles o coincidents. En aquest cas, si r i s passen per un punt en comú, aleshores són coincidents. Altrament, són paral·leles.*

[2]Hem de notar aquí que si dues rectes tenen vectors directors que són proporcionals, sempre podem prendre el mateix vector director a les dues rectes. Per exemple $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4}$ té com a vector director $\overrightarrow{(2,4)}$ i $s\colon \frac{x-5}{1} = \frac{y-8}{2}$ té com a vector director $\overrightarrow{(1,2)}$, els quals són proporcionals. Per tant, podríem prendre com a equació contínua de la recta r l'equació $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}$.

Exercici 91. Calculeu la posició relativa de les rectes:

a) $r\colon y = 2x - 5$ i $s\colon y = 3x + 4$

b) $r\colon 2x + 5y - 4 = 0$ i $s\colon \begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = -3 + 7k \end{cases}$

c) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2}$ i $s\colon x - 2y + 5 = 0$

4.3.7 Càlcul dels punts de tall

Fins ara hem vist quina és la posició relativa entre dues rectes. Això vol dir que podem saber si dues rectes es tallen però *encara* no sabem com trobar el seu ***punt de tall***, és a dir, el punt d'intersecció entre les dues rectes.

Per a trobar el punt de tall entre dues rectes, només hem de notar que si P pertany a les dues rectes, aleshores ha de complir ambdues equacions. D'aquesya manera obtindrem un sistema d'equacions de dues incògnites i dues equacions, que podem resoldre fàcilment per reducció, igualació o substitució (vegeu Secció A.8).

Exemple 64. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : x-3y+1 = 0$ i $s : -4x + 7y = 0$.

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ -4x + 7y = 0 \end{cases}$$

Si aplicam el mètode de substitució (vegeu Secció A.8), aïllant la x de la primera equació: $x = 3y - 1$, tenim que $-4(3y - 1) + 7y = 0$, és a dir, $y = \frac{4}{5}$. Per tant, si substituïm a la primera equació: $x - 3 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 0$, és a dir, $x = \frac{7}{5}$.

Aleshores, el punt de tall entre ambdues rectes és el punt $\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Exercici 92. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : 2x-3y+1 = 0$ i $s : -4x + 7y = 0$.

Exercici 93. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes

a) $r\colon y = 2x + 4$ i $s\colon y = 7x - 5$

b) $r\colon y = 2x + 4$ i $s\colon x - y - 5 = 0$

c) $r\colon 2x - y - 2 = 0$ i $s\colon \frac{x-1}{2} = \frac{x+5}{2}$

d) $r\colon 2x - 5y - 4 = 0$ i $s\colon x - y - 2 = 0$

e) $r\colon \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

f) $r\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$

Exercici 94. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : 2x-3y+1 = 0$ i $s : -4x + \alpha y = 0$ en funció del paràmetre α.

Nota 3. En general, una manera senzilla de trobar els punts de tall de dues rectes és, en primer lloc, passar-les a l'equació explícita i resoldre el sistema per igualació (vegeu Secció A.8).

En l'exemple anterior (exemple 64), tenim que les rectes r i s es transformen en:

$$\begin{cases} r\colon\ y = \dfrac{-1-x}{-3} \\ s\colon\ y = \dfrac{4x}{7} \end{cases}$$

Per tant, igualant les dues expressions:

$$\frac{-1-x}{-3} = \frac{4x}{7},$$

el que implica que $-7 - 7x = -12x \Rightarrow x = 7/5$. Subtituint a qualsevol de les equacions anteriors i operant, obtenim que $y = 4/5$.

4.4 Exercicis proposats

Punts i vectors

EXERCICI 95. Els punts $A\,(3,-2)\,,B\,(5,0)$ i $C\,(-1,-3)$ són vèrtexs d'un paral·lelogram. Calculeu la posició de l'altre vèrtex D. I trobeu el seu perímetre. Calculeu analíticament $\overrightarrow{AD}$ i el seu mòdul.

EXERCICI 96. Donats els punts $A(3,1)$, $B(-5,1)$, $C(-4,-2)$ i $D(0,-3)$, calculeu, analíticament, els components i el mòdul dels vectors:

a) $\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{BA}$
c) $\overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{CB}$
e) $\overrightarrow{CD}$
f) $\overrightarrow{AD}$
g) $\overrightarrow{BD}$
h) $\overrightarrow{CA}$

EXERCICI 97. Calculeu les coordenades de B si sabem que el vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(3,-4)}$ i $A = (2,-5)$; trobeu les coordenades del punt C si sabem que $D(-5,2)$ i $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(-5,1)}$.

EXERCICI 98. Donats els punts $A(3,0)$, $B(2,3)$, $C(-2,1)$ i $D(7,2)$, esbrineu si els vectors següents són equipolents:

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$
c) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}$

EXERCICI 99. Les coordenades del punt A són el doble de les del punt B. Sabent que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-2,5)}$, calculeu les coordenades dels punts A i B.

EXERCICI 100. Donats els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(7,-4)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-5,-2)}$ i $\vec{w} = \overrightarrow{(-6,0)}$, calculeu:

a) $5\vec{u} - 2\vec{v}$
b) $3\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{w}$
c) $-\vec{w} - 3(\vec{u} - \vec{v})$
d) $-3\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}$

i calculeu-ne els seus mòduls.

EXERCICI 101. Trobeu quatre vectors paral·lels i tres perpendiculars al vector $\vec{u}(-5,4)$. En podeu trobar d'unitaris?

EXERCICI 102. Calculeu l'angle que formen els vectors següents i extreis conclusions sobre la seva direcció i sentit:

a) $\vec{u}(5,2)$ i $\vec{v}(10,4)$
b) $\vec{u}(-3,15)$ i $\vec{v}(2,-10)$
c) $\vec{u}(3,4)$ i $\vec{v}(-50,40)$
d) $\vec{u}(-3,4)$ i $\vec{v}(-2,10)$

EXERCICI 103. Donats els punts $A(2,3)$ i $B(-5,4)$, trobeu els punts que divideixen el segment AB en dues parts iguals, en tres parts iguals i en quatre parts iguals.

Rectes

EXERCICI 104. Trobeu la recta determinada per:

a) Els punts $A(-2,-1)$ i $B(2,4)$

b) El punt $P(1,-4)$ i el vector director $\vec{v}(5,-3)$

c) El punt $P(1,-2)$ i l'angle que forma amb l'eix OX és $\alpha = 135^\circ$

d) El punt $P(1,-1)$ i el pendent $m = 2$

e) El pendent $m = 2$ i l'ordenada a l'origen -5

Exercici 105. Donada la recta r que passa pel punt $P(-5,-3)$ i que té vector director $\vec{v}(12,8)$:

a) Trobeu les equacions vectorial i paramètrica de la recta

b) Trobeu tres punts que pertanyin a r

c) Esbrineu si els punts $(-11,-7)$ i $(2,-1)$ pertanyen a la recta.

Exercici 106. Donada la recta s que passa pel punt $P(4,-3)$ i que té vector director $\vec{v}(2,-7)$:

a) Trobeu l'equació contínua de la recta

b) Trobeu tres punts que pertanyin a s

c) Esbrineu si els punts $(8,-7)$ i $(0,11)$ pertanyen a la recta.

Exercici 107. Donada la recta s que passa pel punt $P(-2,3)$ i que té vector director $\vec{v}(-1,4)$:

a) Trobeu l'equació general de la recta

b) Trobeu tres punts que pertanyin a s

c) Esbrineu si els punts $(-5,15)$ i $(4,3)$ pertanyen a la recta.

Exercici 108. Trobeu l'equació general de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-3,-2)$.

Exercici 109. Trobeu l'equació explícita de la recta que:

a) passa pel punt $A(-3,-1)$ i té pendent $m = -2$

b) passa pels punts $A(-4,-2)$ i $B(-3,-1)$

c) passa pel punt $A(-5,2)$ i té ordenada a l'origen -4.

Exercici 110. Trobeu un punt i el vector director de cadascuna d'aquestes rectes:

a) $\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(-5,-2)} + k\overrightarrow{(-9,7)}$

b) $\frac{x-15}{-1} = \frac{y+2}{6}$

c) $4x - 10y + 6 = 0$

d) $y = -5x + 10$

e) $\begin{cases} x = 2 - 8k \\ y = 3 + 6k \end{cases}$

f) $x - 5 = \frac{y+4}{12}$

g) $x + 3y + 1 = 0$

h) $y = -\frac{3}{2}x - 2$

i) $\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 11 + k \end{cases}$

j) $\frac{-x-5}{-1} = \frac{y+1}{2}$

k) $-2x - y - 12 = 0$

l) $y = x + 4$

Exercici 111. Indiqueu si els punts següents estan alineats:

a) $A(-1, 1)$, $B(2, 1)$ i $C(8, 5)$

b) $D(-1, 2)$, $E(0, 0)$ i $F(2, -2)$

En cas negatiu, obteniu-ne un que hi estigui.

Exercici 112. Esbrineu la posició relativa de les rectes següents:

a) $r\colon 6x - 15y + 1 = 0$ i $s\colon -10x + 25y + 1 = 0$

b) $r\colon 2x - 10y + 8 = 0$ i $s\colon x + 5y + 4 = 0$

c) $r\colon y = 2x + 3$ i $s\colon y = 2x + 1$

d) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon \frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{-12}$

e) $r\colon 2x + 6y + 4 = 0$ i $s\colon -3x - 9y - 6 = 0$

f) $r\colon y = x + 1$ i $s\colon y = -x + 1$

g) $r\colon y = 3x + \frac{1}{2}$ i $s\colon 6x - 2y + 1 = 0$

h) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon \begin{cases} x = -10 - k \\ y = 2 + k \end{cases}$

i) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon 2x - y + 5 = 0$

Exercici 113. Trobeu el punt d'intersecció de les rectes secants de l'exercici anterior.

Exercici 114. Trobeu la recta paral·lela a la recta *r* que passa pel punt *P* en els casos següents:

a) $r\colon 4x - 5y + 3 = 0$, $P(-3, 5)$

b) $r\colon \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3}$, $P(4, -10)$

c) $r\colon y = -5x + 3$, $P(-1, 1)$

Exercici 115. Indiqueu si els parells de rectes següents són perpendiculars:

a) $r\colon x - 5y + 1 = 0$, $s\colon 10x + 2y - 3 = 0$

b) $r\colon y = 2x + 4$, $s\colon y = -\frac{1}{2}x + 8$

c) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$, $s\colon \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-1}$

d) $r\colon x + y + 4 = 0$, $s\colon -x - y - 1 = 0$

e) $r\colon y = x + 1$, $s\colon y = -x - 2$

f) $r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{7}$, $s\colon 7x + 3y + 5 = 0$

Exercici 116. Trobeu l'equació de la recta perpendicular a la recta r que passa pel punt P:

a) $r\colon 4x - 5y + 3 = 0$, $P(-3, 5)$

b) $r\colon \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3}$, $P(4, -10)$

c) $r\colon y = -5x + 3$, $P(-1, 1)$

d) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -2 - 6\lambda \end{cases}$, $P(1, 1)$

Exercici 117. Calculeu el valor de a per a què les rectes $r \equiv x + ay + 4 = 0$ i $s \equiv 3x + 4y - 1 = 0$:

a) Siguin paral·leles

b) Siguin perpendiculars

c) Formin un angle de 180 graus

d) Formin un angle de 60 graus

Exercici 118. Calculeu l'angle que formen les rectes següents:

a) $r\colon x - y + 1 = 0$, $s\colon 7x + 2y - 3 = 0$

b) $r\colon y = -3x + 4$, $s\colon y = -x + 1$

c) $r\colon 2x + y + 4 = 0$, $s\colon -3x + 2y - 1 = 0$

d) $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3}$, $s\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2}$

Exercici 119. Donada la recta $r\colon 2x - 3y + 1 = 0$, calculeu:

a) el seu vector director i un vector perpendicular,

b) l'equació de la recta que passa pel punt $A\,(3, -5)$ i que és perpendicular a la recta r,

c) el punt simètric del punt A respecte de la recta r.

Exercici 120. Calculeu el pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes següents:

a) $x + 3y = 4$

b) $4y + 5 = -x$

c) $2x - 7y = 0$

d) $-8y = 8$

Exercici 121. Calculeu l'equació de la recta que passa pels punts $A\,(-1, 0)$ i $B\,(-4, -1)$. Calculeu el seu vector director i altres dos punts més de la recta.

Exercici 122. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $A\,(3, -5)$ i que segueix la direcció $\vec{v}(-1, 7)$. Calculeu la seva pendent.

Exercici 123. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pels punts $A(2, 3)$ i $B(-5, 1)$.

Exercici 124. Donada la recta $y = 2x + 8$, calculeu:

a) el seu vector director,

b) l'equació de la recta paral·lela que passa pel punt $(0, -8)$,

c) un vector perpendicular a la recta,

d) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt $(0, -8)$.

Exercici 125. Calculeu els punts de tall dels parells de rectes següents:

a) $r\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$ i $s\colon 3x - 5y + 2 = 0$

b) $r\colon y = 6x - 10$ i $s\colon 9x - 3y + 27 = 0$

c) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon y = -x + 2$

d) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \end{cases}$

e) $r\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$ i $s\colon \frac{x}{10} = \frac{y+8}{-1}$

f) $r\colon 3x - 2y + 6 = 0$ i $s\colon -8x + 7y + 2 = 0$

g) $r\colon y = 4x - 2$ i $s\colon y = 10x - 8$

h) $r\colon y = 4x - 2$ i $s\colon y = 4x - 10$

i) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{3}$

j) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon 10x - 2y + 3 = 0$

k) $r\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+10}{-2}$ i $s\colon y = 10x - 12$

5

Geometria de l'espai

5.1 Sistema de coordenades espacials

De forma anàloga al pla cartesià, a l'espai tridimensional tenim tres eixos de coordenades, x, y i z, els quals són perpendiculars i parteixen d'un punt, anomenat ***origen de coordenades***. La forma més usual de representar aquests eixos dibuixant l'eix x en la direccció dreta-esquerre, l'eix y en la direcció davant-darrera i l'eix z en la direcció dalt-baix (Figura 5.1)

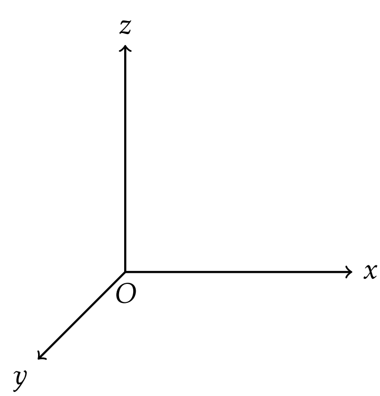


Figura 5.1: Representació usual del sistema de coordenades cartesianes

En aquest sistema de coordenades, un punt qualsevol P ve localitzat per les projeccions als eixos de coordenades. De la mateixa manera que el cas bidimensional, direm que P té ***coordenades*** (x, y, z) i el podrem denotar com $P = (x, y, z)$ o bé com $P(x, y, z)$. Per exemple, el punt de coordenades $(1, 2, 3)$ correspon al punt A de la figura següent (Figura 5.2).

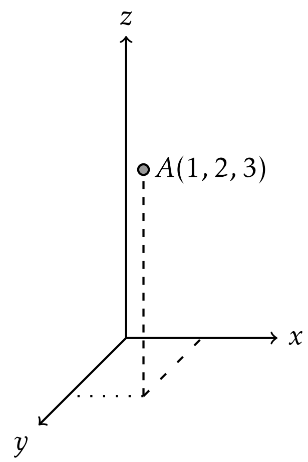


Figura 5.2: Representació del punt $A(1,2,3)$

Exercici 126. Representeu gràficament en els eixos de coordenades els punts $A = (3,-2,4)$ i $B = (5,0,-2)$.

5.2 Vectors

Les definicions relatives a vectors que hem estudiat a l'apartat de Geometria del pla (vector fix, vector lliure, extrems d'un vector, etc.; vegeu Capítol 4) poden adaptar-se fàcilment a l'espai només afegint una altra coordenada als vectors. A l'igual que al pla, suposarem que tots els vectors són lliures.

Exemple 65. Són vectors el següents:

$$\vec{B}(3,-2,6),\ \vec{C}(-5,1,-8)$$

Amb la convenció d'eixos del dibuix anterior (Figura 5.1), el vector $\vec{B}$ apunta cap a la dreta, s'allunya del lector, i cap a dalt, i el vector $\vec{C}$ apunta cap a l'esquerre, cap al lector, i cap a baix. Com que no se'ns diu quins són els seus origens, es consider que aquests vectors són lliures i que, per tant, els seus punts d'origen es poden situar on es desitgi.

5.2.1 Base estàndard de vectors

Definició 36 (base estàndard de vectors)**.** A l'espai cartesià, existeixen tres vectors que formen el que s'anomena ***base estàndard de vectors*** la qual està formada per tres vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, que tenen les coordenades següents:

$$\vec{i} = \overrightarrow{(1,0,0)},\ \vec{j} = \overrightarrow{(0,1,0)},\ \vec{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$$

Aquests vectors són unitaris, ortogonals (perpendiculars entre si) i formen un base: qualsevol vector es pot posar com a combinació lineal de $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$[1]. És a dir, si $\vec{v}$

[1]Les definicions de base d'un espai vectorial escapen a l'abast d'aquest text.

és un vector, aleshores existeixen nombres a, b i c de manera que $\vec{v} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$. Per les definicions de $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ és clar que aquests a, b i c són els valors de les coordenades de v.

Exemple 66. El vector $\vec{v} = (3, 2, 2)$ compleix que $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Es pot veure la seva representació a la figura següent (Figura 5.3).

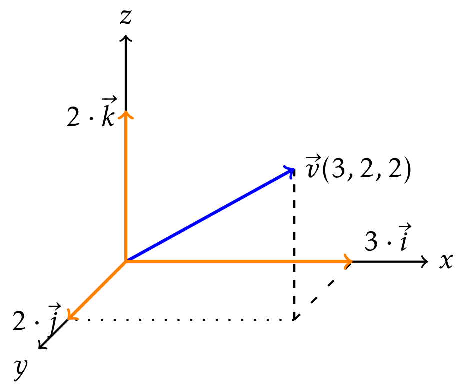


Figura 5.3: Descomposició lineal del vector $\vec{v}(3, 2, 2)$ respecte de la base estàndard

5.2.2 Operacions amb vectors anàlogues al pla

El mòdul d'un vector i les operacions de suma i resta de vectors, producte d'un escalar per un vector i producte escalar de dos vectors es defineixen de manera anàloga al pla:

- El mòdul d'un vector $\vec{u}(a, b, c)$ es calcula com
$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$
Per exemple, $|\overrightarrow{(3, -2, 6)}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$

- Donats dos vectors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, la seva suma es defineix com $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
Per exemple, si $\vec{u} = (2, -3, 4)$ i $\vec{v} = (-2, -7, 0)$, aleshores $\vec{u} + \vec{v} = (0, -10, 4)$.

- La resta de dos vectors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ es defineix com $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$.
Per exemple, si $\vec{u} = (2, -3, 4)$ i $\vec{v} = (-2, -7, 0)$, aleshores $\vec{u} - \vec{v} = (4, 4, 4)$.

- Si $k \in \mathbb{R}$ és un nombre qualsevol i $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ és un vector, llavors el producte $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)$.
Per exemple, si $\vec{u} = (2, -3, 4)$ i $k = -3$, aleshores $k \cdot \vec{u} = (-6, +9, -12)$.

- Dos vectors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ són paral·lels si, i només si, $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$ (vegeu proposició 7).

- Si $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ són vectors, el seu producte escalar es defineix com
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$
Així per exemple, $\overrightarrow{(3, -2, 4)} \cdot \overrightarrow{(-1, 0, -5)} = -3 + 0 - 20 = -23$.

  Es verifica el resultat relatiu a l'angle entre dos vectors (proposició 8) i les propietats del producte escalar (teorema 9).

Exercici 127. Determineu si els vectors són paral·lels entre si:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, -3, 1)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(4, -6, 2)}$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, -3, 1)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(4, -6, 3)}$

Exercici 128. Què val l'angle format entre els vectors $\vec{u}(2, 0, -3)$ i $\vec{v}(-3, 1, 2)$?

5.2.3 Producte vectorial

Vegem tot seguit una operació nova: el producte vectorial entre vectors. Noteu la paraula *vectorial* (que no escalar) a aquesta expressió. La importància d'aquesta paraula és perquè el producte vectorial donarà com a resultat un vector mentre que el producte escalar dóna com a resultat un nombre.

Definició 37 (producte vectorial de vectors)**.** El ***producte vectorial de dos vectors***, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$, que es denota per $\vec{u} \wedge \vec{w}$ o $\vec{u} \times \vec{w}$, respecte de la base estàndard, es defineix com:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{w} &= (u_1, u_2, u_3) \wedge (w_1, w_2, w_3) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aquest determinant es pot fer aplicant la regla de Sarrus (algorisme 1).

Notem que el producte vectorial de dos vectors és, per tant, un altre vector.

Exemple 67. Siguin els vectors $\vec{u}(2, 0, -3)$ i $\vec{v}(-3, 1, 2)$. Aleshores, el seu producte vectorial és:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{k} + 0 + 9\vec{j} + 3\vec{i} + 0 - 4\vec{j} \\ &= 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \\ &= (3, 5, 2) \end{aligned}$$

Exercici 129. Calculeu $\vec{u} \wedge \vec{v}$, amb $\vec{u}(0, -2, 3)$ i $\vec{v}(-3, -5, 4)$.

Hi ha una proposició que permet calcular el mòdul del producte vectorial sense calcular el producte vectorial en si mateix. Aquesta proposició és la següent.

Proposició 18 (mòdul del producte vectorial). *Donat dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, el mòdul del seu producte vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ compleix que*

$$\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \widehat{uv},$$

on $\widehat{uv}$ denota l'angle que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Notem que el sinus d'un angle es pot calcular de forma exacta amb qualsevol calculadora científica moderna. Així i tot, existeixen taules del sinus pels angles més usuals (vegeu Secció A.9).

5.2.3.1 Propietats del producte vectorial

Donats els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i el nombre k qualssevol, el producte vectorial verifica les propietats següents:

a) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (anticommutativa)

b) $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

c) $k\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \left(k\vec{a}\right) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \left(k\vec{b}\right)$

d) $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

e) En general, $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$

f) El vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ és perpendicular tant al vector $\vec{a}$ com al vector $\vec{b}$.

g) El mòdul del producte vectorial de dos vectors ens dóna l'àrea del paral·lelògram definit per aquest dos vectors (Figura 5.4):

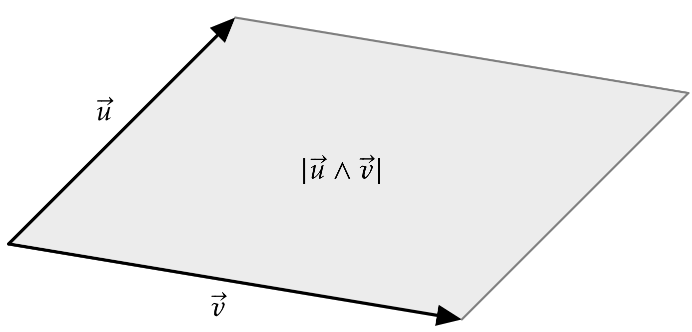


Figura 5.4: Àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

Observació 18. Com que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ i $\vec{b} \wedge \vec{a}$ són perpendiculars a $\vec{a}$ i $\vec{b}$, això vol dir que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ i $\vec{b} \wedge \vec{a}$ estan a la mateixa línia, un apuntant cap a baix i un apuntant cap a dalt. Per determinar l'orientació d'aquests dos vectors de forma gràfica existeix un procediment, anomenat *regla del llevataps* [8]: per determinar si $\vec{a} \wedge \vec{b}$ apunta cap a baix o cap a dalt, hem de representar els dos vectors en un mateix pla amb el mateix origen[2] i observar si el moviment que desplaçaria $\vec{a}$ cap a $\vec{b}$ es fa amb sentit horari o bé amb sentit antihorari:

- Si es fa amb sentit horari, aleshores $\vec{a} \wedge \vec{b}$ apuntarà cap a baix.
- Si per contra, es fa amb sentit antihorari, aleshores apuntarà cap a dalt.

Per tant, el producte vectorial és útil si es vol trobar un vector perpendicular a dos donats.

Exercici 130. Trobeu un vector que sigui perpendicular als vectors $\vec{a}(-4, 0, 3)$ i $\vec{b}(-3, -1, 0)$, simultàniament.

Exercici 131. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(4, -2, 5)$ i $\vec{v}(3, 0, -5)$. Trobeu un altre vector ortonormal.

Exercici 132. Trobeu l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors $\vec{u}(-2, 0, 4)$ i $\vec{v}(1, 3, -1)$.

5.2.4 Producte mixt

Tot seguit veurem una nova operació, entre tres vectors, la qual tendrà la principal aplicació de calcular volums de determinats prismes i piràmides (proposició 20, proposició 21).

Definició 38 (producte mixt)**.** Donats tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, el seu ***producte mixt***, que es denota per $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, es defineix com

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Notem que el producte mixt no és, en general, una operació commutativa. És a dir, el valor numèric del producte mixt depèn fortament de l'ordre dels vectors involucrats.

Exemple 68. Donats els vectors $\vec{u}\,(0, -1, 5)$, $\vec{v}(2, 0, -3)$ i $\vec{w}(-3, 1, 2)$, calculeu el producte mixt $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Tenim que

$$\begin{aligned}
[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \\
&= (0, -1, 5) \cdot ((2, 0, -3) \wedge (-3, 1, 2)) \\
&= (0, -1, 5) \cdot (3, 5, 2) \\
&= 0 - 5 + 10 = 5.
\end{aligned}$$

[2] Recordem que podem moure els vectors i situar-los amb un mateix origen perquè són vectors lliures.

Proposició 19 (Càlcul del producte mixt usant determinants). *Per a qualssevol vectors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el producte mixt $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ també es pot calcular amb la fórmula següent:*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

és a dir, els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ disposats per fileres al determinant.

Exemple 69. Donats els vectors $\vec{u}\,(0, -1, 5)$, $\vec{v}(2, 0, -3)$ i $\vec{w}(-3, 1, 2)$, calculeu $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 + 10 + 4 = 5.$$

Exercici 133. Calculeu $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, amb $\vec{u}\,(3, 1, -2)$, $\vec{v}(-2, 10, 0)$ i $\vec{w}(0, -1, -5)$.

Definició 39 (paral·lelepípede). Un ***paral·lelepípede*** és un prisme la base del qual és un paral·lelogram (Figura 5.5).

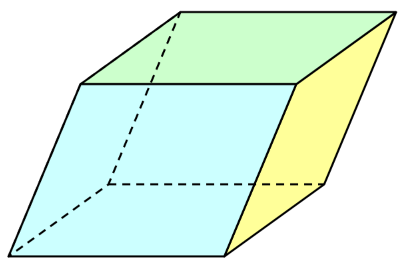


Figura 5.5: Un paral·lelepípede

Proposició 20 (càlcul del volum d'un paral·lelepípede). *Donat el paral·lelepípede definit pels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ (vegeu Figura 5.6), el seu volum V_p és igual al valor absolut del producte mixt, és a dir,*

$$V_p = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

Això vol dir que heu de calcular el producte mixt dels vectors que defineixen els paral·lelepípede i després positivar el seu resultat.

Definició 40 (tetraedre). Un ***tetraedre*** és una piràmide amb totes les cares iguals entre si i iguals a triangles equilàters.

Proposició 21 (càlcul del volum d'un tetraedre). *Donat el tetraedre format pels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, el seu volum V_t és igual a:*

$$V_t = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|,$$

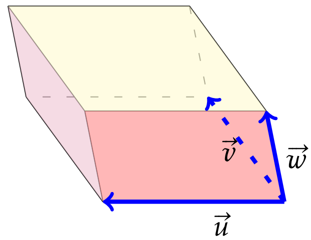


Figura 5.6: Volum del paral·lelepípede definit pels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$

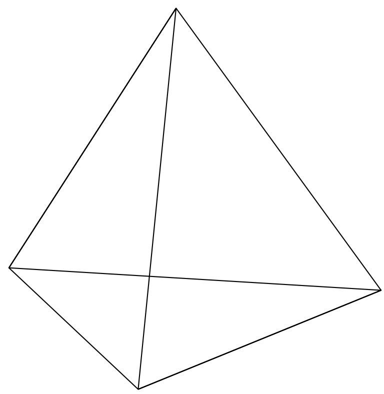


Figura 5.7: Dibuix d'un tetraedre

és a dir, calcular el producte mixt dels vectors corresponents, positivar-lo i multiplicar-lo per un sisè.

Exercici 134. Calculeu el volum del tetraedre definit pels vectors: $\overrightarrow{(1,2,-2)}$, $\overrightarrow{(-1,0,1)}$ i $\overrightarrow{(2,1,0)}$. Comproveu que el volum del paral·lelepípede definit pels mateixos vectors és sis vegades més gran.

5.3 La recta a l'espai

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de tres dimensions.

Si d'una recta coneixem un punt qualsevol d'aquesta i un vector tengui la mateixa direcció (és a dir, que estigui situat sobre ella o bé que estigui situat sobre una recta paral·lela), llavors tenim elements suficients per a determinar-la completament, és a dir, per a determinar les coordenades de qualsevol punt.

En altres paraules, basta que coneguem un punt de la recta P_0 i el seu ***vector director*** $\vec{v}$.

Definició 41 (equació vectorial de la recta)**.** Una recta r es pot determinar per un punt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la recta i un vector director $\vec{v}$, de manera que, per a qualsevol punt $P(x, y, z)$ pertanyent a la recta, es té que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}, \tag{5.1}$$

per qualque $\lambda \in \mathbb{R}$ (Figura 5.8). Aquesta equació (5.1) es coneix com a ***equació vectorial de la recta***.

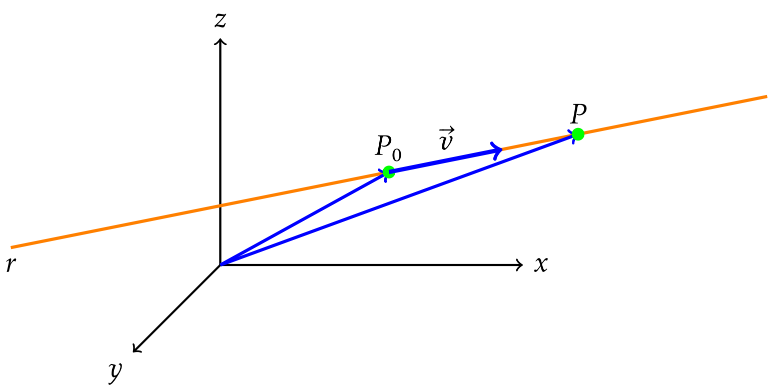


Figura 5.8: Representació de la recta que té vector director $\vec{v}$ i que passa per P_0.

5.3.1 Equació paramètriques de la recta

Sigui r una recta determinada per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punt qualsevol i $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ és el seu vector director. Aleshores un punt $P(x, y, z)$ de la recta compleix l'equació vectorial (Equació 5.1), és a dir, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$, per qualque $\lambda \in \mathbb{R}$, o sigui, $\overrightarrow{(x, y, z)} = \overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)} + \lambda\overrightarrow{(v_x, v_y, v_z)}$. Operant, tenim que s'ha de verificar que

$$\overrightarrow{(x, y, z)} = (\overrightarrow{x_0 + \lambda v_x, y_0 + \lambda v_y, z_0 + \lambda v_z}).$$

Si dos vectors són iguals, llavors component a component són iguals. El que implica que

$$r\colon \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{array} \right. , \tag{5.2}$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquesta equació (Equació 5.2), reb el nom de ***equació paramètrica de la recta***.

Exemple 70. Si una recta passa pel punt $(0, -1, 3)$ i el seu vector director és el $\vec{v}(-3, 2, 0)$, llavors la seva equació paramètrica és la següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 + \lambda \cdot (-3) \\ y = -1 + \lambda{\cdot}2 \\ z = 3 + \lambda{\cdot}0 \end{array} \right. , \text{ és a dir, } \left\{ \begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir λ per qualsevol nombre a les expressions anteriors.

Exemple 71. Si a la recta anterior (exemple 70), feim $\lambda = 2$, tenim que

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \\ z = 3 \end{array} \right. ,$$

i, per tant, $(-6, 3, 3)$ és un altre punt de la recta.

Exercici 135. Escriviu les equacions paramètriques de les rectes següents:

a) recta que passa pel punt $(-1, 0, 2)$ i que té la direcció donada pel vector director $\vec{v}(1, 3, -5)$.

b) recta que passa per l'origen de coordenades i que té com a vector director $\overrightarrow{(1, -2, 0)}$.

c) recta que passa pels punts $(3, -5, 2)$ i $(2, -7, -3)$.

Trobeu dos punts més de cada recta.

5.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllam λ en cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (Equació 5.2), tenim que

$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_x}, \ \lambda = \frac{y - y_0}{v_y}, \ \lambda = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Si igualam les expressions, obtenim el que s'anomena ***equació en forma contínua de la recta*** (o simplement ***equació contínua***):

$$r \colon \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}, \tag{5.3}$$

on $P(x_0, y_0, z_0)$ és un punt qualsevol de la recta i $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ és el seu vector director.

Exemple 72. Trobeu l'equació contínua de la recta r que passa pel punt $(0, -1, 3)$ i té com a vector director $\vec{v}(-3, 2, 0)$.

Solució. La recta r té com a equació contínua:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 3}{0}$$

■

Observació 19. Observem que en aquest exemple ha aparegut un denominador igual a 0. A pesar de què la divisió per 0 no és una operació que estigui definida, en el context de l'equació contínua d'una recta, aquesta expressió està permesa.

Exercici 136. Escriviu les equacions contínues de la rectes següents:

a) recta que passa per $(0, -5, 3)$ i que té vector director $\vec{v}(1, -2, 2)$.

b) recta que passa pels punts $(6, -2, 0)$ i $(2, -1, -1)$.

c) recta que passa pel punt $(-1, -1, 2)$ i que té com a vector director $\vec{v}(2, 0, -3)$.

5.3.3 Equació implícita de la recta

Si a les equacions de la recta en forma contínua (Equació 5.3) llevam els denominadors i transposem tots els termes al primer membre, obtindrem dues equacions de la forma:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}, \tag{5.4}$$

on A, B, C, D, A', B', C' i D' són nombres reals. Aquestes equacions reben el nom d'***equació implícita de la recta***.

Exemple 73. Trobeu l'equació implícita de la recta que passa pel punt $(0, -1, 3)$ i que té vector director $\vec{v}(-3, 2, 0)$.

Solució. La recta r que passa pel punt $(0, -1, 3)$ i que té vector director $\vec{v}(-3, 2, 0)$ té l'equació contínua:

$$r\colon \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{0}$$

(vegis' exemple 72). Per tant, fent els productes creuats de cada igualtat, obtenim que:

$$r\colon \begin{cases} 2x &= -3\,(y+1) \\ 0\,(y+1) &= 2\,(z-3) \\ 0 &= -3(z-3) \end{cases}$$

Així, operant, obtenim un sistema de tres equacions i tres incògnites:

$$r\colon \begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \\ -3z + 9 = 0 \end{cases}$$

Per la naturalesa de la recta aquest sistema té rang 2, és a dir, té un grau de llibertat. Això vol dir que d'aquestes tres equacions, n'hem de triar dues que no siguin linealment dependents. En el nostre cas, es veu que la segona i la tercera són linealment independents. Per tant, l'equació implícita de la recta queda:

$$r\colon \begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

■

Observació 20. De vegades és necessari calcular tots els productes creuats per a passar de l'equació contínua a la implícita perquè els productes creuats de la primera i segona fracció i de la segona i tercera fracció poden ser linealment dependents. Vegeu per exemple l'exercici exercici 139 apartat *c*).

Observació 21. Noteu que en principi no podem obtenir l'equació implícita d'una recta directament amb el seu vector director i un punt d'aquesta. En aquest cas, hem de passar per l'equació contínua per obtenir l'equació implícita.

Observació 22. L'equació general de la recta en el pla és de la forma $Ax+By+D = 0$ (Subsecció 4.3.3). Per tant, es podria pensar que la generalització d'aquesta equació a l'espai seria $Ax+By+Cz+D=0$. Però això no és així: aquesta equació correspon a un pla (vegeu Secció 5.4). La raó d'aquest fet és que, si fos així, tendríem una equació amb dues incògnites, la qual cosa ens donaria dos graus de llibertat, el que correspon a un pla. En aquest sentit, l'equació implícita d'una recta (Equació 5.4) es pot veure com a la intersecció de dos plans.

Exercici 137. Trobeu les equacions implícites de les rectes de l'exercici 136.

Solució 1. Una solució podria ser aquestes: *a*) $\{-2x-y-5=0, 2y+2z+4=0\}$ *b*) $\{x+4y+2=0, -y-z-2=0\}$ *c*) $\{2y+2=0, -3x-2z+1=0\}$. ■

5.3.3.1 Vector director a partir de l'equació implícita

La proposició següent dóna una manera per trobar el vector director d'una recta que ve donada mitjançant l'equació implícita.

Proposició 22 (vector director a partir de l'equació implícita)**.** *Sigui r una recta donada amb l'equació implícita:*

$$r\colon \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

El seu vector director, v_r, es pot calcular amb la fórmula:

$$\vec{v_r} = (A,B,C)\wedge(A',B',C') \tag{5.5}$$

Exemple 74. Trobeu el vector director de la recta

$$r\colon \begin{cases} 2x+3y+3=0 \\ 2z-6=0 \end{cases}$$

Solució. El vector director de la recta és $\vec{v}=(2,3,0)\wedge(0,0,2)$, és a dir,

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (6,-4,0)\,.$$

■

Exercici 138. Calculeu el vector director de les rectes:

a) $\begin{cases} x-y-5=0 \\ 4x+y-5z-6=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-z-5=0 \\ 3x+y-z-2=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x=0 \\ 2z+y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+3y+5z-2=0 \\ 4x+6y+10z-4=0 \end{cases}$

5.3.3.2 Pas de l'equació implícita a l'equació paramètrica

Mètode 1. Càlcul de punts i vector director Per passar de l'equació implícita a l'equació paramètrica ho farem indirectament: calcularem el vector director de la recta i un punt. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 75. Trobeu les equacions paramètriques de la recta

$$r\colon \begin{cases} 2x + y + 2z + 4 = 0 \\ x - y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

Solució.

- Per l'apartat anterior (Subsubsecció 5.3.3.1), tenim que el seu vector director és

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= -2\vec{k} + 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{i} - \vec{k} - 8\vec{j} \\ &= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} = \overrightarrow{(6, -6, -3)}. \end{aligned}$$

- Per trobar un punt, substituïm una variable qualsevol, o x o y o z[3]. Triem x. Substituïm, $x = 0$. Llavors hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} y + 2z + 4 = 0 \\ -y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

  Per resoldre aquest sistema podem aplicar qualsevol dels mètodes de resolució de sistemes d'equacions (vegeu Secció A.8). Nosaltres aplicarem el mètode de reducció[4]: sumant les equacions obtenim: $6z + 16 = 0$, el que implica que $z = \frac{-8}{3}$. Substituïnt el valor de z a la primera equació i realitzant els càlculs, obtenim $y = \frac{4}{3}$. Per tant, un punt de la recta és $(0, \frac{4}{3}, \frac{-8}{3})$.

- Amb tota la informació anterior, l'equació paramètrica de la recta és:

$$r\colon \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = \frac{4}{3} - 6\lambda \\ z = \frac{-8}{3} - 3\lambda \end{cases}.$$

■

[3]Penseu que una recta té 2 equacions i 3 incògnites. Per tant, hi ha un grau de llibertat. D'aquesta manera només hem de substituir una sola variable.

[4]També podríem resoldre aquest sistema usant la regla de Cràmer.

Mètode 2. Parametritzant variables En aquest cas, per passar de l'equació implícita a l'equació paramètrica, escollirem una variable qualsevol, que parametritzarem. I després resoldrem un sistema d'equacions de dues variables i dues incògnites. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 76. Trobeu les equacions paramètriques de la recta

$$r\colon \begin{cases} 2x + y + 2z + 4 = 0 \\ x - y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

Solució.

- Triarem y per a parametritzar. Per tant, $y = \lambda$. Amb la qual cosa el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x + 2z = -4 - \lambda \\ x + 4z = -12 + \lambda \end{cases}$$

- Ara hem de resoldre aquest sistema: podem aplicar directament la regla de Cràmer o bé aplicar alguns dels mètodes de resolució de sistemes 2×2 (reducció, igualació o substitució; vegeu Secció A.8). Optem per la primera opció:

  – El determinant de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$$

  – Per tant,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 2 \\ -12 + \lambda & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{8 - 6\lambda}{6} = \frac{4}{3} - \lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 - \lambda \\ 1 & -12 + \lambda \end{vmatrix}}{6} = \frac{-20 + 3\lambda}{6} = \frac{-10}{3} + \frac{1}{2}\lambda$$

- Amb tota la informació anterior, l'equació paramètrica de la recta és:

$$r\colon \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{-10}{3} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} .$$

■

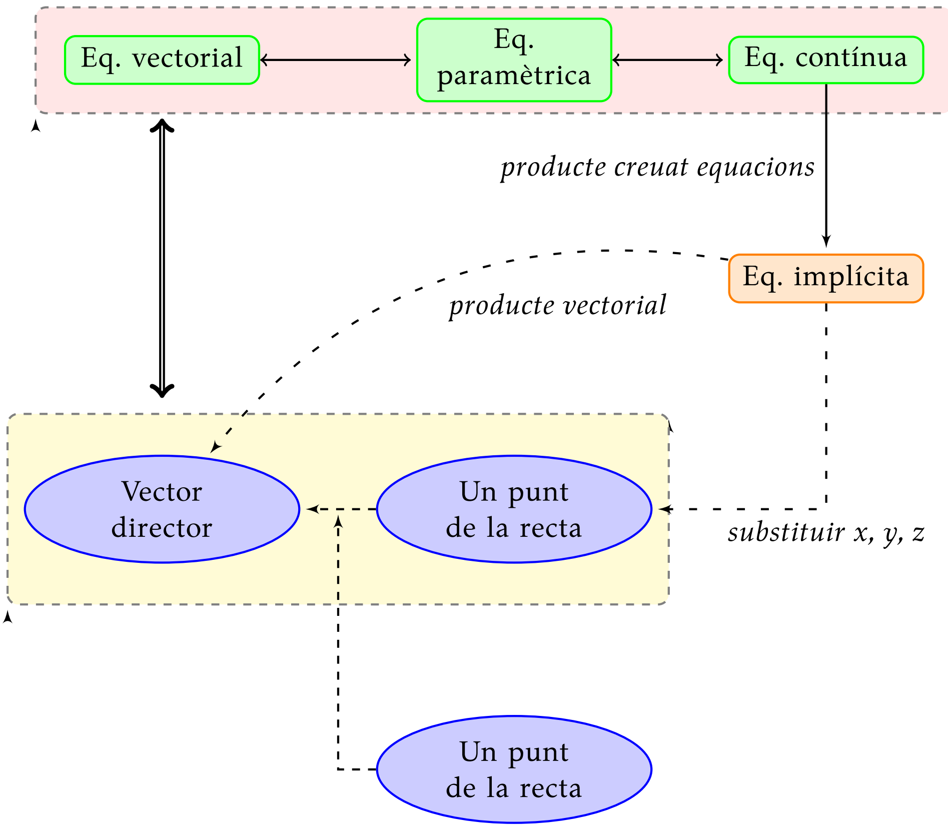


Figura 5.9: Relacions entre les equacions d'una recta

5.3.4 Pas entre equacions de la recta

Tenim diverses equacions per a expressar una recta: vectorial, paramètrica, contínua i implícita. Podem observar el diagrama següent (Figura 5.9) a mode de resum, el que permet saber com passar ràpidament d'una equació a una altra d'una recta.

Exemple 77. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $P(3,-2,0)$ i que té per vector director $\vec{v}(1,0,-1)$.

Solució. Tenim que:

- L'equació vectorial és

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{(3,-2,0)} + \lambda\overrightarrow{(1,0,-1)}$$

- Les equacions paramètriques són

$$r : \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

- L'equació contínua és
$$r : x - 3 = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{-1}$$
- I les equacions implícites són
$$r : \begin{cases} 0 \cdot (x-3) & = & y+2 \\ -1 \cdot (x-3) & = & z \end{cases}, \text{ és a dir, } r : \begin{cases} y+2 & = & 0 \\ -x-z+3 & = & 0 \end{cases}$$

■

Exercici 139. Trobeu totes les equacions de les rectes següents:

a) Recta que té vector director $\overrightarrow{(2,-3,-1)}$ i passa per $(0,2,-10)$

b) Recta que passa pels punts $(7,-4,0)$ i $(3,0,-5)$

c) Recta donada per l'equació $\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(3,2,1)} + \lambda\overrightarrow{(-1,0,1)}$, amb (x,y,z) un punt qualsevol de la recta.

d) Recta donada per $r\colon \frac{x-3}{5} = y+3 = \frac{z+2}{-2}$

e) La recta $s\colon \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 4x+7z=0 \end{cases}$

5.3.5 Rectes paral·leles

Donada una recta r que té vector director $\vec{v}$ i passa per P, si volem trobar una recta paral·lela s que passi per Q, només hem de notar que s tendrà $\vec{v}$ com a vector director i passarà per Q.

Exemple 78. Calculeu l'equació de la recta paral·lela a $r\colon \frac{x}{-4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2}$ que passa pel punt $A(2,5,-1)$.

Solució. Donat que la recta que cercan és paral·lela a la recta r, ambdues tenen el mateix vector director: $\vec{v}(-4,3,2)$. A més, sabem que la recta ha de passar pel punt $A(2,5,-1)$. Llavors, si subtituïm aquestes dues dades, per exemple, a l'equació contínua de la recta, obtindrem:
$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{2}$$

■

Exercici 140. Donada la recta $r : \{x = 3+\lambda,\ y = -2,\ z = -\lambda\}$ en forma paramètrica, trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela a r que passa pel punt $A(0,-8,6)$.

Exercici 141. Trobeu l'equació paramètrica de la recta s que passa per $(0,4,4)$ i és paral·lela a $r\colon \begin{cases} 2x-y-2z=0 \\ 8x-7z=0 \end{cases}$.

5.4 El pla a l'espai

Per definir un pla a l'espai necessitam tres punts A, B i C no alineats, o equivalentment, un punt A, per on passa el pla, i dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ linealment independents[5] (la definició de vectors linealment dependents és anàloga a la de línies d'una matriu; vegeu definició 21) — en el cas de només tenir dos vectors, tendríem infinits plans paral·lels. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'anomenen ***vectors directors*** del pla.

D'aquesta manera, si π és el pla determinat per A, i els vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, aleshores un punt P que pertanyi a π compleix que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Però $\overrightarrow{AP}$ és suma dels vectors $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{AN}$, que són múltiples de $\vec{u}$ i $\vec{v}$. És a dir,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\end{aligned}$$

per qualques $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Figura 5.10). En resum,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \tag{5.6}$$

amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aquesta equació (Equació 5.6), s'anomena ***l'equació vectorial del pla***.

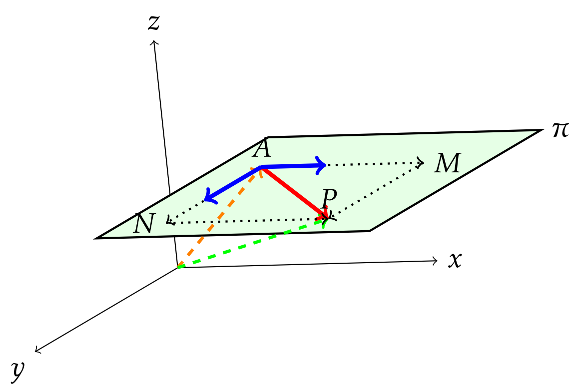


Figura 5.10: Representació de les equacions vectorials d'un pla

5.4.1 Equacions paramètriques del pla

A partir de l'equació vectorial del pla (Equació 5.6), igualant coordenades s'obtenen les ***equacions paramètriques del pla***: si π és un pla determinat pel punt

[5] L'equivalència, resulta prenent $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

$A(x_1, y_1, z_1)$ i els vectors directors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, aleshores les equacions paramètriques de π són:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \tag{5.7}$$

on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Recordeu que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors no proporcionals entre si.

Observació 23. Si donam valors qualssevol als paràmetres λ i μ i els substituim a l'expressió anterior, aleshores trobarem punts del pla en qüestió.

Exemple 79. Sigui π el pla que conté el punt $(2, 0, -3)$ i que els vectors $(0, 3, -1)$ i $(2, 5, 0)$ (els quals no són proporcionals entre si). Trobeu dos punts de π a més del que ja sabem.

Solució.

L'equació paramètrica de π és

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2 \\ y = 0 + \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 5 \\ z = -3 + \lambda \cdot (-1) + \mu \cdot 0 \end{cases} \quad \text{i.e.,} \begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = 3\lambda + 5\mu \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

Si donam valors a λ i μ obtenim altres punts del pla:

- Fent $\lambda = 0$ i $\mu = 1$, obtenim que $x = 4$, $y = 5$ i $z = -3$. Per tant, $(4, 5, -3)$ pertany a π.
- Fent $\lambda = 1$ i $\mu = 0$, obtenim que $x = 2$, $y = 3$ i $z = -4$. Per tant, $(2, 3, -4) \in \pi$.

■

Exercici 142. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(0, 0, -8)$ i que és paral·lel als vectors $\vec{u}(2, 0, -5)$ i $\vec{v}(1, 1, 9)$. Trobeu tres punts més del pla. Trobeu un vector més que pertanyi al pla (a partir dels punts que heu trobat o bé a partir de combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$). En podeu trobar un d'unitari?

5.4.2 Equació general del pla

El darrer tipus d'equació del pla és l'***equació general***, també anomenada ***equació implícita***. L'equació general té la forma

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0,$$

on A, B, C i D són nombres qualssevol. Per trobar l'equació general d'un pla π determinat pels vectors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ i que passa pel punt $P = (a, b, c)$, es pot emprar la fórmula següent (Equació 5.8):

$$\begin{vmatrix} x - a & u_1 & v_1 \\ y - b & u_2 & v_2 \\ z - c & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.8}$$

Exemple 80. Calculeu l'equació general del pla definiti en l'exemple 79.

Solució. Seguint amb el pla de l'exemple esmentat, tenim que tots els seus punts compleixen l'equació

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ y-0 & 3 & 5 \\ z-(-3) & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calculant el determinant,

$$\pi \equiv -2y - 6\,(z+3) + 5\,(x-2) = 0,$$

és a dir,

$$\pi \equiv 5x - 2y - 6z - 28 = 0$$

■

Exercici 143. Trobeu l'equació general del plans:

a) El pla π_1 que té com a vectors directors $\overrightarrow{(3,-2,3)}$ i $\overrightarrow{(1,1,1)}$ i passa pel punt $(2,2,4)$.

b) El pla π_2 que passa pel punt $(0,1,-2)$ i és paral·lel als vectors $\vec{u} = (0,2,4)$ i $\vec{v} = (4,4,2)$.

c) El pla que té vectors directors $\vec{u}(1,0,0)$ i $\vec{v}(0,0,1)$ i passa per $(0,2,2)$.

5.4.2.1 Pas de l'equació general a la paramètrica

Notem que, si tenim un pla π expressat mitjançant una equació paramètrica, aleshores és relativament senzill expressar π mitjançant l'equació general. El motiu és que en l'equació paramètrica del pla tenim els vectors directors i un punt de π. Per tant, simplement aplicarem la fórmula Equació 5.8. Ara bé, si volem fer le procés invers llavors el procés és més llarg, ja que no *veiem* els vectors directors ni els punts per on passa π de l'equació general.

Existeixen dues maneres de passar de l'equació general a l'equació paramètrica, que podem usar indistintament.

Mètode 1. Càlcul de punts Donat $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un pla qualsevol, si volem trobar la seva equació paramètrica el que hauríem de fer seria:

a) Trobar tres punts del pla P, Q i R.

b) Amb aquests punts trobar dos vectors del pla: per exemple $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$.

c) Calcular l'equació paramètric amb els vectors anteriors i un punt del pla (per exemple P).

Exemple 81. Sigui el pla $\pi\colon\ 2x - 5y - z + 3 = 0$. Trobeu la seva equació paramètrica.

Solució.

a) Trobem tres punts de π: substituirem qualssevol dues variables per valors que vulguem.

- Si prenem $y = 0$ i $z = 1$, tenim que $x = -1$. Per tant, el punt $P(-1, 0, 1)$ pertany a π.
- Si prenem $x = 0$ i $y = 0$, tenim que $z = 3$. Per tant, el punt $Q(0, 0, 3)$ pertany a π.
- Si prenem $x = 5$ i $z = 3$, tenim que $y = 2$. Per tant, el punt $R(5, 2, 3)$ pertany π.

b) Trobem dos vectors que pertanyen a π:

- $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0, 2)}$ prenent P i Q com a extrems.
- $\vec{v} = \overrightarrow{(6, 2, 2)}$ prenent P i R com a extrems.

c) Calculem l'equació paramètrica de π (prenent P com a punt de π):

$$\pi\colon \begin{cases} x = -1 + \lambda + 6\mu \\ y = 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda + 2\mu \end{cases}$$

■

Mètode 2. Parametrització de variables Donat $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un pla qualsevol, per trobar la seva equació paramètrica procedirem de la manera següent:

a) Triarem una variable qualsevol i la aïllarem.

b) Parametritzarem les altres dues variables.

c) Construirem l'equació paramètrica originada a partir de la informació anterior.

Exemple 82. Sigui el pla $\pi\colon 2x - 5y - z + 3 = 0$. Trobeu la seva equació paramètrica.

Solució. *a*) Triem per exemple la variable z (triem z perquè és més bona d'aïllar, ja que el valor absolut del seu coeficient és 1). De l'equació original, tenim que $z = 3 + 2x + 5y$.

b) Ara parametritzem les altres dues variables: $x = \lambda$ i $y = \mu$. Per tant, $z = 3 + 2\lambda + 5\mu$.

c) Si ajuntem les informacions anteriors, tenim que 'equació paramètrica de π és:

$$\pi\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases}$$

D'aquí veim que els vectors directors del pla són $\overrightarrow{(1,0,2)}$ i $\overrightarrow{(0,1,5)}$ i un punt de π és $(0,0,3)$. Hem de notar que aquesta informació no ha de coincidir amb l'anterior, sinó que han de ser equivalents, ja que existeixen moltes equacions paramètriques equivalents d'un pla.

■

5.4.2.2 Vector normal al pla a partir de l'equació general

Donat un pla π, en aquesta secció trobarem un vector perpendicular a π a partir de la seva equació general, el qual anomenarem ***vector normal***.

Definició 42 (vector normal d'un pla)**.** Donat el pla $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, definirem el seu ***vector normal***, que denotarem habitualment per $\vec{n}_\pi$ (o simplement $\vec{n}$), com

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

Proposició 23 (perpendicularitat del vector normal)**.** *Donat un pla qualsevol π, $\vec{n}$ és perpendicular a π, és a dir, el vector normal sempre és perpendicular al seu pla (Figura 5.11).*

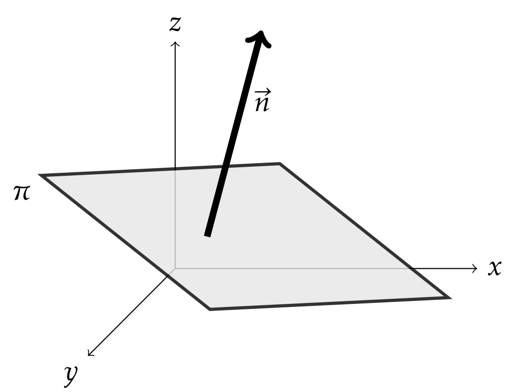


Figura 5.11: Vector normal a un pla

Demostració. Basta veure que el vector normal és perpendicular a dos vectors que estan continguts al pla π, és a dir, els seus vectors directors.

Per trobar els vectors directors del pla, calcularem tres punts del pla:

- Prenem $x = 0$ i $y = 0$, per tant, $z = \frac{-D}{C}$. Per tant, tenim que el punt $A(0, 0, \frac{-D}{C})$ pertany a π.

- Prenem $y = 0$ i $z = 0$, per tant, $x = \frac{-D}{A}$. Per tant, tenim que el punt $B(\frac{-D}{A}, 0, 0)$ pertany a π.

- Prenem $x = 0$ i $z = 0$, per tant, $y = \frac{-D}{B}$. Per tant, tenim que el punt $C(0, \frac{-D}{B}, 0)$ pertany a π.

Clarament aquests punts no estan alineats.

Per tant, els vectors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(\frac{-D}{A}, 0, \frac{D}{C})}$ i $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(0, \frac{-D}{B}, \frac{D}{C})}$ estan a π. I, per tant, també ho estan $\vec{u} = \overrightarrow{(-DC, 0, DA)}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{(0, -DC, DB)}$, que poden ser els vectors directors de π.

És trivial veure que $\vec{n} = (A, B, C)$ és perpendicular a $\vec{u}$ i $\vec{v}$, calculant el producte escalar corresponent. ■

Exemple 83. Un vector perpendicular al pla $\pi\colon\ 5x - 2y - 6z - 28 = 0$ és el vector $\vec{n}\,(5, -2, -6)$.

Exercici 144. Trobeu el vector normal al pla $x - 5y + 8z + 4 = 0$.

L'aplicació inversa del vector normal d'un pla és trobar un pla que és perpendicular a un vector donat. És a dir, donat $\vec{u}$ un vector, trobar un pla π tal que π és perpendicular a $\vec{u}$. Sabem que un pla perpendicular a $\vec{u}$ serà aquell que tengui $\vec{u}$ com al seu vector normal. Tot seguit, veurem un exemple.

Exemple 84. Volem trobar un pla π perpendicular al vector $\vec{v}\,(3, -1, 7)$ i que passi pel punt $A(2, -4, 0)$.

Solució. Un pla perpendicular al vector $\vec{v}\,(3, -1, 7)$, és aquell que té l'equació general de la forma

$$\pi \equiv 3x - y + 7z + D = 0,$$

ja que tendria $\vec{u}$ com al seu vector normal (vegeu proposició 23).

D'altra banda, sabem que el punt A és de π, per tant, compleix les equacions del pla. Llavors:

$$3 \cdot 2 - (-4) + 7 \cdot 0 + D = 0$$

D'aquí es té que $D = -10$, i l'equació del pla és

$$\pi \equiv 3x - y + 7z - 10 = 0$$

■

Exercici 145. Donat el pla $\pi\colon\ 3x - 6y + 2z - 1 = 0$, trobeu la recta perpendicular r a π que passa pel punt $A(1, 2, 0)$. Trobeu un punt de r que no sigui A.

Exercici 146. Donada la recta $r\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{0}$, trobeu el pla π perpendicular a r que passa per $A(1, 0, -1)$.

Exercici 147. Donat el pla π que té com a vectors directors $\vec{u}(2, 0, -1)$ i $\vec{v}(0, 2, 1)$ i que passa per $A(1, 0, 1)$, trobeu la recta perpendicular a π que passa per A.

Observació 24. Hem vist abans una fórmula per a calcular el vector director d'una recta a partir de les seves equacions implícites (proposició 22). És el moment de justificar aquest resultat amb l'ús dels vectors normals: notem que si r és una recta donada per les seves equacions implícites

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases},$$

amb A, B, C, D, A', B', C' i $D' \in \mathbb{R}$, aleshores el seu vector director $\overrightarrow{v_r}$ és el vector ortogonal als vectors normals dels plans que defineixen la recta r.

És a dir, podem veure la recta r com la intersecció de dos plans π i ρ d'equacions $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$ i $\rho\colon A'x+B'y+C'z+D'=0$. En aquest sentit, $\overrightarrow{v_r}$ tendrà la mateixa direcció que $\overrightarrow{n_\pi}\wedge\overrightarrow{n_\rho}$, on $\overrightarrow{n_\pi}$ i $\overrightarrow{n_\rho}$ són els vectors normals dels plans π i ρ respectivament (Figura 5.12).

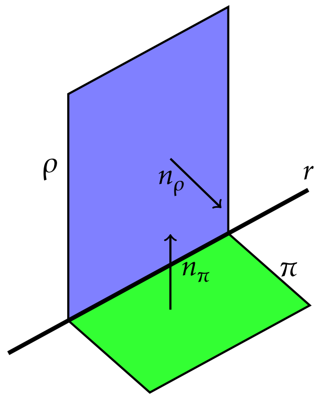


Figura 5.12: Vector director d'una recta com a producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen

5.4.3 Plans paral·lels

Donat un pla π_0, un pla ***paral·lel*** π_1 és un pla tal que té els *mateixos* vectors directors[6] i passa per un punt que no pertany a π_0 (en el cas que passàs per un punt de π_0, els plans serien ***coincidents***, és a dir, el mateix; vegeu Secció 5.5). Per tant, podem trobar les equacions paramètriques o generals de π_1, segons convengui, amb la informació proporcionada.

Exemple 85. Trobeu l'equació del pla paral·lel a $\pi : 3x-y+z-8=0$ que passa pel punt $A(-2,-2,6)$.

Si el pla que cercam és papal·lel al pla π, ambdós tendran el mateix vector normal. Per tant, la seva equació serà de la forma

$$3x-y+z+D=0,$$

amb D un nombre. Com que el pla que volem trobar passa pel punt A, llavors A complirà l'equació del pla anterior:

$$3\cdot(-2)-(-2)+6+D=0;$$

Per tant, $D=-2$. Llavors el pla que cercam és $3x-y+z-2=0$.

Exercici 148. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $A(5,-1,0)$ i és paral·lel al pla $-x+3y-8=0$.

[6]Realment, no tenen perquè ser els mateixos vectors directors. En general, dos plans són paral·lels quan els vectors directors de primer són combinació lineal dels vectors directors de segon i inversament. Ara bé, sempre podríem triar els mateixos vectors directors per als dos plans.

EXERCICI 149. Trobeu un pla paral·lel a $\pi: -2x+3y+z-5=0$ que contengui a la recta $r: \frac{x-10}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z}{12}$

EXERCICI 150. Determineu si els plans π_1 i π_2 són paral·lels, on $\pi_1: 3x-2y+z+1=0$ i π_2 està determinat pels vectors $\vec{u}(1,2,0)$, $\vec{v}(-1,0,-1)$ i passa per $A(0,1,0)$. En cas contrari, trobeu-ne un de paral·lel a cadascun d'ells.

5.5 Posició relativa entre rectes i plans

5.5.1 Posició relativa entre dues rectes

La ***posició relativa entre dues rectes*** simplement és la com estan situades una respecte de l'altra. En aquest sentit, tenim que dues rectes poden tenir quatre posicions relatives entre elles:

- ***coincidents***, quan són la mateixa recta.
- ***secants***, quan les rectes es tallen en un punt; és a dir, tenen un punt en comú.
- ***paral·leles***, quan no es tallen mai i tenen els seus vectors directors linealment dependents, és a dir, proporcionals.
- quan ***es creuen***, quan no es tallen mai i tenen el seus vectors linealment independents.

Existeixen dues proposicions sobre la posició relativa entre dues rectes, les quals són equivalents en termes teòrics.

PROPOSICIÓ 24 (posició relativa de dues rectes usant proporcionalitat de vectors)**.** *Donades dues rectes r i s amb vectors directors $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ i $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ i que passen pels punts $A=(a_1,a_2,a_3)$ i $B=(b_1,b_2,b_3)$ respectivament, tenim que la seva posició relativa es pot determinar amb l'arbre de decisió següent:*

- *Si $\vec{u}$ és proporcional a $\vec{w}$ (vegeu proposició 7), aleshores les rectes poden ser coincidents o paral·leles.*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ és proporcional a $\vec{u}$ (i per tant a $\vec{w}$), llavors r i s són coincidents.*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ no és proporcional a $\vec{u}$ (i per tant tampoc a $\vec{w}$), llavors r i s són paral·leles.*
- *Sinó, llavors les rectes són secants o bé es creuen.*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ és propocional a $\vec{u}$ o a $\vec{w}$, llavors r i s són secants.*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ no és proporcional ni a $\vec{u}$ ni a $\vec{w}$, llavors r i s es creuen.*

PROPOSICIÓ 25 (posició relativa de dues rectes usant matrius)**.** *Donades dues rectes r i s amb vectors directors $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ i $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ i que passen pels punts $A=(a_1,a_2,a_3)$ i $B=(b_1,b_2,b_3)$ respectivament, tenim que la seva posició relativa ve donada pels rangs següents:*

- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1 \ i \ rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1$, *r i s són coincidents*

- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1 \ i \ rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$, *r i s són paral·leles*

- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2 \ i \ rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$, *r i s es tallen*

- $rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2 \ i \ rg\begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 3$, *r i s es creuen*

Exercici 151. Determineu la posició relativa d'aquestes rectes:

a) $r\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$

b) $r\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{5}$

c) $r\colon x = y - 1 = \frac{z+2}{3}$ i $s\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{6}$

d) $r\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x - 2y + z = 10 \end{cases}$

e) $r\colon \begin{cases} -y - z = 3 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases}$

5.5.2 Posició relativa d'una recta i un pla

Per a determinar la posició relativa entre un pla i una recta tenim dues opcions: estudiar la posició a partir de les equacions implícita de pla i recta o bé estudiar-la a partir de les posicions relatives entre el vector normal del pla i el vector director de la recta. Els dos estudis es resumeixen a les proposicions següents.

La posició relativa d'una recta i un pla pot ser:

- la recta i el pla són ***secants***, és a dir, es tallen a un únic punt.

- la recta és ***paral·lela*** al pla; en aquest cas, el vector director de la recta és linealment depenents als vectors directors del pla però cap punt de la recta pertany al pla (i vice-versa).

- la recta està ***continguda*** al pla; tots els punts de la recta pertanyen al pla.

Proposició 26 (posició relativa entre pla i recta (versió eq. implícita))**.** *Siguin* $\pi \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *i* $r \equiv \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$ *un pla i una recta de l'espai qualssevol. Podem construir les matrius de A i M:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Aleshores:

- *Si* $rgA = 3$ *i* $rgM = 3$*, llavors el sistema és compatible determinat. Per tant, la recta talla al pla.*
- *Si* $rgA = 2$ *i* $rgM = 2$*, llavors el sistema és compatible indeterminat. Per tant, la recta està continguda en el pla.*
- *Si* $rgA = 2$ *i* $rgM = 3$*, llavors el sistema és incompatible. Per tant, la recta i el pla són paral·lels.*

Proposició 27 (posició relativa entre pla i recta (versió vector normal))**.** *Siguin* π *un pla i* r *una recta del pla. I sigui* $\vec{v}$ *el vector director de* r *i* A *un punt de la recta. Aleshores:*

- *Si* $\vec{v}$ *no és perpendicular a* $\vec{n}$*, llavors la recta i el pla es tallen.*
- *Si* $\vec{v}$ *és perpendicular al vector normal del pla* $\vec{n}$*, la recta pot ser paral·lela o bé està continguda al pla:*
  - *Si* $A \in \pi$*, llavors* r *està continguda a* π*.*
  - *Si* $A \notin \pi$*, llavors* r *és paral·lela a* π*.*

Exemple 86. Determineu la posició relativa de $r\colon \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$ i $\pi\colon x + y - z + 3 = 0$.

Solució. Farem servir la primera proposició.

- Primer trobam les matrius de coeficients i ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculem el rang de cada matriu. Després d'alguns càlculs tenim que $rgA = 3$ i $rgM = 3$. Per tant, el sistema és compatible determinat i, per tant, el pla i la recta són secants.

■

Exemple 87. Siguin $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{6}$ i $\pi\colon 2x - 4y + 5z = 0$. Determineu la seva posició relativa.

Solució. Farem servir la segona proposició.

- Tenim que el vector director de r, $\vec{v} = \overrightarrow{(3,9,6)}$, i el vector normal del pla, $\vec{n} = \overrightarrow{(2,-4,5)}$, són perpendiculars: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Per tant, la regla pot ser continguda al pla o bé paral·lela.
- Per discriminar, vegem si el pla conté o no un punt de la recta: sabem que $A(1,2,0) \in r$. Però si substituïm a les equacions de π, tenim que: $2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = -6 \neq 0$. Per tant, r és paral·lela a π.

■

Exercici 152. Determineu les posicions relatives entre aquests plans i aquestes rectes:

a) $r\colon \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ i $\pi \equiv 4x - 3y + 7z - 7 = 0$

b) $r\colon \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ -x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ i $\pi \equiv x + z + 1 = 0$

c) $r\colon x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ i $\pi \equiv 2x - 5y + 3z + 3 = 0$

d) $r\colon \begin{cases} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ -x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ i $\pi \equiv x + 4y - 3z + 3 = 0$

Exercici 153. Trobeu el valor de α per a què la recta $r \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{\alpha} = \frac{z}{12}$ no talli al pla $\pi\colon 2x - 4y + 5z = 0$.

Exercici 154. Donats el pla $\pi\colon x + y + mz = 1$ i la recta $r\colon \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$, discutiu quina és la posició relativa de r i π segons els valors de m.

5.5.3 Posició relativa entre dos plans

Finalment estudiarem la posició relativa entre dos plans. Suposarem que els plans sempre vénen donats mitjançant les seves equacions generals.

Les posicions relatives entre dos plans poden ser:

- els plans són ***coincidents***; són el mateix pla
- els plans són ***paral·lels***; no tenen cap punt en comú
- els plans són ***secants***; es tallen i tenen en comú una recta

Proposició 28 (posició relativa entre dos plans (versió rangs de matrius)). *Siguin $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ dos plans qualssevol. Considerem les matrius de coeficients i ampliada, A i M respectivament:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Llavors:

- *Si $rgA = 2$, llavors $rgM = 2$ i, per tant, el sistema és compatible simplement indeterminat (2 equacions i 3 incògnites). Això significa que els plans es tallen.*
- *Si $rgA = 1$:*
  - *Si $rgM = 2$, llavors el sistema és incompatible. Per tant, no tenen punts en comú. Llavors els plans són paral·lels.*
  - *Si $rgM = 1$, llavors el sistema és compatible doblement indeterminat (1 equació i 3 incògnites). Això significa que els plans són coincidents.*

Disposem d'una proposició que estudia la posició relativa a partir de la proporcionalitat dels seus vectors normals.

Proposició 29 (posició relativa entre dos plans (versió vectors normals)). *Siguin $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ dos plans qualssevol. Considerem $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ els seus vectors normals.*

- *Si $\vec{n}_1$* no *és proporcional a $\vec{n}_2$, llavors els plans es tallen.*
- *En cas contrari, llavors els plans són o bé coincidents o bé paral·lels.*

  Com que $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ són proporcionals, llavors $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ és igual a un nombre. Diguem-li R.
  - *Si $\frac{D_1}{D_2} = R$, llavors π_1 és coincident amb π_2.*
  - *Sinó, π_1 és paral·lel a π_2.*

Exercici 155. Determineu la posició relativa dels plans següents:

a) $\pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2$ i $\pi_2 = 2x + 3y - 5z = -8$

b) $\pi_1 = -x + 2y - z = 0$ i $\pi_2 = x - 2y + z = 0$

c) $\pi_1 = x - z = -11$ i $\pi_2 = -2y - z = -11$

d) $\pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2$ i $\pi_2 = \begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}$

5.6 Càlcul de la intersecció entre rectes i plans

En aquesta secció calcularem la intersecció entre rectes, plans i rectes i plans. No determinarem abans la seva posició relativa. Calcularem els punts (o rectes) d'intersecció *a pèl*.

5.6.1 Intersecció entre dos plans

De forma general, la intersecció entre dos plans és una recta, ja que les equacions generals de la recta no són res més que un sistema format per les equacions generals de dos plans.

Vegem amb un exemple com trobar la intersecció entre una recta i un pla.

Exemple 88. Trobeu l'equació de la recta determinada per la intersecció dels plans $\pi_1: x - 2y + z + 3 = 0$ i $\pi_2: 2x - y + z - 4 = 0$.

La recta que cercam (veure (Subsecció 5.3.3) és

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right. ,$$

que, com es veu, ve definida per la intersecció de dos plans (si volem es pot passar a forma paramètrica (Subsubsecció 5.3.3.2).

Exercici 156. Trobeu la intersecció entre els plans següents:

a) $\pi_1: x + 3y + z - 5 = 0$ i $\pi_2: x - 2z - 2 = 0$

b) $\pi_1: x + 2y + 3z - 5 = 0$ i $\pi_2: x + 2y - 3z - 2 = 0$

c) $\pi_1: 2x + y + 5z = 0$ i $\pi_2: y - 2z - 10 = 0$

d) $\pi_1: 2x + 4y + 8z - 10 = 0$ i $\pi_2: 2x + 4y - 8z - 10 = 0$

5.6.2 Intersecció entre dues rectes

En general, la manera més senzilla de trobar el punt d'intersecció entre dues rectes és passar una de les rectes a forma paramètrica i substituir les equacions (paramètriques o no de l'altra)[7].

Exemple 89. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes $r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$ i $s\colon \{2x - 2y + 3z - 19 = 0, x - y + z - 4 = 0\}$.

Solució.

- Passam en primer lloc la recta r a forma paramètrica:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{array} \right.$$

[7] D'aquesta manera evitarem resoldre, per exemple, sistemes d'equacions de 3 incògnites i 4 equacions en el cas en què les rectes estiguin expressades usant les equacions generals.

- Substituïm ara aquestes expressions a les equacions de s, i ens queda el sistema
$$\left.\begin{aligned} 2(-\lambda) - 2(7+\lambda) + 3(11+3\lambda) - 19 = 0 \\ -\lambda - (7+\lambda) + (11+3\lambda) - 4 = 0 \end{aligned}\right\},$$
la solució del qual és, per a cadascuna de les dues equacions, $\lambda = 0$. Notem la importància de què la solució sigui la mateixa a les dues equacions. En cas contrari, el sistema seria incompatible i, per tant, no tendria solució.

- Substituïm ara aquest valor de λ a les equacions de la recta r i en queda
$$r : \begin{cases} x = -0 \\ y = 7 + 0 \\ z = 11 + 3\cdot 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \\ z = 11 \end{cases}$$
El punt d'intersecció és, aleshores, $A(0, 7, 11)$.

■

Exemple 90. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes $r\colon\ \{x - 2y + z + 3 = 0,$ $2x - y + z - 4 = 0\}$ i $s\colon\ \{2x - 2y + 3z = 0, x - y + z - 4 = 0\}$.
Solució.

- Passam la recta r a forma paramètrica:
$$r : \{x = -\lambda, y = 7 + \lambda, z = 11 + 3\lambda\}$$

- Substituïm aquestes expressions a les equacions de s, i ens queda el sistema
$$\left.\begin{aligned} 2(-\lambda) - 2(7+\lambda) + 3(11+3\lambda) = 0 \\ -\lambda - (7+\lambda) + (11+3\lambda) - 4 = 0 \end{aligned}\right\},$$
la solució del qual és, per a la primera de les equacions, $\lambda = 19/5$, i $\lambda = 0$ per a la segona. Per tant, el sistema no té solució, del que deduïm que les dues rectes no tenen punts en comú: o bé es creuen o bé són paral·leles. Per saber quina de les dues possibilitats és la bona, mirarem si els seus vectors directors són paral·lels o no:
$$\vec{d_r} = (-1, 1, 3), \quad \vec{d_s} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (1, 1, 0)$$
Aleshores:
$$\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{0} \Rightarrow \vec{d_r} \text{ i } \vec{d_s} \text{ no són paral·lels}$$

- Per tant, com les rectes no s'intersequen i no tenen la mateixa direcció. Llavors es creuen.

■

EXERCICI 157. Calculeu el punt d'intersecció entre aquestes rectes:

a) $r\colon \{x + 2y + 3z + 1 = 0, x - y + z = 0\}$ i
$s\colon \{2x + y + 4z + 1 = 0, x - y + z + 3 = 0\}$

b) $r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$ i
$s\colon \{3x - 3y + 2z - 1 = 0, x + y - 7 = 0\}$

c) $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ i $s\colon \{2x - 6y + z - 1 = 0, x - z + 3 = 0\}$

d) $r\colon \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ i $s\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{y+3}{0}$

5.6.3 Punt d'intersecció entre una recta i un pla

De la mateixa manera que per dues rectes, la *tàctica* seria expressant la recta en forma paramètrica i substituir al pla.

EXEMPLE 91. Calculeu el punt d'intersecció entre la recta

$$r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$$

i el pla $\pi : 3x - y + 2z - 1 = 0$.

Solució.

- En primer lloc, passarem la recta a forma paramètrica:

$$r\colon \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Substituint a les equacions del pla:

$$3(-\lambda) - (7 + \lambda) + 2(11 + 3\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \quad 2\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \quad \lambda = -7$$

Llavors el punt d'intersecció és

$$\left.\begin{array}{l} x = -(-7) = 7 \\ y = 7 + (-7) = 0 \\ z = 11 + 3(-7) = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow (7, 0, -10)$$

■

EXERCICI 158. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes i plans següents:

a) $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+2}{5}$ i $\pi\colon 3x - y + 2z - 1 = 0$

b) $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$ i $\pi\colon x - y + 2z - 1 = 0$

c) $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$ i $\pi\colon x + 2y + 3z + 3 = 0$

5.7 Exercicis proposats

5.7.1 Vectors

Exercici 159. Quins dels vectors següents tenen la mateixa direcció?

$$\vec{a}\,(1,-3,2)\,,\quad \vec{b}\,(2,0,1)\,,\quad \vec{c}\,(-2,6,-4)\,,\quad \vec{d}\,(5,-15,10)\,,\quad \vec{e}\,(10,-30,5)$$

Exercici 160. Donats els vectors $\vec{u}\,(1,-3,2)$ i $\vec{v}\,(2,0,1)$, calculeu:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $|\vec{u}|$ i $|\vec{v}|$

c) l'angle que formen entre si $\vec{u}$ i $\vec{v}$

d) $\vec{u}\wedge\vec{v}$

Exercici 161. Donats $\vec{u}=\vec{i}+m\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{v}=-2\vec{i}+4\vec{j}+m\vec{k}$, calculeu m per a què els vectors siguin:

a) paral·lels

b) ortogonals

Exercici 162. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\vec{u}=\overrightarrow{(1,2,3)}$ i $\vec{v}=\overrightarrow{(2,-2,1)}$.

Exercici 163. Calculeu m per a què el vector $\vec{u}\,(1,3,m)$ sigui ortogonal al vector $\vec{v}\,(1,-2,3)$. És ortonormal?

Exercici 164. Calculeu l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors $\vec{u}\,(1,-3,2)$ i $\vec{v}\,(2,0,1)$.

Exercici 165. Trobeu un vector perpendicular a $\vec{u}\,(2,3,1)$ i a $\vec{v}\,(-1,3,0)$ i que sigui unitari.

Exercici 166. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(1,-1,0)$ i $\vec{v}(2,0,1)$ i el mòdul del qual sigui $\sqrt{24}$.

Exercici 167. Calculeu $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, amb $\vec{u}\,(1,-1,0)$, $\vec{v}\,(2,0,1)$ i $\vec{w}\,(2,0,-2)$.

Exercici 168. Calculeu el volum del paral·lelepípede determinat pels vectors $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,0,1)$ i $\vec{w}=(2,0,-2)$.

Exercici 169. Calculeu el valor de m perquè $\vec{u}\,(2,-3,1)$, $\vec{v}\,(1,m,3)$ i $\vec{w}\,(-4,5,-1)$ siguin coplanaris.

Exercici 170. Donat el vector $\vec{v}\,(-2,2,-4)$, trobeu les coordenades dels vectors següents:

a) unitari i de la mateixa direcció que $\vec{v}$

b) paral·lel a $\vec{v}$ i de mòdul 6.

EXERCICI 171. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}\,(2,3,-1)$ i a $\vec{v}\,(1,4,2)$ la tercera component del qual sigui 1.

EXERCICI 172. Calculeu les coordenades d'un vector $\vec{u}$ que sigui ortogonal a $\vec{v}\,(1,2,3)$ i $\vec{w}\,(1,-1,1)$ i tal que $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=19$.

5.7.2 Punts

EXERCICI 173. Comproveu si els punts $A=(1,-2,1)$, $B=(2,3,0)$ i $C=(-1,0,-4)$ estan alineats o no.

EXERCICI 174. Trobeu el punt simètric del punt $A=(-2,3,0)$ respecte del punt $M=(1,-1,2)$.

EXERCICI 175. Calculeu a i b per a què els punts $A\,(1,2,-1)$, $B\,(3,0,-2)$ i $C\,(4,a,b)$ estiguin alineats.

5.7.3 Rectes i plans

EXERCICI 176. Associeu els conceptes de punt, vector, recta i pla al pla o a l'espai amb qualcuna o qualcunes de les expresions següents:

a) $\overrightarrow{A}(2,-3,1)$

b) $\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=3 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x=-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{array}\right.$

d) $A\,(2,-3,1)$

e) $x+y=2$

f) $\left\{\begin{array}{r} x=-2\lambda+\mu \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right.$

h) $\frac{x-1}{0}=y+3=\frac{z}{-6}$

EXERCICI 177. Escriviu l'equació de la recta r que passa pels punts $A\,(-3,2,1)$ i $B\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2},0\right)$. Podeu trobar les altres equacions de la recta?

EXERCICI 178. Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $A\,(-4,2,5)$ i és paral·lela al vector director $\overrightarrow{(1,0,-1)}$.

EXERCICI 179. Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt $A\,(-4,2,5)$ i és paral·lela a l'eix OZ.

EXERCICI 180. Comproveu si els punts $A=(1,-2,1)$, $B=(2,3,0)$, $C=(-1,0,-4)$ i $D=(4,0,-5)$ es troben en un mateix pla o no. En cas d'estar en el mateix pla, digueu quin és.

EXERCICI 181. Trobeu les equacions paramètrica i contínua la recta

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y-z+10 & = & 0 \\ 2x+y-z-6 & = & 0 \end{array}\right.$$

5.7.4 Plans

Exercici 182. Calculeu les equacions paramètrica i general dels plans següents:

a) passa pel punt $P(2,-3,1)$ i el vector normal del qual és $\vec{n}(5,-3,-4)$

b) perpendicular a la recta $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ i que passa pel punt $(1,0,1)$

Exercici 183. Trobeu l'equació implícita dels plans següents:

- Pla que passa pels punts $P_1=(1,0,-1)$, $P_2=(1,3,0)$ i $P_3=(2,-1,3)$
- Pla que passa pel punt $Q=(3,0,1)$ i és paral·lel al pla $3x-2y+5z+1=0$

Exercici 184. Determineu l'equació del pla que conté el punt $P(2,1,2)$ i la recta $x-2=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}$.

Exercici 185. Comproveu que les rectes $r:\frac{x-1}{2}=y=z-2$ i

$$s:\left\{\begin{array}{r} x-2z=5\\ x-2y=11\end{array}\right.$$

són paral·leles, i troba l'equació del pla que les conté.

Exercici 186. Determineu el valor de a per a què les rectes r i s siguin coplanàries:

$$r: x=y-a=\frac{z}{0},\ s:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-1+\lambda\end{array}\right.$$

Trobeu l'equació del pla que les conté.

Exercici 187. Trobeu l'equació del pla que passa pels punts $A(1,3,2)$ i $B(-2,5,0)$ i és paral·lel a la recta

$$r:\{x=3-\lambda,\ y=2+\lambda,\ z=-2-3\lambda\}$$

Exercici 188. Trobeu l'equació del pla que conté la recta

$$r:\{x=2+3\lambda,\ y=-1-\lambda,\ z=\lambda\}$$

i és paral·lel a $s:\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$.

Exercici 189. Calculeu el valor de m per a què els punts $A=(m,0,1)$, $B=(0,1,2)$, $C=(1,2,3)$ i $D=(7,2,1)$ estiguin en un mateix pla. Quina és l'equació d'aquest pla?

Exercici 190. Donat el pla $\pi\colon 2x-3y+z=0$ i la recta $r\colon x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$, trobeu l'equació del pla que conté la recta r i és perpendicular al pla π.

Exercici 191. Escriviu l'equació del pla que passa pels punts $A(1,-3,2)$ i $B(0,1,1)$ i és paral·lel a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+1=0\\ 2y+3z-3=0\end{array}\right.$$

EXERCICI 192. Trobeu la recta que passa pel punt $A = (1, 1, -1)$, és paral·lela al pla $\pi \equiv x - y + z = 5$ i talla a l'eix de coordenades OZ.

EXERCICI 193. Donats el punt $P = (2, 1, 2)$ i la recta resultant de la intersecció dels plans $4x - y = 12$ i $z - x = 2$, trobeu l'àrea del triangle determinat pel punt P, el punt de la recta més proper a P i el punt $Q = (1, 0, -1)$.

EXERCICI 194. Donada la recta de l'equació $\frac{x}{2} = 1 - y = \frac{2z+2}{6}$ i el pla π d'equació $x + 3y - 3z = -3$, trobeu:

a) El pla que conté a r i és perpendicular a π

b) El volum del tetraedre determinat per π i els plans coordenats

EXERCICI 195. Sigui π el pla d'equació $6x + 4y - 2z = 2$ i r la recta d'equació $\begin{cases} 3x + 2y & = 0 \\ -y + z & = -1 \end{cases}$. Estudieu si els punts $P = (1, 0, 0)$, $Q = (2, -3, -4)$, $R = (0, 1, 1)$ i $S = (0, 0, -1)$ pertanyen al pla π o a la recta r.

EXERCICI 196. Trobeu el punt d'intersecció de $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{0}$ i $\pi\colon 3x - y + z = 5$. Trobeu el pla que passa pel punt anterior i és perpendicular a la recta

$$s\colon \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

EXERCICI 197. Trobeu el pla π que és perpendicular a la recta

$$r\colon \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Trobeu el pla paral·lel a π que passa pel punt $(-1, 0, 10)$.

EXERCICI 198. Trobeu la intersecció dels plans $\pi_1\colon 2x - y + z + 1 = 0$ i $\pi_2\colon x + 5y - z = 5$. En cas que la intersecció sigui una recta, expresseu-la en forma contínua i trobeu dos punts de la recta.

EXERCICI 199. Trobeu el punt d'intersecció A de les rectes $r\colon \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{-1}$ i

$$s\colon \begin{cases} x + z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

Trobeu el pla que conté r i s i passa per A.

5.7.5 Posicions relatives

EXERCICI 200. Estudieu la posició relativa de les rectes següents, i trobeu el seu punt de tall quan sigui possible:

a) $r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$ i $s\colon \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$

b) $r\colon \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ i $s\colon \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$

c) $r\colon \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{3}$ i $s\colon \{x - 2y - 1 = 0, 3y - z + 1 = 0\}$

d) $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ i $s\colon \{x = 3 + 4\lambda, y = 3 + 6\lambda, z = 4 + 8\lambda\}$

Exercici 201. Trobeu les posicions relatives d'aquests plans. En cas de que es tallin, trobeu l'equació contínua de la recta corresponent:

a) $\pi_1\colon 3x + 3y + z - 1 = 0$ i $\pi_2\colon x - 5y + 5z = 0$

b) $\pi_1\colon x + 2y + z = 0$ i $\pi_2\colon x + 2y + z - 2 = 0$

c) $\pi_1\colon 2x + 4y + z = 0$ i $\pi_2\colon 10x + 20y + 5z + 2 = 0$

d) $\pi_1\colon 2x + 8z - 10 = 0$ i $\pi_2\colon 2x + 8y - 10 = 0$

Exercici 202. Estudieu la posició relativa de la recta $r : \frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z}{-1}$ i el pla $\pi : x - y + z - 3 = 0$.

Exercici 203. Estudieu la posició relativa de la recta $r : \{x = 3, y = 2\}$ i el pla $z = 1$.

Exercici 204. Digueu si la recta r està continguda al pla π:

a) $r\colon \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$ i $\pi\colon -x + y + 3z = 0$

b) $r\colon \{x - y + z + 1 = 0, 2x - z = -1\}$ i $\pi\colon -2x + z = 0$

c) $r\colon \frac{x-1}{-1} = y + 1 = \frac{z+1}{0}$ i $\pi\colon -x + y + 5 = 0$

Exercici 205. Digueu si la recta r talla al pla π:

a) $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$ i $\pi\colon -x + 2y - 3z + 5 = 0$

b) $r\colon \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{0}$ i $\pi\colon -x + 2y + 2 = 0$

c) $s\colon \left\{\begin{array}{l} -2x + y = 3 \\ -y + 2z = 2 \end{array}\right.$ i $\pi\colon \left\{\begin{array}{ll} x & = -1 + 2\lambda - \mu \\ y & -\lambda + \mu \\ z & 1 - \mu \end{array}\right.$

En cas afirmatiu, trobeu el punt de tall.

Exercici 206. Donat el pla $\pi\colon x - 2y = 5$, trobeu una recta paral·lela, una recta secant i una recta perpendicular a π.

En cada cas, trobeu una recta paral·lela que passi pel punt $A(-10, 0, 10)$.

Exercici 207. Calculeu el valor de a per a què les rectes r i s es tallin, i trobeu el seu punt de tall: $r\colon x = y = z - a$, $s\colon \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$.

Exercici 208. Calculeu els valors de m i n per a què les rectes r i s siguin paral·leles:
$r\colon \left\{\begin{array}{l} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right.$, $s\colon \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$.

Exercici 209. Calculeu m i n per a què els plans $\alpha\colon mx + y - 3z - 1 = 0$ i $\beta\colon 2x + ny - z - 3 = 0$ siguin paral·lels. Poden ser coincidents?

Exercici 210. Estudieu les posicions relatives del pla $\pi\colon x + ay - z = 1$ i la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{r} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{array} \right.$$

segons els valors de a.

Exercici 211. Estudieu la posició relativa dels plans $\pi_1 \equiv x + 3y - 2z = 7$, $\pi_2 \equiv x + 2y - az = 5$ i $\pi_3 \equiv ax + z = b$, segons els valors d'a i de b. Quan es tallen en una recta? N'hi ha alguna d'elles que passi pel punt $(-1, 4, 2)$?

Exercici 212. Trobeu en funció de a, la posició relativa de la recta $r\colon \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{0}$ i la recta s determinada pels punts $A(a, -2, 1)$ i $B(1, 0, 1)$.

5.8 Exercicis resolts de geometria de l'espai

Exemple 92. Donada la recta següent

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0, \end{array} \right.$$

trobeu un punt qualsevol de la recta i calculeu el seu vector director.

Solució. Qualsevol punt de la recta ha de complir l'equació que la defineix. Per a trobar-ne un, donem un valor qualsevol a les variables. Per exemple, podem prendre $y = 0$ i substituir aquest valor en l'equació de la recta:

$$\left. \begin{array}{r} x - 2\cdot 0 + z + 3 = 0 \\ 2x - 0 + z - 4 = 0 \end{array} \right\}; \qquad \left. \begin{array}{r} x + z + 3 = 0 \\ 2x + z - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

Les solucions d'aquest sistema són $x = 7$, $z = -10$, per la qual cosa el punt que cercam és

$$(7, 0, -10)$$

El vector director de la recta és

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \overrightarrow{(1, -2, 1)} \wedge \overrightarrow{(2, -1, 1)} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{(-1, 1, 3)} \end{aligned}$$

■

Exemple 93. Trobeu un punt qualsevol del pla $\pi\colon -x + 5y + 2z - 1 = 0$ i un vector perpendicular a ell.

Solució. Un punt qualsevol del pla ha de satisfer la seva equació. Per tant, donem valors qualssevol a les variables, per exemple $y = 0$ i $z = 0$, i substituim aquests valors a l'equació del pla:

$$-x + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0; -x - 1 = 0; x = -1$$

Per tant, un punt del pla és

$$(-1, 0, 0)$$

Un vector perpendicular al pla és el seu vector normal: $\vec{n} = (-1, 5, 2)$. ■

Exemple 94. Passeu a forma paramètrica la recta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Solució. Per poder escriure una recta en forma paramètrica necessitem un vector director d'ella i un punt qualsevol del seus punts.

Calculem el vector director de la recta:

$$\vec{d} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \overrightarrow{(1, -2, 1)} \wedge \overrightarrow{(2, -1, 1)} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-1, 1, 3)}$$

Cerquem ara un punt de la recta. Aquest punt ha de complir les equacions $x - 2y + z + 3 = 0$ i $2x - y + z - 4 = 0$. Facem, per exemple, $x = 0$. Aleshores, substituint aquest valor a les dues equacions anteriors queda el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} -2y + z &= -3 \\ -y + z &= 4 \end{aligned} \right\},$$

la solució del qual és $y = 7, z = 11$. Així, un punt de la recta és $A(0, 7, 11)$.

L'equació en forma paramètrica és, aleshores,

$$r : \begin{cases} x = 0 + (-1)\lambda \\ y = 7 + 1\lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{cases} = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{cases}$$

■

5.9 Solucions

159 $\vec{a}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ són paral·lels.

160 *a*) 4, *b*) El mòdul de $\vec{a}$ és $\sqrt{14}$ i el mòdul de $\vec{b}$ és $\sqrt{5}$, *c*) l'angle que formen és, aproximadament, de $61,43^\circ$

161 *a*) $m = -2$, *b*) $m = \frac{2}{5}$

162 $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{280}} \sim 86,57^\circ$

163 $m = \frac{5}{3}$

164 $\sqrt{54}$

165 $\frac{1}{\sqrt{91}}\overrightarrow{(-3,-1,9)}$

166 $\overrightarrow{(-2,-2,4)}$ o $\overrightarrow{(2,2,-4)}$

167 $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -6$

168 $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = |-6| = 6$

169 $m = -4$

170 *a*) $1/\sqrt{24}\overrightarrow{(-2,2,-4)}$, *b*) $\overrightarrow{\left(-12/\sqrt{24}, 12/\sqrt{24}, -24/\sqrt{24}\right)}$

171 $\overrightarrow{(2,-1,1)}$

172 $\overrightarrow{(95/30, 57/45, -57/30)}$

173 No estan alineats

174 El punt és $A' = (4,-5,4)$

175 $a = -1$ i $b = \frac{-5}{2}$

176 *a*) vector *b*) punt al pla (és una intersecció de dues rectes) i recta a l'espai (és la intersecció de dos plans a l'espai) *c*) recta en forma paramètrica a l'espai *d*) punt a l'espai *e*) recta al pla i pla a l'espai *f*) pla a l'espai en forma paramètrica *g*) punt al pla *h*) recta a l'espai en forma contínua.

177 *a*) Forma vectorial $r \equiv (-3,2,1) + \lambda\overrightarrow{(-2,1,-1)}$,

b) Forma paramètrica $r \equiv \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

c) Forma contínua $r \equiv \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$, *d*) Forma implícita $r \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -y - z + 3 = 0 \end{cases}$

178 *a*) Forma vectorial $r \equiv (-4, 2, 5) + \lambda\overrightarrow{(0, 0, 1)}$,

b) Forma paramètrica $r \equiv \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

c) Forma contínua $r \equiv \frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$,

d) Forma implícita $r \equiv \begin{cases} x + 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

180 No estan en el mateix pla.

200 *a*) S'encreuen, *b*) s'encreuen, *c*) s'encreuen, *d*) coincidents

207 Es tallen

208 $m = 12$ i $n = -3$

182 *a*) $\pi\colon 5x - 3y + 4z - 23 = 0$, *b*) $2x - y + 3z + 1 = 0$

183 *a*) $\pi \equiv 13x - y - 3z - 16 = 0$, *b*) $\pi \equiv 3x - 2y + 5z - 14 = 0$

209 Per ser paral·lels $m = 6$ i $n = \frac{1}{3}$. No són coincidents.

184 $\pi\colon 2x - y + z - 5 = 0$.

185 L'equació del pla que les conté és $2x + 16y - 20z + 38 = 0$.

186 $a = -2$; el pla que les conté és $\pi\colon x - y - 2z - 2 = 0$.

202 r és paral·lela a π.

187 $4x + 7y + z - 27 = 0$

188 $x + 14y + 11z + 12 = 0$

189 $m = -1$; $\pi\colon -x + 4y - 3z + 2 = 0$

190 $-5x - 3y + z + 12 = 0$

191 $11x - 4y + 5z - 1 = 0$

203 Secants.

210 Si $a \neq -1$ o $a \neq 2$, llavors són secants. Si $a = -1$, llavors són paral·lels. Si $a = 2$, llavors r està continguda a π.

Part III

Probabilitat

6

Experiències aleatòries

En aquest capítol ens ocuparem de les definicions, més o menys formals, que permeten definir el concepte de probabilitat.

Definició 43 (experiència)**.** Una ***experiència*** o ***experiment*** és qualsevol procediment, pràctica o simplement aconteixement en el que les regles de joc, és a dir, com s'ha de realitzar aquest, estan clares des d'un principi i en el que es mesura cert resultat final.

En principi existeixen variables rellevants a l'experiment i altres de negligibles.

Exemple 95. Exemples d'experiments serien:

a) Llançar una moneda i mirar-ne el resultat.

En aquest experiment les variables rellevants serien, per exemple, la distribució de pesos de les cares, la forma de la moneda i el mètode de tir.

b) Accelerar un vehicle fins a una velocitat concreta i després frenar bruscament i mirar la distància recorreguda.

En aquest experiment les variables rellevants seiren la velocitat just abans de frenar, el pes del vehicle, el pendent del terreny i la força de fregament.

c) Comptar la freqüència absoluta dels colors dels cotxes en un aparcament per a determinar el color més freqüent.

En aquest darrer experiment, les variables rellevants serien, per exemple, el nombre de places d'aparcament, el color dels cotxes dels possibles clients i els colors més freqüents a Espanya.

Definició 44 (experiment determinista)**.** Un ***experiment determinista*** és aquell experiment la repetició del qual produeix idèntics resultats, és a dir, per al mateix valor de les variables rellevants, s'obté el mateix resultat[1]. Per tant, el resultat de l'experiment es pot conèixer abans de dur-lo a terme una vegada estudiat aquest prèviament.

Definició 45 (experiment aleatori). Un ***experiment aleatori*** és aquell experiment que es caracteritza per la imprevisibilitat del seu desenllaç, a pesar de què s'executi sempre amb les mateixes condicions. En general, depèn de l'atzar[2].

Els experiments aleatoris tenen les característiques següents:

- En la realització de cada repetició, el seu resultat pot diferir.
- Si repetim les proves calculant les seves freqüències relatives[3] de cadascun dels resultats possibles, llavors aquestes freqüències tendeixen a estabilitzar-se cap a un nombre fix, que és el que anomenarem ***probabilitat***.

Exemple 96. En l'exemple anterior, exemple 95, el llançament de la moneda seria un experiment aleatori, l'experiment de la frenada del vehicle seria un experiment determinista i l'experiment dels colors dels vehicles es consideraria un experiment aleatori.

En aquesta part ens ocuparem dels experiments aleatoris.

6.1 Espai mostral i esdeveniments

Definició 46 (espai mostral). S'anomena ***espai mostral*** al conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori. Es sol designar per E o per Ω.

Exemple 97. Si llançam un dau, l'espai mostral és $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si llançam una moneda, l'espai mostral és $E = \{C, X\}$ (hem obviat que ens pugui sortir cantó).

Exemple 98. En l'experiment corresponent a extreure una bolla d'una urna amb tres bolles vermelles (V), dues de blaves (B) i 4 de negres (N), l'espai mostral és $E = \{V, B, N\}$.

Hi ha exemples d'espais mostrals més complicats.

Exemple 99. Si llançam dues monedes l'espai mostral és

$$E = \{(C,C), (C,X), (X,C), (X,X)\}.$$

Recordem que la notació (a, b) denota un parell ordenat. Per tant, el resultat (C, X) no és el mateix que el resultat (X, C). En el primer cas, voldria dir que la moneda és cara i el segona moneda ha donat creu. El segon cas és totalment el contrari.

---

[1] Tècnicament, si les condicions inicials són les mateixes, les condicions finals també ho són.

[2] Evitarem aquí disquisicions sobre si l'atzar realment existeix o bé no és res més que una situació determinista en la que no es coneixen les variables involucrades i exactament les condicions inicials d'aquestes [7].

[3] Recordem que la freqüència relativa no és res més que la divisió entre el nombre de vegades que apareix un resultat dividit pel nombre total de proves. És el tant per u d'aparició.

Si no tenguéssim en compte l'ordre, és a dir, si per a nosaltres les monedes fossin indistingibles[4], llavors l'espai mostral seria

$$E = \{CC, CX, XX\}.$$

De forma intuïtiva està clar que la probabilitat de CX en el segon cas seria major que la probabilitat de (C, X) en el primer, ja que *compta doble*. Per tant, hem d'anar molt alerta de si prenem els resultats amb ordre o no.

Exemple 100. Si llançéssim dos daus, l'espai mostral seria

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}.$$

Exemple 101. En l'experiment consistent en llançar una moneda i posteriorment un dau, l'espai mostral és

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (C,1), & (C,2), & (C,3), & (C,4), & (C,5), & (C,6), \\ (X,1), & (X,2), & (X,3), & (X,4), & (X,5), & (X,6) \end{array} \right\}$$

Notem que si l'experiment consistís en tirar primer el dau i després la moneda, llavors l'espai mostral seria:

Si no s'especifica l'ordre amb el qual llancem les coses, l'ordre amb el qual escrivim els resultats no té importància, però una vegada decidit s'ha de mantenir al llarg de tot l'exercici.

Exercici 213. Escriviu l'espai mostral corresponent als experiments següents:

a) Un dau de quatre cares.

b) Tres monedes.

Definició 47 (esdeveniment)**.** S'anomena ***esdeveniment*** (o ***succés***) a qualsevol subconjunt de E.

Exemple 102. Esbrinem els esdeveniments dels exemples anteriors:

a) En l'experiment aleatori del llançament d'una moneda, tenim que els seus esdeveniments són: $\{C, X\}$, $\{C\}$, $\{X\}$ i $\emptyset$. $\emptyset$ denota el ***conjunt buit***, el qual no té cap element.

b) Els esdeveniments de l'experiment consistent en llançar un dau serien $\{1\}$, $\{2\}$, …, $\{1, 2\}$, …, $\{1, 2, 3\}$, …, $\{3, 5, 6\}$, …, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exercici 214. Escriviu tots els possibles esdeveniments corresponents als experiments següents:

[4]Ho sigui si només *comptéssim* el nombre de cares i el nombre de creus.

a) Llançar un dau de 4 cares.

b) Llançar dues monedes (exemple 99).

c) Extreure una bolla d'una urna de l'exemple 98.

Exercici 215. Escriviu quatre esdeveniments corresponents als experiments:

a) Llançar dos daus (exemple 100).

b) Llançar una moneda i un dau (exemple 101).

Proposició 30. *En un experiment aleatori, si el seu espai mostral E és finit i té n elements, llavors hi ha 2^n possibles esdeveniments.*

Definició 48 (esdeveniment elemental)**.** Un ***esdeveniment elemental*** és qualsevol esdeveniment que té un sol element. En cas contrari, quan l'esdeveniment tengui més d'un element, es diu ***esdeveniment compost***.

Exemple 103. Referint-nos al llançament d'un dau de sis cares, els seus esdeveniments elementals són $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Esdeveniments compostos són, per exemple, $\{2,3,6\}$ i $\{1,5\}$ o el mateix E.

En el llançament d'una moneda, els seus esdeveniments elementals són $\{C\}$ i $\{X\}$ i els seus esdeveniments compostos són $\{C,X\}$.

Definició 49 (esdeveniment impossible)**.** S'anomena ***esdeveniment impossible*** a aquell esdeveniment que mai pot ocórrer. És el conjunt buit, $\varnothing$.

Definició 50 (esdeveniment segur)**.** S'anomena ***esdeveniment segur*** al que sempre es verifica. Correspon a l'espai mostral, E.

Exemple 104. En el llançament de dues monedes l'esdeveniment segur és

$$\{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}.$$

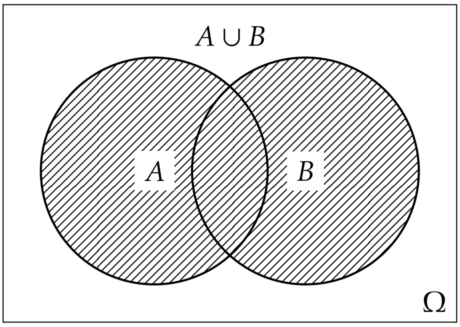
Exercici 216. Trobeu els esdeveniments segurs i impossibles dels exercicis exercici 214 i exercici 215.

6.2 Operacions amb esdeveniments

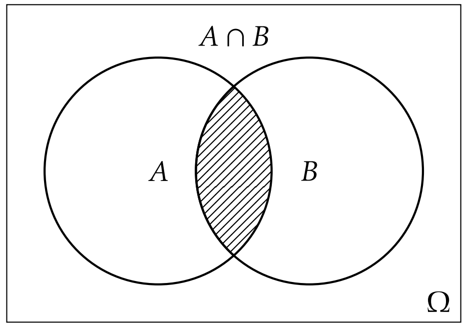
Definició 51 (unió d'esdeveniments)**.** La ***unió*** de dos esdeveniments, A i B, és aquell esdeveniment, denotat per $A \cup B$, format per cada element que hi ha en A o en B.

Col·loquialment, la unió de dos esdeveniments és aquell esdeveniment que ocorre quan ocorre, al menys, un dels dos. De la definició és veu que $A \cup B$ és el mateix que $B \cup A$. Gràficament, aquest concepte es pot representar mitjançant un ***diagrama de Venn*** (veure Figura 6.1a).

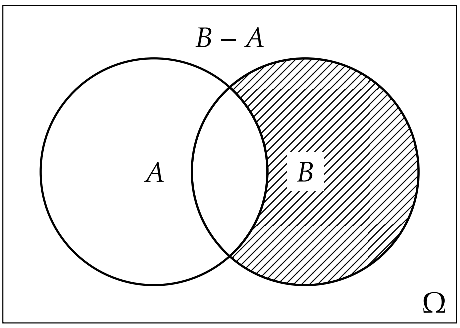
Definició 52 (intersecció d'esdeveniments)**.** La ***intersecció*** de dos esdeveniments, A i B, és aquell esdeveniment, denotat per $A \cap B$, format per aquells elements que estan simultàniament a A i a B. Dos esdeveniments són ***incompatibles*** si la seva intersecció és el conjunt buit. En cas contrari, es diu que són ***compatibles***.



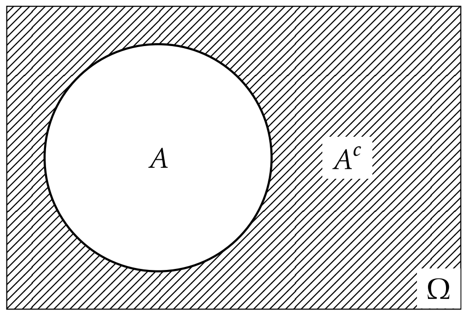
(a) Unió de dos esdeveniments



(b) Intersecció de dos esdeveniments



(c) Diferència de dos esdeveniments



(d) Complementari d'un esdeveniment

Figura 6.1: Operacions entre esdeveniments representats mitjançant diagrames de Venn

De manera informal, l'esdeveniment intersecció de dos esdeveniment és aquell que ocorre quan ocorren ambdós. De la definició es veu que $A \cap B$ és el mateix que $B \cap A$ (Figura 6.1b).

Definició 53 (esdeveniment contrari)**.** Donat un esdeveniment A, el seu ***esdeveniment contrari*** o ***complementari***, que es denota per A^c o $\overline{A}$, és l'esdeveniment format per tots els elements de l'espai mostral que no són de A. És a dir, l'esdeveniment contrari de A es verifica quan no ocorre A (Figura 6.1d).

Definició 54 (diferència d'esdeveniments)**.** Donats dos esdeveniments, A i B, la ***diferència*** entre A i B, que es denota per $A \setminus B$ (o $A - B$), és l'esdeveniment format pels elements de A que no estan en B (Figura 6.1c).

Observació 25. De forma general, existeix una connexió entre les operacions entre conjunts i els operadors lògics presents a les expressions: d'aquesta manera, la unió correspondria a la "o", la intersecció a la "i" i el complementari a "no". Així, si definim M com el conjunt de persones motoristes i U les persones que duen ulleres. Tenim que hi ha una correspondència entre aquestes frases i les operacions entre conjunts següents:

a) seleccionar una persona motorista o amb ulleres $\leftrightarrow M \cup U$.

b) seleccionar una persona motorista i amb ulleres $\leftrightarrow M \cap U$.

c) seleccionar una persona que no sigui motorista $\leftrightarrow M^c$.

Exemple 105. En l'experiment de llançar un dau i mirar el resultat, tenim que $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si agafam A = que surti parell i B = que surti un nombre menor que 5, tenim que:

- $A \cup B$ = que surti parell o menor que 5 $= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Per tant, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A \cap B$ = que surti parell i menor que 5 $= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$. Per tant, $A \cap B = \{2, 4\}$.
- $A \setminus B = \{6\}$.
- $B \setminus A = \{1, 2\}$.
- A^c = el contrari de què surti parell $= \{1, 3, 5\}$.
- B^c = el contrari de què surti un nombre menor que 5 $= \{5, 6\}$.

6.2.1 Propietats de les operacions

Les operacions sobre el conjunt d'esdeveniments anteriorment descrites satisfan certes propietats. Si A, B i C són esdeveniments qualssevol i E denota l'espai mostral, aleshores:

a) $A \cup E = E$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A^c = E$.

b) $A \cap E = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A^c = \emptyset$.

c) $A \setminus B = A \cap B^c$.

d) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

e) Idempotència: $(A^c)^c = A$.

f) Commutatives:

  (a) $A \cup B = B \cup A$.
  (b) $A \cap B = B \cap A$.

g) Associatives:

  (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
  (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

h) Distributives:

  (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

En particular:

- $A \cup (A \cap B) = A$.
- $A \cap (A \cup B) = A$.

i) ***Lleis de De Morgan***

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Observació 26. Les més importants són les propietats distributives i les lleis de De Morgan.

Exercici 217. Es disposa d'una urna amb bolles numerades de l'1 al 16, de la qual s'extreu una bolla. Considerem els esdeveniments següents:

a) A = treure un 7.

b) B = treure un nombre menor que 7.

c) C = treure un nombre parell.

d) D = treure un múltiple de 3.

Calculeu *a*) Ω, *b*) $A \cap B$, *c*) $A \cup B$, *d*) $B \cap C$, *e*) $C \cap D$, *f*) $C \cup D$, *g*) B^c, *h*) $A \setminus B$, $B \setminus A$. Existeixen esdeveniments incompatibles entre si?

Exercici 218. Es llança una ruleta de 10 costats, numerats de la següent manera: 2, 4, 6, 8, ..., 20, i s'observa el resultat obtingut.

a) Trobeu l'espai mostral.

b) Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:

(a) A = "obtenir un nombre parell".
(b) B = "obtenir un nombre senar".
(c) C = "obtenir un múltiple de 3".
(d) D = "obtenir un múltiple de 5".
(e) E = "obtenir un nombre major que 4".
(f) F = "obtenir un nombre menor que 6".
(g) G = "obtenir un múltiple de 3 i 4".

c) Calculeu els seus esdeveniments contraris.

d) Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d'A amb cadascun dels altres esdeveniments.

e) Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

Exercici 219. Aplicant les propietats anteriors, demostreu que:

a) $A \cap (A \cap B) = A \cap B$.

b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

c) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$.

d) $(A^c \cap B) \cup A = A \cup B$.

e) $(A \cup B^c) \cap B = A \cap B$.

f) $((A \setminus B) \cup (B \setminus A))^c = A \cap B$.

Exemple 106. D'entre els habitants d'un poble es tria una persona a l'atzar. Considerem els esdeveniments següents: A = ser soci del casino, B = ser soci del club de futbol local i C ser soci d'alguna associació juvenil.

a) Expresseu en funció de A, B i C les situacions següents:

(a) "ser soci d'alguna d'aquestes associacions".
(b) "ser soci de les tres associacions".
(c) "ser soci només del casino".
(d) "ser soci de, com a màxim, una o dues associacions.
(e) "no ser soci de cap de les associacions".
(f) "ser soci d'una sola associació".

b) Expresseu el significat dels esdeveniments següents:

(a) $A \cup B \cup C$.
(b) $\overline{(A \cup B \cup C)}$.
(c) $A \cup B - C$
(d) $\overline{(A \cap B \cap C)}$.
(e) $C - (A \cup B)$
(f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Solució. Per ajudar-nos a resoldre cadascun dels apartats, hem fet servir el diagrama de Venn de tres esdeveniments (Figura 6.2).

a) Part 1

(a) $A \cup B \cup C$
(b) $A \cap B \cap C$
(c) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
(d) $A \cup B \cup C - (A \cap B \cap C)$
(e) $\overline{(A \cap B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
(f) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

b) Part 2

(a) "pertànyer a, almenys, ua associació"
(b) "no ser soci de cap associació"

(c) "no ser soci de juvenil però sí d'alguna de les altres dues"
(d) "no ser soci de les tres alhora"
(e) "ser soci, només, de l'associació juvenil"
(f) "ser soci de, almenys, dues associacions"

■

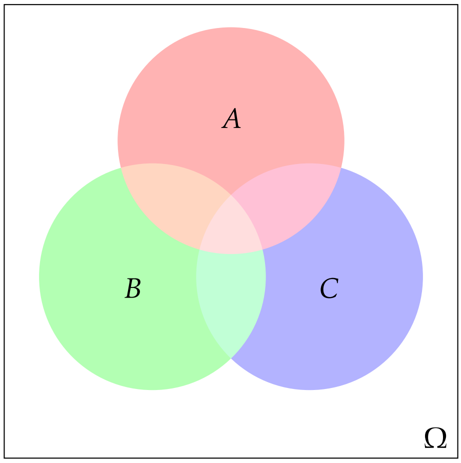


Figura 6.2: Diagrama de Venn de tres esdeveniments

EXERCICI 220. Siguin els esdeveniments següents: $A =$ "plou avui", $B =$ "plou demà" i $C =$ "plou passat-demà". Expresseu mitjançant operacions entre esdeveniments:

a) Plou un dels tres dies, almenys.

b) Plou avui però no demà ni passat-demà.

c) No plou cap dels tres dies.

d) Plou com a màxim dos d'aquests tres dies.

e) Plou avui però no demà.

Expliqueu el significat de

a) $(A \cap B) - C$.

b) $(A \cup B) - C$.

c) $A \cup B \cup \overline{C}$.

d) $(A \cap B) \cup (C \cap A)$.

e) $\overline{A \cup B}$.

EXERCICI 221. Considerem els esdeveniments "ser oient de RNE", "set oient de la SER", "ser oient de M80". Expreseu, mitjançant operacions amb esdeveniments, els esdeveniments següents: *a*) "ser oient de només dues emissores", *b*) "ser oient de RNE però no de la SER ni de M80", *c*) "ser oient de, almenys, una emissora", *d*) 'escoltar alguna emissora però no les tres", *e*) "no escoltar més d'una emissora"

7
Probabilitat

La probabilitat és la mesura de la certesa de què ocorri un cert esdeveniment aleatori, és a dir, la probabilitat mesura la *facilitat* de què l'esdeveniment tengui lloc: a major probabilitat, majors són les possibilitats de què l'esdeveniment ocorri. A cada esdeveniment se li associa un nombre, de 0 a 1:

- Si la probabilitat d'un esdeveniment és 0, llavors és impossible que occorri dit esdeveniment.
- Si la probabilitat és 1, llavors l'esdeveniment és segur que passarà, en qualsevol cas.
- En els altres casos, el valor de la probabilitat indica el tant per u de possibilitats de què l'esdeveniment ocorri.

De manera més formal,

Definició 55 (probabilitat)**.** La ***probabilitat*** és una aplicació que associa a cada esdeveniment A un nombre, $p(A)$, anomenat la probabilitat de A, que satisfà les propietats següents:

a) $p(A) \geq 0$ per a qualsevol esdeveniment A. És a dir, la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol no pot ser negativa.

b) $p(E) = 1$. La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1.

c) $p(\varnothing) = 0$. La probabilitat de l'esdeveniment impossible és 0.

d) Si A i B són esdeveniments incompatibles, llavors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.[1]

[1] La definició axiomàtica de la probabilitat s'escapa de l'abast d'aquest manual. Conceptes com el de σ-àlgebra i σ-additivitat són necessaris per introduir-la. Els fonaments formals de la probabilitat es deuen, principalment, a Andrei Kolmogórov.

7.1 Propietats de la probabilitat

La definició anterior, té una sèrie de conseqüències: si A és un esdeveniment qualsevol, llavors:

a) $p(A^c) = 1 - p(A)$.

b) Si A és un subconjunt de B, llavors $p(A) \leq p(B)$.

c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

d) $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$ [2].

Amb aquestes propietats podem trobar probabilitats de certs esdeveniments, encara no coneguem quin és l'experiment aleatori que s'ha realitzat, ni fins i tot el seu espai mostral.

Exemple 107. Donats els esdeveniments A i B, i les probabilitats $p(A) = 0.1$, $p(B) = 0.2$ i $p(A \cup B) = 0.25$, calculeu *a*) $p(A^c)$ *b*) $p(A \cap B)$.

Solució.

a) Tenim que $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0.1 = 0.9$.

b) Aplicant la probabilitat de la unió: $0.25 = 0.1 + 0.2 - p(A \cap B)$. Per tant, $p(A \cap B) = 0.1 + 0.2 - 0.25 = 0.05$.

■

Exercici 222. Si sabem que la probabilitat dels esdeveniments A, B i $A \cap B$ és $p(A) = 1/3$, $p(B) = 2/5$ i $p(A \cap B) = 1/15$, trobeu les probabilitats de: *a*) que es compleixi algun dels esdeveniments A o B *b*) que no es compleixi A però sí B, *c*) que es compleixi, només, un esdeveniment *d*) que no es compleixi ni A ni B

Solució. *a*) $2/3$, *b*) $1/3$, *c*) $3/5$, *d*) $1/3$ ■

Exercici 223. En un banc hi ha dues alarmes, A i B. En cas d'atracament, la probabilitat de què s'activi A, B o ambdues és: $p(A) = 0,75$, $p(B) = 0,85$ i $p(A \cap B) = 0,65$. Trobeu la probabilitat de què: *a*) se n'activi alguna de les dues *b*) s'activi només una *c*) no se n'activi cap

Exercici 224. Determineu si són compatibles o incompatibles els esdeveniments A i B, sabent que $p(A) = 1/4$, $p(B) = 1/2$ i $p(A \cup B) = 2/3$.

Exercici 225. Dels esdeveniments A i B se sap que $p(A) = 2/5$, $p(B) = 1/3$ i $p(A^c \cap B^c) = 1/3$. Calculeu $p(A \cup B)$ i $p(A \cap B)$.

[2] Es pot demostrar de manera senzilla aquest fet: sabem que $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ i $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$. Aplicant la propietat anterior per $A \setminus B$ i $A \cap B$, tenim que $p(A) = p((A \setminus B) \cap (A \cap B)) = p(A \setminus B) + p(A \cap B) - p(\emptyset)$. Pel que $p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$.

7.2 Regla de Laplace

La ***regla de Laplace*** permet calcular la probabilitat d'un experiments si els esdeveniments elementals que el formen tenen tots la mateixa probabilitat. En altres paraules, si no hi ha cap biax. En aquest cas, la probabilitat que ocorri un esdeveniment A és:

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos possibles}}.$$

Exemple 108 (aplicació de la regla de Laplace). Una urna conté 5 bolles blanques, 7 bolles negres i 3 bolles verdes. Se n'extreu una a l'atzar. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui negra?

Solució. Tenim que la probabilitat de treure una bolla concreta és la mateixa (les bolles no estan trucades), per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{negra}) = \frac{\text{nombre de bolles negres}}{\text{nombre total de bolles}} = \frac{7}{15}.$$

■

Exemple 109 (aplicació de la regla de Laplace). D'un joc de cartes espanyoles en triam una a l'atzar[3]. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui una figura, és a dir un 10, un 11 o un 12?

Solució. Treure una carta és un esdeveniment equiprobable, per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{figura}) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

■

Exercici 226. En el llançament d'un dau, calculeu la probabilitat de què:

a) surti un cinc.

b) surti un nombre parell.

c) no surti un nombre parell.

d) surti múltiple de 3.

Exercici 227. A una oficina, un 30% del personal duen ulleres. Es tria una persona a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què aquesta no dugui ulleres.

Exercici 228. En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

[3]A la baralla espanyola, hi ha 48 cartes: 12 cartes de bastos, 12 d'ors, 12 d'espases i 12 de copes. El 10 s'anomena *sota*, l'11 s'anomena *cavall* i el 12, *rei*. El conjunt de sotes, cavalls i reis s'anomenen *figures*.

a) Sota
b) Bastos o copes
c) Bastos i copes
d) Figura i oros
e) Figura o oros
f) Cavall o copes

Exercici 229. En una bossa hi ha 5 bolles vermelles, 10 bolles negres i 5 bolles blaves. En treiem una i miram de quin color és. Calculeu la probabilitat de:

a) Treure una bolla vermella.

b) Treure una bolla negra o blava.

c) Treure una bolla que no sigui blava.

Exercici 230. En una bossa hi ha 25 bolles numerades de la manera següent: 5, 7, 9, 11, ..., 55. S'extreu una bolla a l'atzar i se n'observa el seu nombre. Calculeu la probabilitat de:

a) Treure un mombre que acabi en 5.

b) Treure un nombre menor que 17.

c) Treure un nombre parell.

d) Treure un múltiple de 3.

e) Treure un nombre primer.

Exercici 231. En una capsa hi ha vuit bolles numerades consecutivament com segueix: 2, 4, 6, ..., 16. Si diem A = "treure un nombre menor o igual que 10" i B = "treure un múltiple de 3". Calculeu la probabilitat de: *a*) A *b*) B *c*) A^c *d*) B^c *e*) $A \cup B$ *f*) $A \cap B$

Solució. exercici 226 *a*) 1/6, *b*) 1/2, *c*) 1/2, *d*) 1/3, exercici 227] 0.7, exercici 228] *a*) 4/48, *b*) 1/2, *c*) 0, *d*) 3/48, *e*) 21/48, *f*) 15/48, exercici 229] *a*) 1/4, *b*) 3/4 *c*) 3/4, exercici 230] *a*) $0,2$, *b*) $0,24$, *c*) 0, *d*) $0,32$, *e*) $0,56$, exercici 231] *a*) 0.625, *b*) 0.25, *c*) 0.375, *d*) 0.75, *e*) 0.75, *f*) 0.125 ■

Exercici 232. En el llançament de dos daus, trobeu la probabilitat de què *a*) ambdues cares sigui parells, *b*) la suma de les cares sigui 9

7.3 Probabilitat condicionada

En molts de casos, la probabilitat depèn d'un factor. Per exemple, la probabilitat de què una persona sigui calba és relativament baixa. Ara bé, la probabilitat de què un home sigui calb ja és més alta. Per tant, la probabilitat de ser calb depèn del sexe de les persones. D'aquesta manera podem calcular la probabilitat de ser calb o bé la probabilitat de ser calb condicionat a ser home. Això darrer vol dir que sabent que triam un home, quina és la probabilitat de què aquest sigui calb.

Definició 56 (probabilitat condicionada)**.** Donats els esdeveniments A i B, per ***probabilitat de*** A ***condicionat a*** B entendrem la probabilitat de què es verifiqui l'esdeveniment A si prèviament s'ha verificat l'esdeveniment B. S'escriu $p(A \mid B)$ i es calcula com

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)},$$

amb $p(B) \neq 0$.

7.3.1 Propietats de la probabilitat condicionada

Si A i B són esdeveniments qualssevol, llavors:

a) $p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, si $p(A) \neq 0$.

b) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = p(B) \cdot p(A \mid B)$.

c) Dos esdeveniments són ***independents*** quan $p(A \mid B) = p(A)$. En aquest cas, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Proposició 31. *Si A i B són independents, llavors també ho són A^c i B^c.*

Exemple 110 (probabilitat condicionada). En una bossa tenim:

- tres bolles verdes, numerades de l'1 al 3.
- quatre bolles vermelles, numerades del 4 al 7.
- una bolla negra, amb el nombre 8.

de la qual extraiem una bolla. Calculeu $p(\text{parell} \mid \text{verda})$, $p(\text{parell} \mid \text{vermella})$ i $p(\text{parell} \mid \text{negra})$.

Hem de calcular les probabilitats condicionades següents:

$$\begin{aligned}
p(\text{parell} \mid \text{verda}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{verda})}{p(\text{verda})} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}, \\
p(\text{parell} \mid \text{vermella}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{vermella})}{p(\text{vermella})} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}, \\
p(\text{parell} \mid \text{negra}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{negra})}{p(\text{negra})} = \frac{1/8}{1/8} = 1.
\end{aligned}$$

Exercici 233. D'un joc de cartes se'n treu una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què la carta extreta:

a) sigui un rei.

b) sigui una figura.

c) sigui el rei d'espases.

d) sigui un rei sabent que ha sortit una figura.

e) sigui una figura sabent que ha sortit un rei.

f) sigui el rei d'espases sabent que ha sortit una figura.

EXERCICI 234. En una urna hi ha deu bolles: tres de verdes, enumerades amb els nombres 1, 2 i 3; cinc de blanques, enumerades amb els nombres 4, 5, 6, 7, 8; i dues de negres, enumerades amb els nombres 9 i 10. S'extreu una bolla a l'atzar de l'urna i es mira el color i el seu nombre. Es defineixen els esdeveniments següents:

- P treure una bolla amb un nombre parell.
- C treure una bolla amb un nombre menor o igual que 5.
- V treure una bolla verda.
- N treure una bolla negra.

Trobeu les probabilitats següents:

a) $p(P)$, $p(C)$, $p(V)$, $p(N)$

b) $p(P \cap V)$, $p(N^c)$, $p(C \cup N)$

c) $p(P \mid V)$, $p(V \mid P)$

d) $p(C \mid N)$, $p(N \mid C)$

e) $p(C \mid (P \cap N))$

EXEMPLE 111. A l'exemple anterior (exemple 110), els esdeveniments "parell" i "vermella" són independents, ja que

$$p(\text{parell} \mid \text{vermella}) = p(\text{parell}) = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE 112. Una enquesta ha revelat que el 40% dels habitants d'una regió disposen de tauleta tàctil; el 20% disposa d'un portàtil; i un 5% disposa d'ambdós mitjans.

a) Quina probabilitat hi ha que un individu, triat a l'atzar i que duu un portàtil davall el braç, tengui també una tauleta?

b) I si duu una tauleta, quina és la probabilitat que tengui portàtil?

c) Quin percentatge de les persones no té tauleta però disposa d'un portàtil?

Solució. Si notem per T l'esdeveniment "disposar d'una tauleta tàctil" i per P l'esdeveniment "diposar d'un portàtil", llavors tenim que $p(T) = 0,40$, $p(P) = 0,20$ i $p(T \cap P) = 0,05$.

a) Hem de calcular $p(T \mid P) = \frac{p(T \cap P)}{p(P)} = \frac{0,05}{0,2} = \frac{1}{4}$.

b) En aquest cas, $p(P \mid T) = \frac{p(P \cap T)}{p(T)} = \frac{0,05}{0,4} = \frac{1}{8}$.

c) Volem saber $p(T^c \cap P) = p(P \setminus T)$. Per les propietats de la probabilitat (vegeu Secció 7.1), això és igual a $p(P) - P(P \cap T) = 0,2 - 0,05 = 0,15$.

■

Aquest exemple també es pot resoldre usant taules de contingència (vegeu Subsecció 7.4.2)

7.4 Experiments compostos: tècniques de resolució

Definició 57 (experiment compost)**.** Un experiment es diu ***compost*** si està format per més d'una part, la qual dóna lloc a un resultat. Si l'experiment només té una part es diu ***experiment simple***.

Fins ara només hem vist experiments simples.

Exemple 113 (exemple d'experiments compostos). Exemple d'experiment compost és:

a) Tirar dos daus.

b) Extreure dues (o més) bolles d'una urna, amb o sense reposició (la reposició és si tornam la bolla extreta a l'urna).

c) Extreure una bolla d'una urna i, segons el color de la bolla, extreure'n una altra d'una altra.

Existeixen diverses tècniques per a calcular les probabilitats dels experiments compostos, les quals de forma general podem emprar indistintament. El millor és veure'ls amb exemples.

7.4.1 Diagrama d'arbre

Exemple 114. A una casa hi ha tres clauers, A, B i C amb 5, 7 i 8 claus respectivament, de les quals només una de cada clauer obri la porta del rebost. Es tria un clauer a l'atzar i, d'aquest, una clau per intentar obrir el rebost.

a) Quina és la probabilitat d'obrir el rebost?

b) Quina és la probabilitat de què es triï el tercer clauer i la que la clau triada no obri el rebost?

c) Quina és la probabilitat de què s'hagi triat el clauer C sabent que s'ha obert el rebost?

Solució. En primer lloc, facem un ***diagrama d'arbre*** (Figura 7.1).

D'aquesta manera, tenim que

a) La probabilitat d'obrir el rebost és:

$$p(O) = p(A \cap O) + p(B \cap O) + p(C \cap O) = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} = \frac{131}{840}$$

b) La probabilitat de triar el clauer C i no obrir el rebost és $p(C \cap \overline{O}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24}$.

c) La probabilitat de què s'hagi triat el clauer C sabent que s'ha obert el rebost és $p(C \mid O)$:

$$p(C \mid O) = \frac{p(C \cap O)}{p(O)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{131}{840}} = \frac{1/24}{131/840} = \frac{840}{3144} = \frac{35}{131}$$

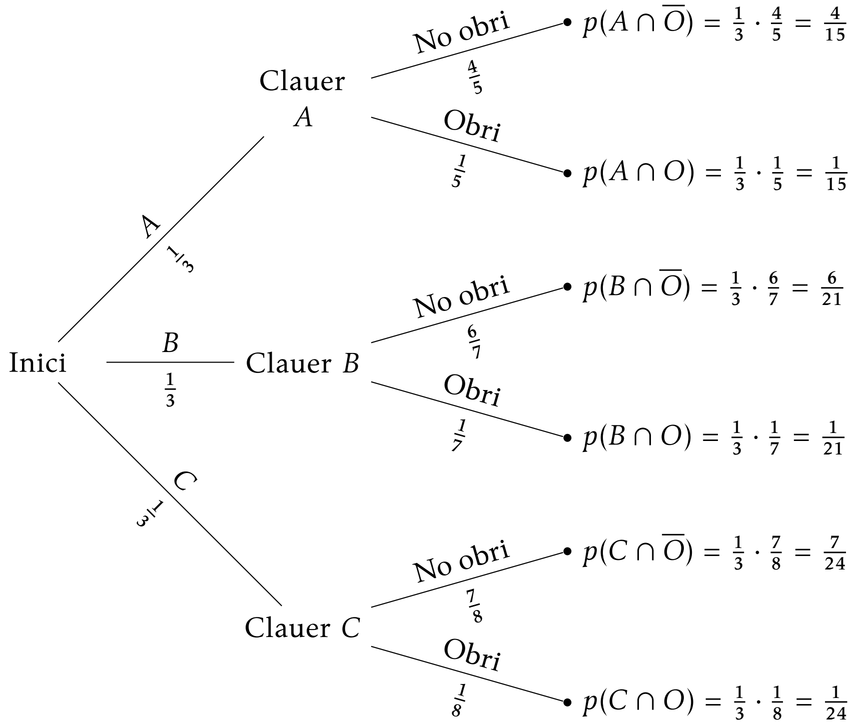


Figura 7.1: Diagrama d'arbre

Notem diverses coses:

a) Per calcular la probabilitat d'una *fulla* del diagrama d'arbre, hem de multiplicar cadascun del valors de les probabilitats que té cada *branca*. Així hem calculat la probabilitat $p(C \cap \overline{O})$.

b) Cada branca és disjunta, és a dir, la seva intersecció és buida. D'aquesta manera, la probabilitat de què passin esdeveniments que estan a diferents fulles es calcula sumant les seves probabilitats. Així hem calculat $p(O)$.

c) Notem que l'espai mostral d'aquest experiment compost seria

$$\Omega = \{(a, a_1), \dots, (a, a_5), (b, b_1), (b, b_2), \dots, (b, b_7), (c, c_1), \dots (c, c_8)\},$$

on, per exemple, (b, b_5) denota que s'ha triat el clauer B i s'ha triat la cinquena clau d'aquest clauer. D'aquesta manera, triar el clauer A seria l'esdeveniment

$$A = \{(a, a_1), (a, a_2), (a, a_3), (a, a_4), (a, a_5)\}$$

De forma anàloga es definirien els esdeveniments B, triar el clauer B, i C, triar el clauer C. L'esdeveniment "la clau triada obri el rebost", O, seria

$$O = \{(a, a_2), (b, b_3), (c, c_4)\},$$

si suposem que a_2, b_3 i c_4 serien les claus que obririen el rebost. Noteu que el diagrama d'arbre serveix per a trobar fàcilment les probabilitats de A, B, C i O sense haver de manejar conjunts.

d) Als apartats *a*) i *c*) hem aplicat, sense saber-ho, la probabilitat total de l'esdeveniment O i el teorema de Bayes.

Proposició 32 (probabilitat total). *Sigui un esdeveniment B que pot dependre d'altres esdeveniments $A_1, A_2, \ldots, A_n$ incompatibles entre si ($A_i \cap A_j = \emptyset$ per a tots els i, j) i tals que la seva unió és Ω ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$). Aleshores la probabilitat de B es pot calcular com*

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B \mid A_1) + p(A_2) \cdot p(B \mid A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B \mid A_n)$$

*Aquesta igualtat es coneix com a **probabilitat total de** B.*

Teorema 33 (teorema de Bayes). *Amb els mateixos termes que el teorema de la probabilitat total,*

$$p(A_i \mid B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B \mid A_i)}{p(A_1) \cdot p(B \mid A_1) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B \mid A_n)}$$

■

Exercici 235. Llançam una moneda dues vegades. Quina és la probabilitat d'obtenir: *a*) Dues cares? *b*) Almenys una cara? *c*) Una cara i una creu?

Exercici 236. Un moix encalça un ratolí. Aquest pot fugir per tres carrerons diferents, que designarem per A, B i C. Les probabilitats de què el ratolí entri en els carrerons A, B i C són, respectivament, de 0.3, 0.5 i 0.2. Se sap que la probabilitat de què el moix caci al ratolí després de què aquest entri al carreró A és de 0.4, de 0.6 si entra en el carreró B, i de 0.1 si ho fa pel carreró C. Calculeu *a*) la probabilitat de què el moix caci al ratolí *b*) la probabilitat de què el ratolí hagi entrat en el carreró A si sabem que finalment el moix l'ha caçat.

Exercici 237. D'un joc de cartes espanyoles, n'extraiem dues (sense reemplaçament). Quina és la probabilitat de què ambdues siguin d'espases?

Solució. Exercici 235 *a*) 1/4 *b*) 3/4 *c*) 1/2 Exercici 236 *a*) 0.44 *b*) 0.273 Exercici 237 11/188 ■

Exercici 238. A certa floristeria varen rebre quantitats iguals de roses i gladiols, de color groc i blanc. El 60% dels gladiols són de color groc, mentre que el 70% de les roses són de color blanc.

a) Si triem una rosa, quina probabilitat tenim que sigui de color groc?

b) Quina proporció de flors són de color blanc?

c) Si es varen comprar un total de 2000 flors i prenem dos gladiols, quina és la probabilitat de què aquests siguin de diferent color?

Exercici 239. Una màquina ha produït 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Trobeu la proporció de peces que no són defectuoses.

b) Calculeu la probabilitat de què, si examinem dues peces, ambdues resultin defectuoses.

c) Calculeu la probabilitat de què, sabent que la segona peça és defectuosa, la primera també ho sigui.

Exercici 240. En una cadena de producció de tatxes, sabem que una de cada 250 tatxes és defectuosa. Es trien dues tatxes a l'atzar. Calculeu

a) la probabilitat que les dues tatxes siguin defectuoses.

b) la probabilitat que almenys alguna de les tatxes siguin defectuoses.

c) saben que la segona tatxa és defectuosa, que la primera no ho sigui.

Exercici 241. Un estoig conté 15 llàpissos de color vermell i 10 de color blau.

a) Si triem un llapis a l'atzar, quina probabilitat es té que sigui vermell?

b) Si n'extraiem dos, quina és la probabilitat de què ambdós siguin blaus?

c) Calculeu la probabilitat de què, sabent que el segon és vermell, el primer hagi estat blau.

Solució. exercici 238] Heu de fer dos diagrames d'arbre diferents a l'apartat *b* i a l'apartat *c*. Amb això: *a*) $0,3$ *b*) $p(\text{blanc}) = p(\text{gladiol, blanc}) + p(\text{rosa, blanc}) = 0,55$ *c*) $p(\text{color diferent}) = p(\text{groc, blanc}) + p(\text{blanc, groc}) = \frac{600}{1000} \cdot \frac{400}{999} + \frac{400}{1000} \cdot \frac{600}{999} = \frac{160}{333}$, exercici 239] *a*) 25/100 *b*) 7/330 *c*) 14/99, exercici 241] *a*) 3/5 *b*) 3/20 *c*) 5/12 ■

7.4.2 Taules de contingència

Exemple 115. En una empresa hi ha 300 empleats, amb 200 dones i 100 homes. D'aquests, un 30% dels homes i un 40% de les dones tenen un contracte indefinit. Trobeu la probabilitat de què *a*) una persona elegida a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit *b*) una persona tengui un contracte indefinit *c*) sigui dona sabent que té un contracte indefinit

Solució. En comptes de fer un diagrama d'arbre, realitzarem una ***taula de contingència*** (Taula 7.1).

	Homes	Dones	
Contracte indefinit	30	80	110
Altres contractes	70	120	190
Total	100	200	300

Taula 7.1: Taula de contingència del sexe i tipus de contracte

Per saber, per exemple, el nombre d'homes amb contracte indefinit hem calculat el 30% de 100: $\frac{30}{100} \cdot 100 = 30$. De forma anàloga, per saber el nombre de dones amb contracte indefinit: $\frac{40}{100} \cdot 200 = 80$. Per saber els homes i dones amb diferent contracte, hem restat el total menys el nombre de contractes indefinits per sexes.

Amb aquesta taula podem veure fàcilment que

a) La probabilitat de què una persona triada a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit és $80/300 = 4/15$.

b) La probabilitat de què una persona tengui contracte indefinit és de $110/300 = 11/30$.

c) La probabilitat de què una persona sigui dona sabent que té contracte indefinit és

$$p(\text{dona} \mid \text{indefinit}) = \frac{p(\text{dona} \cap \text{indefinit})}{p(\text{indefinit})} = \frac{80/300}{110/300} = \frac{80}{110} = \frac{8}{11}.$$

■

Observació 27. En el cas de no saber el nombre total d'empleats, podríem suposar que fossin 100, per exemple.

Exercici 242. En una determinada població hi ha un 53% de dones. Un 20% dels homes té afició per la lectura. Aquesta afició augmenta fins al 30% en el cas de les dones. Es tria una persona a l'atzar. *a*) Quina és la probabilitat de què sigui dina i no tengui afició a la lectura? *b*) Quina és la probabilitat de què la persona triada sigui una dona sabent que té afició per la lectura?

Solució. *a*) $0,371$ *b*) $0,63$ ■

Exercici 243. En una oficina, el 70% dels empleats són extrangers. De entre aquests, el 50% són dones, mentre que, dels nacionals, són homes el 20%.

a) Quin percentatge d'empleats nacionals són dones?

b) Calculeu la probabilitat de què un empleat de l'oficina sigui dona.

c) En Ferran fa feina a l'oficina. Quina és la probabilitat de què sigui extranger?

Solució. *a*) 80% *b*) $0,59$ *c*) $35/41$ ■

Exercici 244. Una ciutat ha remodelat el seu passeig marítim i en diari local ha aparegut l'enquesta, realitzada a 200 persones, sobre si el resultat ha estat satisfactori. Els resultats varien depenent de la zona on viuen els enquestats: dels qui viuen al centre, el 30% li ha agradat el resultat final de les obres. Si viuen a les afores, aquest percentatge ha pujat a un 50%. Dels 200 enquestats, 120 viuen en el centre.

a) Quina és la probabilitat de què a una persona li hagin agradat les obres?

b) Si sabem que la persona li han agradat les obres, quina probabilitat hi ha que visqui en el centre?

EXERCICI 245. S'ha realitzat un estudi entre els estudiants d'un curs ofimàtica: d'entre els estudiants, un 40% ja havia cursat anteriorment un curset d'ofimàtica. D'aquests, un 20% té un ordinador a casa, mentre que dels que no havien cursat anteriorment ofimàtica, aquest percentatge baixa al 10%.

a) Quina és la probabilitat de què un estudiant tengui ordinador a casa?

b) Si un estudiant té ordinador a casa, quina és la probabilitat de què no hagi rebut abans formació d'ofimàtica?

Amb aquesta tècnica també podem resoldre exercicis referents a propietats de la probabilitat o probabilitat condicionada. Intentem resoldre l'exercici de l'exemple 112 amb taules de contingència:

Solució. Basta fer una taula com aquesta (Taula 7.2). Indiquem amb negreta les dades copiades talment de l'enunciat. Les altres entrades s'han obtingut restant o usant el càlcul de la probabilitat d'un esdeveniment contrari.

	Tauleta	Tauleta^c	
Portàtil	**5**	15	**20**
Portàtil^c	35	45	80
Total	**40**	60	100

Taula 7.2: Taula de contingència corresponent a la tinença de tauleta informàtica i portàtil

Amb aquesta taula, tenim que

a) $p(T \mid P) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

b) $p(P \mid T) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

c) $p(T^c \cap P) = \frac{15}{100}$.

■

7.4.3 Diagrames de Venn

Aquest mètode és convenient aplicar-lo quan sabem informació sobre esdeveniments excloents, com per exemple tenir una afició o una altra.

EXEMPLE 116. En un poble, el 55% dels habitants consumeix pa integral, el 30% pa multicereal i el 20% d'ambdós tipus. Quina és la probabilitat de què una persona triada a l'atzar no consumeixi cap dels dos tipus de pa?

Solució. Elaborarem un diagrama de Venn dels consumidors de pa (Figura 7.2). Per fer-ho, suposarem que hi ha 100 habitants al poble (tenim tants per cent al problema, per tant no és una suposició descabellada):

a) Si hi ha 55 habitants que consumeixen pa integral i 20 que també consumeixen multicereal, aleshores n'hi ha 35 que *només* consumeixen pa integral.

b) De la mateixa manera, hi ha 10 persones que només consumeixen pa multicereal.

c) Si en total hi ha 100 persones, tenim que hi ha 35 persones que no consumeixen cap tipus de pa.

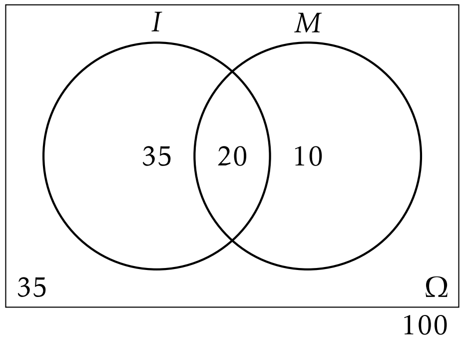


Figura 7.2: Diagrama de Venn dels consumidors de pa

Per tant, la probabilitat de triar un habitant que no consumeixi cap tipus de pa és $p(\bar{I} \cap \overline{M}) = 35/100 = 0.35$.[4]

■

Exercici 246. En una població, es sap que el 30% escolta els informatius per la radio, el 60% per la televisió i el 20% pels dos mitjans. Si es tria una persona a l'atzar, determineu la probabilitat de què:

a) escolti algun dels mitjans de comunicació.

b) escolti la radio i no vegi la televisió.

c) sabent que no veu la televisió, que escolti la radio.

d) escolti només un mitjà de comunicació.

Exemple 117. En una ciutat es publiquen tres diaris: A, B i C. El 50% de la gent està subscrita al diari A, el 40% a B i el 30% a C. El 20% està subscrit a A i a B, el 10% a A i C, el 20% a B i C i el 5% a tots els diaris. Si triem una persona a l'atzar d'aquesta ciutat, calculeu la probabilitat de què:

a) estigui subscrit almenys a un diari.

b) no estigui subscrit a cap diari.

c) estigui subscrit exactament a un diari.

[4] Haguéssim pogut obtenir aquest resultat usant les propietats de les operacions d'esdeveniments: $p(\bar{I} \cap \overline{M}) = p(\overline{(I \cup M)}) = 1 - p(I \cup M) = 1 - (p(I) + p(M) - p(I \cap M)) = 1 - (0.55 + 0.30 - 0.20) = 0.35$

Solució. Facem un diagrama de Venn de tres conjunts: subscriptors de A, de B i de C (Figura 7.3). Hem marcat en negreta les dades donades. Per calcular les dades que falten, hem procedit de la manera següent:

a) Hem suposat que hi ha 100 persones en total.

b) Sabem que $|A \cap B \cap C| = 5$ i $|A \cap B| = 20$. Per tant, els subscritors de A i B però que no estan subscrits a C, i.e., $A \cap B \cap \overline{C}$, són $20 - 5 = 15$. De la mateixa manera, $|A \cap C \cap \overline{B}| = 5$ i $|B \cap C \cap \overline{A}| = 15$.

c) Com que $|A| = 50$, per l'apartat anterior, tenim que $|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 50 - (5 + 5 + 15) = 25$. De la mateixa manera, $|B \cap \overline{C} \cap \overline{A}| = 40 - (5 + 15 + 15) = 5$ i $|C \cap \overline{A} \cap \overline{B}| = 30 - (5 + 5 + 15) = 5$.

d) Per últim, $|\overline{(A \cup B \cup C)}| = 100 - 75 = 25$.

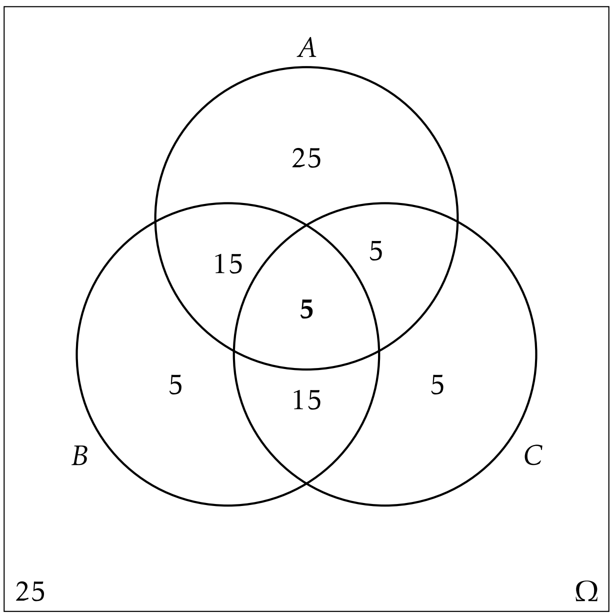


Figura 7.3: Diagrama de Venn dels subscriptors de diaris

Per tant, amb tot,

a) $p(\text{almenys un diari}) = \frac{25+15+5+5+15+5+5}{100} = 75/100 = 0.75$.

b) $p(\text{cap diari}) = 25/100 = 0.25$.

c) $p(\text{exactament 1 diari}) = \frac{25+5+5}{100} = 35/100 = 0.35$.

■

Exercici 247. En un grup de matrimonis heterosexuals s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris. En un 30% tant l'home com la dona els té i, finalment, el 37, 5% dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris i la dona no els té.

a) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni heterosexual l'home tengui estudis universitaris?

b) En quin percentatge de matrimonis heterosexuals en els que la dona té estudis universitaris, l'home també els té?

c) Quin percentatge correspon a matrimonis en el que l'home no té estudis universitaris i la dona sí?

Solució. *a*) $0,675$, *b*) 60%, *c*) 20% ■

EXERCICI 248. Un estudiant fa dues proves el mateix dia. La probabilitat de què passi la primera és de $0,6$, la que passi la segona és de $0,8$ i de què passi ambdues és de $0,5$. Es demana:

a) la probabilitat de què passi almenys una prova.

b) la probabilitat de què no passi cap prova.

c) són les proves esdeveniments independents?

d) la probabilitat de què passi la segona prova en cas de no haver superat la primera.

Solució. *a*) $0,9$, *b*) $0,1$, *c*) no són independents *d*) $0,75$ ■

EXERCICI 249. Un aparell elèctric està constituït per dos components: A i B. Sabent que hi ha una probabilitat de $0,58$ de què no falli cap element, i que en el 32% dels casos falla B però no A, determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component A.

Solució. $0,9$ ■

7.5 Exercicis proposats

EXERCICI 250. Un restaurant té contractats a dos cambrers: Javier i Ana per atendre el servei del menjador. Ana posa el servei el 70% dels dies i es confon al col·locar els coberts només el 5% dels dies. Mentre, Javier col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

a) Aquest matí, l'encarregat del restaurant ha passat revista al servei. Quina és la probabilitat de què trobi algun servei mal col·locat?

b) Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i vol trobar quina és la probabilitat de què hagi estat en Javier

Solució. *a*) $0,11$ *b*) $15/22$ ∎

EXERCICI 251. Certa persona compra tots els dies el diari local, comprant-lo indistintament en un de les botigues, A i B, que estan més pròximes a ca seva. El 80% dels dies el compra a la botiga A.

a) Quina proporció dels dies compra el diari a la botiga B?

b) Quina probabilitat hi ha de què compri dos dies el diari a la botiga A?

c) Quina és la probabilitat de què dos dies consecutius compri el diari a dues botigues diferents?

Solució. *a*) $0,20$ *b*) $0,64$ *c*) $0,32$ ∎

EXERCICI 252. La probabilitat de què un aficionat al futbol vagi al camp municipal a veure un partit és del 90% quan es disputa en cap de setmana i el 50% si té lloc en un dia laborable. La probabilitat de què un partit es jugui en cap de setmana és la mateixa que se jugui entre setmana.

a) Cert partit es celebrarà la setmana que ve en un dia encara sense determinar. Calculeu la probabilitat de què els aficionats vagin a veure'l al camp.

b) Si finalment un aficionat va anar a veure el partit, quina és la probabilitat de què aquest hagi estat en cap de setmana?

Solució. *a*) $0,7$ *b*) $45/70$ ∎

EXERCICI 253. En una capsa estan desats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

a) Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?

b) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, quina és la probabilitat de què funcionin els dos correctament?

c) Si el segon no funciona correctament, quina és la probabilitat de què el primer tampoc ho faci?

Solució. *a*) $15/20$ *b*) $21/38$ *c*) $4/19$ ∎

Exercici 254. El 25% de les famílies de certa comunitat autònoma espanyola no surt fora de la mateixa durant les vacances d'estiu. El 65% estiueja per la resta de l'estat i el 10% restant se'n va a l'extranger. Dels qui queden a la seva comunitat, només un 10% no usa cotxe en els desplaçaments. Aquesta quantitat augmenta al 30% entre els que surtin per la resta d'Espanya, i al 90% entre els que viatgen a l'extranger.

a) Calculeu el percentatge de famílies d'aquesta comunitat que utilitza el cotxe en els seus desplaçaments d'estiu.

b) Una família no usa cotxe en les seves vacances d'estiu. Quina és la probabilitat de què surti de la comunitat movent-se per la resta d'Espanya?

Solució. a) 69% *b*) 13/20 ■

Exercici 255. Un grup de 40 persones acabar de prendre un bus. D'aquests, només 10 són fumadors. Entre els fumadors, el 70% es mareja durant el viatge. I entre els qui no fumen, aquesta quantitat baixa al 40%.

a) Quina probabilitat hi ha que dues persones siguin fumadores ambdues?

b) Quina és la probabilitat de què un viatger no es maregi?

Solució. a) 3/52 *b*) $0,525$ ■

Exercici 256. Dos joves aficionats als jocs d'atzar es troben realitzant un solitari amb una baralla espanyola. Extreuen una carta de la baralla i volen saber quina és la probabilitat d'obtenir rei condicionat a què s'hagi tret figura.

Solució. 1/3 ■

Exercici 257. En un país s'ha constituït una comissió parlamentària integrada per deu membres, dels quals set pertanyen al partit governant i la resta al partit de l'oposició. Entre els set membres del partit governant hi ha quatres homes; dos entre els del partit de l'oposició. El president de la comissió s'elegeix per sorteig entre els seus integrants. Celebrat el sorteig, es sap que el president triat ha estat un home. Quin partit té més possibilitats de dirigir la comissió?

Solució. 2/3 ■

Exercici 258. S'ha fet un estudi d'un nou tractament sobre 120 persones que pateixen certa enfermetat. Trenta d'elles ja han patit l'enfermetat amb anterioritat. Entre les persones que l'han patida anteriorment, el 80% ha reaccionat positivament al nou tractament. De les que no la han patida amb anterioritat, el percentatge de la reacció positiva ha estat del 90%.

a) Si triem a l'atzar un pacient, quina és la probabilitat de què no reaccioni positivament al nou tractament?

b) Si un pacient ha reaccionat positivament al tractament, quina és la probabilitat de què no hagi patit l'enfermetat amb anterioritat?

Solució. a) 1/8 *b*) 27/35 ■

Exercici 259. A cert curs d'un centre d'ensenyament, el 62.5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. D'altra banda, d'entre els qui varen aprovar Matemàtiques, el 80% també varen aprovar Física. Es sap igualment que només el 33, 3% dels qui no varen aprovar Matemàtiques varen aprovar Física.

a) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures alhora?

b) Quin va ser el percentatge d'aprovats a l'assignatura de Física?

c) Su un estudiant no aprovà Física, quina és la probabilitat de què aprovàs Matemàtiques?

Exercici 260. El 70% dels sol·licitants d'un lloc de feina té experiència i a més formació adient amb el lloc de treball. Malgrat això, hi ha un 20% que té experiència i no una formació adient. Es sap també que entre els sol·licitants que tenen formació adient amb el lloc, un 88, 5% té experiència.

a) Quina és la probabilitat de què un sol·licitant no tengui experiència?

b) Si un sol·licitant té experiència, quina és la probabilitat de què la seva formació sigui adient amb el lloc de treball?

c) Calculeu la probabilitat de què un sol·licitant tengui formació adient amb el lloc.

Exercici 261. Un grup d'amics ha estat parlant sobre els seus gusts musicals. La música clàssica agrada al 20% d'ells. Es sap també que el percentatge dels qui els agrada la música moderna d'entre els que els agrada la música clàssica és del 75% i que el percentatge de qui els agrada la música moderna d'entre els qui no els agrada la música clàssica és del 87, 5%.

a) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi la música moderna?

b) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi tant la música clàssica com la moderna?

c) Si a una persona li agrada la música moderna, quina és la probabilitat de què tamé li agradi la música clàssica?

d) Si a una persona no li agradi la música moderna, quina és la probabilitat de què li agradi la clàssica?

Exercici 262. En un grup de matrimonis heterosexuals s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris; en un 30% tant l'home com la dona els tenen; finalment, en el 37, 5% dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris, la dóna també els té. En aquest grup de matrimonis:

a) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni el marit tengui estudis universitaris?

b) En quin percentatge de matrimonis en els que la muller té estudis universitaris el marit també els té?

c) En quin percentatge de matrimonis el marit no té estudis universitaris i la muller sí?

Exercici 263. En un grup de persones, al 50% els hi han posat alguna vegada una multa de trànsit. D'altra banda, al $12,5\%$ no els hi han posat mai cap multa però sí han sofert alguna vegada un accident. Finalment, al 60% dels qui mai han tengut un accident no els hi han posat mai una multa.

a) Quin percentatge de persones no han tengut mai un accident ni els hi han posat una multa?

b) Quin percentatge de persones no han tengut mai cap accident?

c) Entre les persones que mai han tengut cap multa, quin percentatge no ha tengut mai un accident?

Exercici 264. L'urna S conté 4 bolles blanques i 3 negres, i l'urna T conté 3 bolles blanques i dues negres. Prenem a l'atzar una bolla de l'urna S i, sense mirar-la, la introduïm a l'urna T. A continuació, extraïem amb reemplaçament dues bolles de l'urna T. Trobeu la probabilitat de què:

a) les bolles siguin del mateix color.

b) les bolles siguin de distint color.

Exercici 265. Un banc concedeix tres tipus de crèdits: hipotecaris, empresarials i personals. Es sap que el 30% dels crèdits concedits són hipotecaris; el 50%, empresarials; i el 20% restant són personals. Han resultat impagats el 20% dels crèdits hipotecaris, el 25% dels crèdits empresarials i el 50% dels crèdits personals. Es demana:

a) Representar la situació mitjançant un diagrama d'arbre.

b) Seleccionat un crèdit a l'atzar, calcular la probabilitat de què es pagui.

c) Un crèdit determinat ha resultat impagat. Calculeu la probabilitat de què sigui un crèdit hipotecari.

Exercici 266. En un trajecte entre dues ciutats pròximes, un automobilista ha d'atravessar tres zones que estan en obres i en les que es regula el trànsit mitjançant semàfors. La probabilitat de trobar el semàfor en vermell per a cadascuna de les tres zones és $0,3$, $0,7$ i $0,5$. Calculeu la probabilitat de què el conductor:

a) Trobi els tres semàfors en vermell.

b) Trobi els tres semàfors en vermell.

c) Trobi exactament un semàfor en vermell.

d) Trobi almenys un semàfor en vermell.

Exercici 267. En un determinat barri d'una ciutat s'ha observat que el 70% dels seus habitants té més de 50 anys i que d'aquests el 60% és propietari de la vivenda que habita. També es sap que el percentatge de propietaris és del 30% entre aquelles persones que no superen els 50 anys. Es demana:

a) Trobar la probabilitat de què un veïnat del barri, el qual ha estat triat a l'atzar, sigui propietari de la vivenda en la qual habita.

b) Triat un veïnat a l'atzar, que és propietari de la vivenda on habita, calculeu la probabilitat de què tengui més de 50 anys.

Exercici 268. Provem una vacuna contra el grip en un grup de 400 persones, de les quals 180 són homes i 220 dones. De les dones, 25 es contagien de grip i, dels homes, ho fan 23. Determineu les probabilitats de què:

a) Al seleccionar una persona a l'atzar, resulti que no té grip.

b) Al seleccionar una persona a a l'atzar, resulti ser una dona que no té grip.

c) Seleccionada una persona que no té grip, resulti que sigui un home.

d) Seleccionada una dona, resulti que no té grip.

Exercici 269. El 20% dels empleats d'una empresa són enginyers i un altre 20% són economistes. Tres de quatre enginyers ocupa un càrrec directiu, mentre que només ho fa el 50% dels economistes. De la resta dels empleats, només ocupen càrrecs directius un 20%. Calculeu les probabilitats de què:

a) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti ser un enginyer que no ocupa càrrec directiu.

b) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti no ser ni enginyer ni economista, però que ocupi un càrrec directiu.

c) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser economista.

d) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser enginyer o economista.

Exercici 270. El 15% dels habitants d'un país pateix certa enfermetat. Es disposa d'un procediment per a diagnosticar-la, el qual no és completament fiable: dóna positiu en el 90% dels casos de persones realment malaltes, però també dóna positiu en el 5% de les persones sanes (el que es coneix com *fals positius*). Determineu la probabilitat de què:

a) estigui sana una persona el diagnòstic de la qual ha donat positiu.

b) estigui malalta una persona el diagnòstic del qual ha estat negatiu.

Exercici 271. Tres tiradors disparen simultàniament a un blanc. Si els dispars són independients l'uns dels altres i la probabilitat que un tirador encerti al blanc és $0,6$, llavors calculeu la probabilitat que el blanc sigui destruït.

Exercici 272. Una caixa conté 100 peces, entre les que hi ha 20 defectuoses pel que fa a la longitud, 12 defectuoses pel que fa a l'amplada i 15 defectuoses pel que fa a l'altura. D'altra banda, sabem que hi ha 7 peces defectuoses en longitud i altura, 4 peces defectuoses en longitud i amplada, 5 que ho són en amplada i altura i 2 defectuoses en els tres aspectes. Es demana:

a) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar presenti un sol defecte.

b) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar sigui defectuosa només pel que respecte a la longitud.

Exercici 273. De 150 pacients, 90 tenen una enfermetat cardíaca, 50 tenen càncer i 20 tenen ambdues enfermetats. Determineu la probabilitat de què un pacient triat a l'atzar tengui només una de les dues enfermetats.

Exercici 274. Una màquina es composa de dos components: A i B. La probabilitat de què el component A falli és de $0,05$ mentre que la probabilitat de què B arribi a fallar és de $0,03$. La màquina funciona correctament sempre que ho fan ambdós components i també en el 30% dels casos en què ambdós components es comportin erròniament. En cas contrari, la màquina falla. Calculeu la probabilitat de què la màquina no funcioni correctament.

Exercici 275. Els habitants d'un poble poden votar entre dos partits polítics: A i B. El 55% dels habitants són menors de 30 anys; d'ells, el 80% són del partit B. Dels majors de 30 anys, només ho són 1 de 10 persones. Escollim una persona a l'atzar.

a) Calculeu la probabilitat de què sigui del partit A.

b) La persona triada resulta ser del partido A. Quina probabilitat hi ha de què tengui menys de 30 anys?

Exercici 276. N'Aina, en Bartomeu i en Cristòfol sortegen a l'atzar l'ordre en què entraran per una porta.

a) Calculeu la probabilitat de què els dos darrers en entrar siguin homes.

b) Determineu si són independients els esdeveniments 'la dona entra abans que algun dels homes' i 'els dos homes entren consecutivament'.

Exercici 277. Es tenen dues urnes, U_1 i U_2, el contingut del qual és el següent:

- en l'urna U_1 hi ha 4 bolles blaves, 3 vermelles i 3 verdes.
- en l'urna U_2 hi ha 4 bolles vermelles, 5 blaves i 1 verda.

Es llancen tres monedes a l'aire i si s'obtenen dues cares, s'extreu una bolla de l'urna U_1; en qualsevol cas, s'extreu una bolla de l'urna U_2. Trobeu la probabilitat de què la bolla extreta sigui blava. Ajudeu-vos d'un diagrama d'arbre.

Exercici 278. Un aparell elèctric està constituït per dos components, A i B. Sabent que hi ha una probabilitat de $0,58$ que no falli cap dels dos components, i que en el 32% dels casos falla B no havent fallat A, determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component A.

Exercici 279. Una urna, A, conté 5 bolles blanques i 3 de negres. Una altra urna, B, en té 6 de blanques i 4 de negres. Elegim una urna a l'atzar i extraiem dues bolles, que resulten ser negres. Trobeu la probabilitat de què l'urna elegida hagi estat la B.

Exercici 280. La probabilitat que un missatge de correu electrònic sigui *spam* varia depenent de la llengua en la qual està escrita: si el missatge està escrit en català, la probabilitat és de 1 de cada 20, mentre que si el missatge està escrit en anglès, la probabilitat augmenta a un 10%. En la bústia de correu electrònic d'una persona només trobam missatges en aquestes dues llengües: hi ha 300 missatges en català i 100 missatges en anglès.

a) Que un missatge estigui escrit en català i no sigui *spam*

b) Si es tria un missatge de correu electrònic a l'atzar, quina probabilitat hi ha que sigui *spam*

c) Sabent que un missatge no és *spam*, quina probabilitat tenim que estigui escrit en català?

Exercici 281. Uns analistes econòmics fan un estudi. Les conclusions són que el sistema econòmic pot col·lapsar en un 75% si algun banc es declara en fallida. Aquesta probabilitat baixa al 25% en cas contrari. Calculeu les probabilitats següents si sabem que a hores d'ara la probabilitat que un banc faci fallida és del 30%.

a) Que un banc faci fallida i que el sistema econòmic col·lapsi.

b) Que el sistema econòmic no col·lapsi.

c) Que el sistema econòmic no col·lapsi sabent que ha fet fallida un banc.

d) Que un banc faci fallida sabent que el sistema econòmic no col·lapsi.

Exercici 282. La probabilitat que cert article estigui fabricat per dues màquines A i B és de $0,7$ i $0,3$, respectivament. La màquina A produeix articles defectuosos amb una probabilitat de $0,02$ i la B amb $0,06$. S'observa un article i resulta que és defectuós. Quina probabilitat tenim que hagi estat fabricat per la màquina A.

Solució. $0,4375$ ■

Exercici 283. Disposam de dues monedes: una correcta i l'altra amb dues cares. També tenim una urna amb 10 bolles: quatre blanques i sis negres. Extraiem dues bolles de l'urna: si són del mateix color, triem la moneda correcta i la tiram en l'aire; altrament, elegim la moneda incorrecta i la llancem a l'aire. Trobeu la probabilitat que *a*) Que les bolles siguin del mateix color.

b) Obtenir cara en el llançament de la moneda.

c) Si el resultat del llançament de la moneda ha estat creu, trobeu la probabilitat que les dues bolles siguin de distint color.

Solució. 42/90, 23/30 i 1 ■

Exercici 284. Es tiren dos daus. Siguin S l'esdeveniment que la suma dels punts obtinguts sigui senar; i U l'esdeveniment que almenys un d'ells mostri un 1. Trobeu la probabilitat que $p(S \cap U)$ i $p(S \cup U)$.

Solució. 1/6 i 23/36 ■

Exercici 285. Dos escaquistes d'igual mestratge juguen als escacs. Què és més probable: guanyar dues partides de quatre jugades o bé guanyar-ne tres de sis?

Solució. És més probable guanyar-ne dos de quatre: $p(\text{guanyar-ne 2 de 4}) = 6/16$ i $p(\text{guanyar-ne 3 de 6}) = 5/16$. Hem fet servir permutacions per trobar aquests resultats, encara que es pot fer servir un diagrama d'arbre. ■

Exercici 286. En una àrea geogràfica determinada, el 60% dels vots han estat pel partit A. Si es consideren 3 votants d'aquesta àrea, es demana *a*) la probabilitat que l'hagin votat exactament dos votants *b*) la probabilitat que no l'hagi votat cap votant *c*) la probabilitat que l'hagin votat, almenys, dos votants

Exercici 287. En una ciutat, el 40% dels habitants té un cotxe vermell, el 25% té una moto vermella i el 15% té el cotxe i la moto vermells. Es tria una persona a l'atzar.

a) Si té el cotxe vermell, quina és la probabilitat que tengui la moto vermella?

b) Si té la moto vermella, quina és la probabilitat que tengui lel cotxe vermell?

c) Quina és la probabilitat que no tengui ni la moto ni el cotxe vermells?

Solució. El més ràpid és fer una taula de contingència amb les dades anteriors. *a*) 15/40 *b*) 10/25 *c*) 50/100 ■

Exercici 288. Una persona ha de prendre un avió per anar a Barcelona. Existeixen tres companyies: A, B i C que fan el trajecte. Les probabilitats que els avions de les companyies A, B i C compleixin el seu horari previst és de $0,7$, $0,8$ i $0,9$, respectivament. El comportament de cada avió no depèn dels altres. La probabilitat que aquesta persona triï un avió de la companyia A, B i C és del 50%, 20% i 30%, respectivament. Quina probabilitat té aquesta persona d'arribar a l'hora al seu destí.

Part IV

Apèndixs

A
Recordatori de matemàtica elemental

Aquí es fa un recordatori d'alguns continguts de Matemàtiques necessaris per llegir de forma fluida els apunts. Es tracta de continguts corresponents a un nivell de secundària obligatòria (ESO).

A.1 Operacions amb nombres

A.1.1 Sumes i restes

Si en una expressió només hi apareixen sumes i restes de nombres sencers, el valor final d'aquesta expressió es calcula de la manera següent:

1. Se sumen per separat el nombres positius i els nombres negatius.
2. Es resten els resultats de l'apartat anterior i es posa el signe del que tengui major valor absolut.

Exemple 118.

$$-2+8-15-3+7=15-20=-5$$

A.1.2 Producte i quocient de dos nombres

Per multiplicar o dividir *dos* nombres es segueix la regla següent: si els dos nombres tenen el mateix signe, el resultat del producte o de la divisió és positiu, i si els dos nombres tenen signes diferents, el resultat és negatiu.

Exemple 119.

$$-2\cdot(-3)=6$$

$$20:(-4)=-5$$

A.1.3 Jerarquia d'operacions

Per a calcular expressions aritmètiques que tenen diverses operacions, s'aplica un ordre en la que certes operacions es calculen abans que unes altres. S'anomena ***jerarquia d'operacions*** a l'ordre en el que s'efectuen les operacions. Aquesta és:

1. Parèntesis
2. Potències
3. Productes i divisions
4. Sumes i rectes

Exemple 120. Calculeu

$$3 + 4 \cdot 5$$

Per a calcular aquesta expressió, hem de calcular en primer lloc el producte, encara que l'operació no sigui la primera en aparèixer. En posterioritat, calcularíem la suma. Per tant,

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cdot 5 &= 3 + 20 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Exemple 121. Calculeu

$$(3+4) \cdot 5 + \frac{1}{2} - \left(3^2 - 5 \cdot 2\right)^2 + 2^2$$

En primer lloc, calcularem els parèntesis. S'ha de dir que com que el resultat d'un no influeix al resultat de l'altre, llavors es poden calcular de forma simultània. En general, podem fer això sempre que les subexpressions siguin sumands d'una expressió més general (tècnicament es diuen ***termes***). Així, calcularíem l'expressió numèrica de la forma:

$$\begin{aligned} (3+4) \cdot 5 + \frac{1}{2} - \left(3^2 - 5 \cdot 2\right)^2 + 2^2 &= 7 \cdot 5 + \frac{1}{2} - (9 - 10) + 4 \\ &= 35 + \frac{1}{2} - (-1) + 4 \\ &= 35 + \frac{1}{2} + 1 + 4 \\ &= 40 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{81}{2} \end{aligned}$$

A.1.4 Càlcul del mínim comú múltiple

Definició 58 (múltiple d'un nombre)**.** Donat dos nombres a, b, direm que b és un ***múltiple*** de a si, i només si, existeix un altre nombre r tal que $a \cdot r = b$ o dit d'altra manera si quan dividim b entre a el reste és 0.

Exemple 122. 60 és múltiple de 2 perquè $2 \cdot 30 = 60$. També és múltiple de 3, 5, 10, 20, 30 i 60. Però 60 no és múltiple de 40 perquè 60 entre 40 no dóna reste 0.

Es pot fer una llista de *tots* els múltiples d'un nombre multiplicant aquest nombre consecutivament per 1, 2, etc. Per exemple, els múltiples de 60 són: $60 \cdot 1 = 60$, $60 \cdot 2 = 120$, $60 \cdot 3 = 180$, etc.

Definició 59 (mínim comú múltiple)**.** Donats els nombres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ el seu ***mínim comú múltiple*** és el menor de tots els seus múltiples comuns. El mínim comú múltiple s'abreuja mcm.

Exemple 123. Els nombres 10 i 12 tenen com a mínim comú múltiple. La raó és que:

- Els múltiples de 10 són: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120, …
- Els múltiples de 12 són: 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, …

Per tant, els múltiples comuns són 60, 120, etc. Llavors 60 és el menor d'aquests múltiples i, per tant, és el mcm.

Existeixen diversos procediments per a calcular el mínim comú múltiple de diversos nombres:

Algorisme 6 (càlcul del mcm amb la llista de múltiples)**.** *Pel càlcul del mcm dels nombres a_1, a_2, …, a_r es procedeix de la manera següent:*

1. *Es llisten els múltiples de cada nombre.*
2. *Es selecciona el múltiple més petit.*

L'exemple anterior (exemple 123) exemplifica aquest procediment.

S'ha de dir que aquest procediment és molt lent, sobretot per nombres grans.

Algorisme 7 (càlcul del mcm amb la factorització de nombres)**.** *Pel càlcul del mcm dels nombres a_1, a_2, …, a_r es procedeix de la manera següent:*

1. *Es factoritzen els nombres en factors primers*[1].
2. *El mínim comú múltiple s'obté prenent tots els factors elevats al màxim exponent.*

Aquest és el procediment *estàndard* per al càlcul del mínim comú múltiple.

Exemple 124. Calculeu el mcm de 20, 12 i 100:

1. Factoritzem els nombres.
2. Per tant, $20 = 2^2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$ i $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

[1]La llista de primers és infinita, però els sis primers primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

3. Llavors el mcm és igual a $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Algorisme 8 (càlcul del mcm de forma ràpida per nombres petits). *Aquest algorisme és ràpid sobretot per nombres petits. Si a, b, c i d són els nombres dels quals volem trobar el mínim comú múltiple, aleshores:*

1. *Es selecciona el nombre més gran. Suposem que és a.*
2. *Es generen els seus múltiples.*
3. *Per a cada múltiple es comprova si aquest és múltiple dels altres nombres, és a dir, si la seva divisió dóna exacte.*
4. *Si és així, llavors aquest és el mínim comú múltiple. En cas contrari, es genera el múltiple següent de a.*

El més usual és que necessitem el mínim comú múltiple per resoldre equacions de primer grau que tenguin fraccions. En aquest cas però no és necessari calcular el mínim comú múltiple. Bastaria calcular un múltiple (vegeu Secció A.2).

Exercici 289. Calculeu el mínim comú múltiple per als conjunts de nombres següents:

a) 20 i 8
b) 12 i 42
c) 8 i 12
d) 12 i 21
e) 30 i 65
f) 10 i 12
g) 20 i 36
h) 15, 20 i 30
i) 6, 8 i 12
j) 30, 45 i 60
k) 12, 18, 20 i 32
l) 17, 68 i 34
m) 10, 105 i 22
n) 25, 75 i 200

Solució. *a*) 40, *b*) 84, *c*) 24, *d*) 84, *e*) 390, *f*) 60, *g*) 180, *h*) 60, *i*) 24, *j*) 180, *k*) 1440, *l*) 68, *m*) 2310, *n*) 600 ■

A.2 Equacions de primer grau

Per resoldre una ***equació de primer grau*** es segueixen les passes de l'exemple següent:

Exemple 125. Resol l'equació

$$5x - \frac{3x+1}{8} = x + \frac{5x-3}{4} - \frac{3}{2}$$

Resolució:

1. Primer:
$$\frac{5x}{1} - \frac{3x+1}{8} = \frac{x}{1} + \frac{5x-3}{4} - \frac{3}{2}$$
2. Segon (càlcul del mcm): $mcm\,(8, 4, 2) = 8$

3. Tercer (reducció a comú denominador):

$$\frac{40x}{8} - \frac{3x+1}{8} = \frac{8x}{8} + \frac{2\cdot(5x-3)}{8} - \frac{12}{8}$$

4. Quart (eliminem els denominadors):

$$40x - (3x+1) = 8x + 2\cdot(5x-3) - 12$$

5. Cinquè (eliminem els parèntesis):

$$40x - 3x - 1 = 8x + 10x - 6 - 12$$

6. Sisè (transposició de termes):

$$40x - 3x - 8x - 10x = -6 - 12 + 1$$

7. Setè (operar):

$$19x = -17$$

8. Vuitè (aïllar l'incògnita):

$$x = \frac{-17}{19}$$

Nota 4. Normalment es passa del segon al cinquè pas quan es té suficient soltura.

Nota 5. D'altra banda, es pot no calcular el mínim comú múltiple dels denominadors i només calcular-ne *un* múltiple. Per exemple es podria calcular el múltiple sorgit de la multiplicació dels denominadors, o sigui, $8\cdot4\cdot2 = 64$. I realitzar tots els càlculs amb 64 en comptes de 8. L'equació resultant tendria les mateixes solucions, encara que els nombres sorgits (dels passos tercer al vuitè) serien majors.

Exercici 290 (equacions senzilles). Resoleu les equacions següents:

a) $6x - 20 = 60$

b) $10x - 4 = 26$

c) $2x + 1 = 7 - x$

d) $3x + 10 = 22 + x$

e) $8x + 4 = 20 + 4x$

f) $10x - 4 = 26 + 6x$

g) $6x + 3 = 15$

h) $6x - 2 + 4x = 7x - 8 + 2x$

Solució. *a*) $\frac{4}{3}$, *b*) 3, *c*) 2, *d*) 6, *e*) 4, *f*) $\frac{15}{2}$, *g*) 2, *h*) -6 ■

Exercici 291 (equacions amb parèntesis). Resoleu les equacions següents:

a) $-(6x + 20) = 2 - (42 + 2x)$

b) $4(x + 2) = 48 - 4x$

c) $10(x - 2) = 15(1 - x) - 35$

d) $1 - (3x + 10) = 1 - (14 - x)$

e) $6 - 4(x - 2) = -10 - 6(1 - x)$

f) $(x + 2) - (x + 3) = 2 - 3(1 - x)$

g) $2x + 1 + (2x - 3) = 2 + 3(1 - x)$

h) $3x + 3 + 3(3 - x) = -9(1 - 2x) - 15$

i) $2(x + 2) - (x + 3) = 1 - 3x$

Solució. *a*) 5, *b*) 0, *c*) 1, *d*) 3, *e*) 0, *f*) 1, *g*) 2, *h*) 0 ■

Exercici 292 (equacions amb denominadors). Resoleu les equacions següents:

a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = x + 1$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{18-3x}{4} = 3x + 3$

c) $\frac{10x}{3} + \frac{5x}{2} + \frac{5x}{3} + \frac{5x}{4} = 3500$

d) $\frac{4(x-3)}{9} + \frac{10(x-2)}{3} = \frac{2}{3}$

e) $\frac{1-x}{6} - \frac{x-1}{24} = \frac{3x-1}{8}$

f) $\frac{2x}{3} + \frac{8}{15} - 2x = \frac{1}{3} - \frac{7x}{5}$

Solució. *a*) 6, *b*) −10, *c*) 400, *d*) 39/17, *e*) 4/7, *f*) −3 ■

A.3 Extracció de factor comú

El factor comú d'una expressió pot ser un nombre, una lletra, o bé ambdues coses:

Exemple 126.

$$
\begin{aligned}
-8 + 12 - 6 + 2 &= 2 \cdot (-4 + 6 - 3 + 1) \\
-x^5 + 4x^3 - x^2 &= x^2 \cdot \left(-x^3 + 4x - 1\right) \\
5x^6 - 10x^4 - 15x^3 &= 5x^3 \cdot \left(x^3 - 2x - 3\right)
\end{aligned}
$$

A.4 Equacions de segon grau

Les ***equacions de segon grau*** són aquelles que involucren una x^2. Formalment es formen igualant un polinomi de segon grau a zero (vegeu Secció A.5).

Les equacions de segon grau són de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ amb } a \neq 0 \tag{A.1}$$

La solució d'aquestes equacions es calcula amb la fórmula següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{A.2}$$

Exemple 127. La solució de l'equació $x^2 - 5x + 6 = 0$ és

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$= \quad \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Les ***equacions incompletes*** de segon grau, és a dir, aquelles en les quals $b = 0$ o $c = 0$ (o tots dos valen zero) es poden resoldre d'una altra manera, encara que també es poden resoldre amb la fórmula de segon grau. Aquí en donem dos exemples (les equacions de segon grau que tenen tots els termes diferents de zero, s'anomenen ***equacions completes***).

Exemple 128.

$$-3x^2 + 12 = 0; \; -3x^2 = -12; \; x^2 = \frac{-12}{-3} = 4; \; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Exemple 129.

$$2x^2 - 5x = 0; \; x(2x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \\ 2x - 5 = 0; \; x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

En general, les equacions de segon grau poden no ser de la forma (A.1), encara que sempre es poden reduir a aquesta forma.

Exemple 130. Resoleu l'equació $-3x^2 - 2x + 15 = -15 + 2x + 2x^2 + x$.

Aquesta equació és equivalent a $-3x^2 - 2x + 15 + 15 - 2x - 2x^2 - x = 0$. Sumant els termes semblants, tenim que això és equivalent a $-5x^2 - 5x + 30 = 0$. Aplicant la fórmula de segon grau (A.2), obtenim que les solucions són 2 i -3.

Exercici 293. Resoleu les equacions de 2n grau següents:

a) $4x^2 + 2x - 4 = -2x + 4$

b) $9x^2 - 63x + 90 = 0$

c) $-x^2 - 3x + 10 = x^2 + 3x - 10$

d) $-2x^2 + 4x - 3 = -2x + x^2$

e) $2x^2 + 4x + 1 = -1$

f) $2x + 1 = -2 - x^2$

Solució. *a*) -2 i 1, *b*) 2 i 5, *c*) -5 i 2, *d*) 1, *e*) -1, *f*) no té solució ■

Exercici 294. Resoleu les equacions de 2n grau següents:

a) $3x^2 + 2x = 5x - 2$

b) $10x - 8x = x^2 - 5$

c) $9x - 8 = 7 - x^2$

d) $8x^2 - 2 = 10x^2 - 5x$

e) $(x - 2)^2 - 5 = 10$

f) $3(x + 4)^2 = 10$

g) $(x - 2)^2 - 8 = 20x$

h) $5(x - 1)^2 = 2$

i) $(x - 1)^2 = -4$

j) $(x - 5)^2 = 5x^2$

Solució. *a*) no té solucions, *b*) no té solucions, *c*) $-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{141}}{2}$, *d*) 2 i $\frac{1}{2}$, *e*) $2 \pm \sqrt{15}$, *f*) $-4 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$, *g*) $6 \pm 2\sqrt{37}$, *h*) $1 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$, *i*) no té solució, *j*) $-\frac{5}{4} \pm 5\frac{\sqrt{5}}{4}$ ■

NOTA 6. Recordeu que $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Això és una ***identitat notable***, que s'anomena el ***quadrat d'una suma***[2]. De forma pràctica podeu memoritzar la identitat o bé simplement obtenir-la multiplicant $a+b$ per $a+b$, com hem indicat abans.

A.5 Arrels de polinomis

DEFINICIÓ 60 (monomi)**.** Un ***monomi*** és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre real i una o diverses lletres. Al nombre se l'anomena ***coeficient*** del monomi; a la part que conté les lletres de l'anomena ***part literal***. Les diverses lletres s'anomenen ***variables***.

EXEMPLE 131. Les expressions següents són monomis:

a) $5x^3$

b) $2x^2y^5$

c) $-4xy$

d) $\frac{-6}{5}x^4$

e) $6x$

f) 8

En canvi aquestes expressions no són monomis:

a) $\frac{5}{x}$

b) $5x^3\sqrt{y}$

c) $3x^{-2}$

d) e^x

e) $\sin x$

f) $\log x$

DEFINICIÓ 61 (polinomi)**.** Un ***polinomi*** és una expressió algebraica formada per la suma de diversos monomis. Els monomis que formen part del polinomi s'anomenen ***termes***. Els ***coeficients*** del polinomi són els coeficients de cada monomi que el formen.

Aquí només veurem polinomis d'una variable, usualment x, com per exemple $4x^2 - 5x + 2$ o $5x^4 + 2x^2$.

DEFINICIÓ 62 (grau d'un polinomi)**.** El ***grau*** d'un polinomi d'un variable és el major exponent de la variable de cadascun dels seus termes

EXEMPLE 132. El grau del polinomi $4x^5 - 2^3 - 5x + 8$ és 5 i el grau de $x^{10} - 2x^2 - 5x$ és 10.

DEFINICIÓ 63 (terme independent d'un polinomi)**.** El ***terme independent*** d'un polinomi és el monomi de grau 0 del polinomi. Pot no tenir-ne.

EXEMPLE 133. El terme independent del polinomi $4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ és -7; en canvi el polinomi $4x^3 - 2x^2 - 5x$ no en té.

NOTACIÓ 3. Els polinomis en una variable x, es denoten per $p(x)$, $q(x)$, etc. que es llegeix "p de x", "q de x", etc. Així per exemple si $p(x) = 5x^2 - 2x$ i $q(x) = x^2 - 2x$, tenim que la seva suma és $p(x) + q(x) = 6x^2 - 4x$.

Les ***operacions amb polinomis*** bàsiques són:

---

[2]Existeixen altres identitats notables: el ***quadrat d'una diferència*** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ i ***suma per diferència*** $(a+b)*(a-b) = a^2 - b^2$ ("suma per diferència, diferència de quadrats").

a) Suma. Per sumar dos polinomis, es sumen els termes del mateix grau. Així per exemple si $p(x) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7$ i $q(x) = -7x^5 + 3x^4 + 6x^3 - x^2 - 4x - 15$, la seva suma és $p(x) + q(x) = -6x^5 + 3x^4 + 7x^2 - 14x - 8$. Aquesta suma es pot fer verticalment:

$$\begin{array}{rrrrrr} x^5 & & -6x^3 & +8x^2 & -10x & +7 \\ \\ -7x^5 & +3x^4 & +6x^3 & -x^2 & -4x & -15 \\ \hline -6x^5 & +3x^4 & & +7x^2 & -14x & -8 \end{array}$$

b) Resta. La resta $p(x)-q(x)$ es calcula sumant el polinomi $p(x)$ amb el polinomi $q(x)$ amb tots els coeficients canviats, és a dir, $p(x)+(-q(x))$. Si $p(x) = x^5-6x^3+8x^2-10x+7$ i $q(x) = x^5-7x^4+9x^3+x^2-6x$, llavors $p(x)-q(x) = p(x)+(-q(x)) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7 - x^5 + 7x^4 - 9x^3 - x^2 + 6x = 7x^4 - 15x^3 + 7x^2 - 4x + 7$.

També es pot fer verticalment:

$$\begin{array}{rrrrrr} x^5 & & -6x^3 & +8x^2 & -10x & +7 \\ \\ -x^5 & +7x^4 & -9x^3 & -x^2 & +6x & \\ \hline & +7x^4 & -15x^3 & +7x^2 & -4x & +7 \end{array}$$

c) Producte de polinomis. Es calcula multiplicant cada terme del primer polinomi per cada terme del segon: si $p(x) = 7x^2 - 4x + 7$ i $q(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2$, llavors $p(x) \cdot q(x)$ és igual a:

$$\begin{aligned} &\left(7x^2 - 4x + 7\right) \cdot \left(2x^4 - 5x^3 + x^2\right) = \\ &\quad 14x^6 - 35x^5 + 7x^4 - 8x^5 + 20x^4 - 4x^3 + 14x^4 - 35x^3 + 7x^2 = \\ &\qquad 14x^6 - 43x^5 + 41x^4 - 39x^3 + 7x^2 \end{aligned}$$

d) No tractarem la divisió de polinomis en general. Només tractarem el ***mètode de Ruffini***, que permet dividir un polinomi qualsevol $p(x)$ per un polinomi de la forma $x-a$, amb a un nombre enter positiu. Veurem un exemple: volem dividir el polinomi $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$ per $x - 1$:

(a) En primer lloc, escrivim els coeficients del polinomi $p(x)$ de major a menor grau a una taula, posant-hi zeros allà on el polinomi no tengui termes:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ 1 & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \| -6 \end{array}$$

(b) El primer coeficient del polinomi $p(x)$ baixa sempre directament, tal com indica la fletxa,

(c) A continuació, el divisor (l'1), que l'hem escrit a l'esquerre de la línea vertical, multiplica el primer coeficient $(1 \cdot 1 = 1)$ i el resultat es col·lloca davall del segon coeficient del polinomi,

(d) Llavors es suma el resultat d'aquesta multiplicació amb el segon coeficient del polinomi $(1 + 1 = 2)$

(e) Ara, el divisor multiplica aquesta suma i el resultat es col·lloca davall del tercer coeficient del polinomi $p(x)$

(f) Es repeteix aquest procés fins que no quedin coeficients.

(g) El darrer nombre és el reste de la divisió (en aquest cas -6); el quocient de la divisió l'hem d'extreure dels nombres del final de la taula $1\ 0\ -4 \to x^2 + 0x - 4$. El grau del polinomi quocient és sempre un menys que el grau de $p(x)$ (en aquest cas $3 - 1 = 2$).

(h) Per tant, la divisió de $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$ per $x - 1$ dóna com a quocient $x^2 - 4$ i reste -6; en altres paraules $(x^2 - 4)(x - 1) + (-6) = x^3 - x^2 - 4x - 4$.

El mètode de Ruffini serveix per a factoritzar un polinomi en polinomis irreductibles i per a trobar les seves arrels enteres.

Definició 64 (arrel d'un polinomi)**.** Donat un polinomi $p(x)$, un nombre a és una ***arrel*** seva si substituïnt la x pel valor de a, dóna 0.

Teorema 34 (teorema fonamental de l'Àlgebra)**.** *Donat un polinomi, el nombre d'arrels reals d'aquest polinomi és com a màxim el seu grau*

Exemple 134. Són arrels de $p(x) = 2x^2 - 7x + 6$ són 2 i $\frac{3}{2}$, ja que l'equació de segon grau $2x^2 - 7x + 6 = 0$ té com a solucions aquests nombres (vegeu Secció A.4); en altres paraules $p(\frac{3}{2}) = 0$ i $p(2) = 0$.

En general trobar les arrels d'un polinomi és un problema irresoluble, però existeix una manera de trobar les seves arrels enteres.

Algorisme 9 (procediment per trobar les arrels enteres d'un polinomi)**.** *Donat un polinomi $p(x)$, les arrels*

a) *Si té terme independent, calculam els seus divisors enters*

b) *Per a cada divisor d del terme independent, dividim $p(x)$ per $x - d$. Si el reste de la divisió és 0, llavors d és una arrel de $p(x)$. Si el reste de la divisió no és 0, llavors d no és una arrel de $p(x)$.*

c) *En cas de no tenir terme independent, llavors 0 és una arrel i podem factoritzar $p(x)$ com un polinomi $q(x)$ multiplicat per x^r, per qualque $r > 0$. En aquest cas, apliquem l'anterior a $q(x)$: totes les arrels de $q(x)$ ho seran de $p(x)$.*

Exemple 135. Trobeu les arrels del polinomi $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

Solució.

1. Els divisors enters de -4 són $1, -1, 2, -2, 4, -4$.

2. Provam de fer Ruffini amb $p(x)$ i $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrr||r} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ \mathbf{1} & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -6 \end{array}$$

   Com que el reste és -6 vol dir que 1 no és arrel de $p(x)$

3. Ara provem amb -1:

$$\begin{array}{r|rrr||r} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ \mathbf{-1} & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

   Ara sí que hem obtingut un 0 al final. Per tant, -1 és arrel de $p(x)$.

4. Ara provem de fer Ruffini amb 2:

$$\begin{array}{r|rrr||r} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ 2 & & 2 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

   Per tant, 2 és arrel de $p(x)$.

5. Igualment, si aplicam el mètode de Ruffini amb -2 també tendrem reste 0, pel que -2 també és una arrel.

$$\begin{array}{r|rrr||r} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ -2 & & -2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

6. Com que ja tenim 3 arrels, ja no hem de intentar trobar-ne més (teorema 34).

■

Nota 7. En general, l'ordre en el que provem si els divisors senzers són o no arrels enteres és indistint.

Nota 8. Pot ser que un polinomi no tengui arrels enteres però sí arrels reals: per exemple $x^2 - 2$ no té arrels enteres (proveu de fer Ruffini per als divisors de -2) però sí té arrels reals ($\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$).

També pot ser que no tengui arrels reals: per exemple $x^2 + 2$ no té arrels reals (es veu aplicant la fórmula de segon grau).

Exercici 295. Trobeu les arrels dels polinomis següents:

a) $x^4 + 3x^3 - 40x^2$

b) $2x^3 - x^2 - 118x - 315$

c) $x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x$

d) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$

e) $3x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 90x$

f) $x^4 + 28x^3 - 60x^2$

Solució. *a*) -8, 0 i 5, *b*) -5, $\frac{-7}{2}$ i 9, *c*) 0, 2 i $\sqrt[3]{3}$, *d*) $\pm\sqrt{2}$, 2 i -3, *e*) 2, -3, 0 i 5, *f*) 0 (doble), 2 i -30 ■

Exercici 296. Resoleu les equacions següents:

a) $-2x^5 + 6x^3 - 4x^2 = 0$

b) $-x^4 + 10x^3 - 35x^2 + 50x = 24$

c) $x^3 - \frac{5x^2}{2} + x = 0$

d) $12x^4 - 39x^2 + 27 = 0$

e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

f) $x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = 0$

g) $x^3 - 8x^2 + 18x - 11 = 0$

h) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

i) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$

j) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

Solució. *a*) 0 (doble), 1 (doble) i -2 *b*) 1, 2, 3 i 4 *c*) 0, $\frac{1}{2}$ i 2, *d*) $\pm\frac{3}{2}$, ±1, *e*) 1, -2 i 3, *f*) -1, 2, 3 i 5, *g*) 1, $(7 \pm \sqrt{5})/2$, *h*) 0, -3, 3, *i*) 3, *j*) 0, -3, 2 ■

Exercici 297. Resoleu les equacions següents:

a) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $3x^3 - 15x^2 + 9x + 27 = 0$

c) $-5x^5 + 15x^3 + 10x^2 = 0$

d) $x^4 - 3x^2 - 2 = 2$

e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

f) $x^4+x^3-17x^2+10x+15 = 2x^2-15-x$

g) $x^3 - 8x^2 + 18x - 11 = 0$

h) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

i) $x^4 + 4x^2 = 0$

j) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

Solució. *a*) $1, -3 \pm \sqrt{3}$ *b*) $-1, 3$ *c*) $-1, 0, 2$, *d*) ± 2, *e*) $1, -2, 3$, *f*) $-1, 2, 3, -5$, *g*) $0, (7\pm\sqrt{5})/2$, *h*) $2, \pm 3$, *i*) 0, *j*) $-3, 0, 2$. ■

A.6 Factorització de polinomis

Definició 65 (polinomi irreductible). Un polinomi és ***irreductible*** si no es pot escriure com a producte de polinomis de menor grau. En altre cas, s'anomena ***reductible***.

a) Els polinomis de primer grau són irreductibles. És a dir, tots els polinomis de l'estil $ax + b$ són irreductibles. Per exemple $2x - 4$ i $x + 4$ són irreductible.

b) Els polinomis de segon grau són irreductibles si, i només si, no tenen cap arrel real. És a dir $p(x) = ax^2 + bx + c$ és irreductible si, i només si, l'equació

$ax^2 + bx + c = 0$ no té solució (vegeu Secció A.4). Per exemple, $x^2 + 9$ és irreductible, però $x^2 - 9$ i $x^2 - 2x + 1$ són reductibles.

c) Els polinomis de grau major o igual que 3 mai són irreductibles.

Definició 66 (factorització de polinomis). ***Factoritzar*** un polinomi $p(x)$ és descompondre $p(x)$ com a producte de polinomis irreductibles.

No existeix cap procediment per a factoritzar polinomis, ja que és equivalent a trobar arrels reals de polinomis de qualsevol grau. Encara que existeix un algorisme per factoritzar polinomis trobant arrels enteres.

Algorisme 10 (procediment per factoritzar els polinomis). *Donat un polinomi $p(x)$, s'han de seguir les passes següents*

1. *Treure factor comú, si és possible (vegeu Secció A.3)*
2. *Trobarem els divisors del terme independent*
3. *Per a cada divisor d del terme independent, provarem si d és arrel del polinomi $p(x)$*
4. *Si d és arrel del polinomi, llavors $p(x)$ es pot expressar com a producte de $(x - d)$ i un polinomi $q(x)$ de grau $d - 1$. En aquest cas, repetirem aquest algorisme des del primer pas amb el polinomi $q(x)$..*

   Si d no és arrel, seguirem provant amb els altres divisors.
5. *Si cap divisor del terme independent és arrel, llavors no podem factoritzar $p(x)$.*
6. *Al final, haurem de d'ajustar el coeficient de major grau per a què quedi el coeficient del terme de major grau de $p(x)$.*

Exemple 136. Factoritzeu el polinomi $30x^4 + 35x^3 - 45x^2 + 10x$.

Solució.

1. Podem treure factor comú perquè tots el termes són múltiples de 5 i de x:

$$5x(6x^3 + 7x^2 - 9x + 2)$$

2. Aplicam el mètode de Ruffini al polinomi que queda dins el parèntesi (després de provar els divisors, l'únic que va bé és el -2):

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 6 & 7 & -9 & 2 \\
 & & & & \\
-2 & & -12 & 10 & -2 \\
\hline
 & 6 & -5 & 1 & 0
\end{array}$$

Cap dels divisors permet factoritzar per Ruffini el polinomi $6x^2 - 5x + 1$. Així, en aquest punt, la factorització és

$$5x(x + 2)(6x^2 - 5x + 1)$$

3. Com que el polinomi $6x^2 - 5x + 1$ és de segon grau, resoldrem l'equació corresponent (sempre farem això amb els polinomis de segon grau):

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

4. Per tant, la factorització final obtinguda és

$$5x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2).$$

Ara bé, volem tenir 30 com a coeficient de major grau (30 és el coeficient de major grau del polinomi original) i no 5 (observa que $5x \cdot x \cdot x \cdot x = 5x^4$ és el terme de major grau).

Llavors, hem de muiltiplicar per 6. D'aquesta manera, la factorització final és $6 \cdot 5x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2)$, és a dir,

$$30x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{3}\right)(x+2).$$

■

Exercici 298. Factoritzeu els polinomis següents:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

d) $15x^3 + 25x^2 - 10x$

e) $3x^3 - 3x^2 - 6x$

f) $2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 8x + 12$

g) $-x^3 + x^2 + 4x - 4$

h) $5x^4 - 30x^2 + 40$

i) $-5x^4 + 20x^2 - 20$

j) $3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x$

k) $4x^3 - x$

Solució. *a*) $(x-1)(x+2)(x-3)$, *b*) $2(x-1)(x+2)(x-3)$, *c*) $(x-1)(x^2+9)$, *d*) $15x(x-\frac{1}{3})(x+2)$, *e*) $3x(x-2)(x+1)$, *f*) $2(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+3)$, *g*) $-(x-1)(x+2)(x-2)$, *h*) $5(x-2)(x+2)(x^2-2)$ *i*) $-5(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$ (resoleu l'equació biquadrada $-5t^2 + 20t - 20 = 0$), *j*) $3(x-2)x(x-3)(x+3)$, *k*) $4x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$ ■

Exercici 299. Factoritzeu els polinomis següents:

a) $x^2 - 25$

b) $3x^4 + 9x^2$

c) $x^3 + x^2 + x$

d) $3x^3 - 20x^2 + 27x - 10$

e) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

f) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

g) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$

h) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

i) $x^3 - 3x - 2$

j) $3x^3 + 5x^2 - 2x$

k) $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48$

l) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x - 12$

m) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

n) $x^3 - 13x^2 + 55x - 75$

o) $x^3 + 2x + 3$

p) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

q) $3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$

Solució. *a*) $(x-5)(x+5)$, *b*) $3x^2(x^2+3)$, *c*) $x(x^2+x+1)$, *d*) $3(x-1)(x-5)(x-\frac{2}{3})$, *e*) $(x-1)^2(x-2)$, *f*) $(x-1)^3(x-2)$, *g*) $(x-1)^2(x-2)^2$, *h*) $(x+3)(x+2)(x-2)$, *i*) $(x-1)^2(x-2)$, *j*) $x(x+2)(x-\frac{1}{3})$, *k*) $(x-2)^2(x-3)(x+4)$, *l*) $(x+1)(x-4)(x^2-2x+3)$, *m*) $(x-2)(x-3)(x+4)$, *n*) $(x-5)^2(x-3)$, *o*) $(x+1)(x^2-x+3)$, *p*) $(x+1)(x-1)(x-2)$, *q*) $(x+1)(x-1)(3x^2-2x+3)$. ■

A.7 Equacions biquadrades

Existeix un tipus d'equacions de quart grau que es poden resoldre fàcilment. Es tracte de les ***equacions biquadrades***, del tipus

$$ax^4 + b^2 + c = 0,$$

on a, b, c són nombres reals qualssevol.

Per resoldre aquestes equacions, feim el canvi $t = x^2$, resolem l'equació de segon grau corrwsponent i desfeim el canvi. Ho veurem amb un exemple.

Exemple 137. Resoleu l'equació

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0. \tag{A.3}$$

Solució. Procedim a resoldre-la:

a) Feim el canvi de variable $t = x^2$. Per tant, l'equació A.3 es transforma en

$$2t^2 - 10t^2 + 8 = 0. \tag{A.4}$$

b) Si resolem aquesta equació usant la fórmula de segon grau (vegeu Secció A.4), tenim que les seves solucions són $t = 1$ i $t = 4$.

c) Ara *desfeim el canvi*: si $t = x^2$, llavors $x = \pm\sqrt{t}$. Per tant, les solucions de l'equació A.3 són $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ i $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

■

Exercici 300. Resoleu les equacions biquadrades següents:

a) $2x^4 - 26x^2 + 72 = 0$

b) $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$

c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

d) $-5x^4 + 25x^2 - 30 = 0$

Solució. *a*) $x = \pm 2, \pm 3$, *b*) $x = \pm 4$, *c*) no té solució, *d*) $x = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$ ■

A.8 Sistemes d'equacions lineals amb dues equacions i dues incògnites

Definició 67 (sistema d'equacions lineal de dues incògnites i dues equacions)**.** Un ***sistema d'equacions lineal de dues equacions i dues incògnites*** és un conjunt de dues equacions en les que apareixen dues incògnites diferents, i les quals s'han de verificar simultàniament.

Exemple 138. Les equacions següents

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

formen un sistema d'equacions de dues equacions i dues incògnites. Noteu que les incògnites són x i y.

Observació 28. Per diferenciar un sistema d'equacions d'una juxtaposició d'equacions soltes o de la resolució d'una equació, posarem una clau en els sistemes d'equacions. Podeu situar la clau al principi o al final del sistema d'equacions; és una qüestió estètica. Nosaltres emprarem indistintament les dues alternatives.

Definició 68 (solució d'un sistema)**.** Donat un sistema d'equacions lineals de dues equacions i dues incògnites, una ***solució*** són valors numèrics de les incògnites per als quals es satisfan les dues equacions, és a dir, si es substitueixen les incògnites pels valors numèrics indicats en la solució, les equacions es verifiquen.

Exemple 139. Una solució del sistema de l'exemple 138 és $x = 1$ i $y = 2$.

En aquesta secció mostrarem tres mètodes estàndard per trobar les solucions dels sistemes d'equacions lineals amb dues equacions i dues incògnites. Donat un sistema, podem aplicar qualsevol mètode per trobar les solucions del sistema.

Observació 29. Les solucions dels sistemes d'equacions lineals amb dues equacions i dues incògnites, d'existir, són úniques. És a dir, només hi ha màxim una solució.

A.8.1 Mètode de substitució

Algorisme 11 (mètode de substitució)**.** *El **mètode de substitució** consisteix en les passes següents:*

a) *aïllar una incògnita de qualsevol de les dues equacions.*

b) *susbtituir la incògnita a l'altra equació.*

c) *resoldre l'equació corresponent amb una variable.*

d) *susbtituir el valor resultant a l'expressió resultant de l'aïllament.*

Exemple 140. Apliquem el mètode de susbtitució a l'exemple 138.

- En primer lloc hem de triar la incògnita a aïllar. Si vos fixeu, la més bona d'aïllar és la x en la primera equació, ja que l'expressió resultant no tendrà cap fracció (ja que el coeficient de la variable x és 1).

  Per tant,

  $$x = 5 - 2y.$$

- Si substituïm aquesta expressió per a cada ocurrència de x en la segona equació, obtenim l'equació:

  $$4\,(5 - 2y) - 3y = -2,$$

  la qual té solució $y = 2$ (vegeu Secció A.2):

  $$\begin{aligned} 20 - 8y - 3y &= -2 \\ -11y &= -22 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

- Substituint aquest valor:

  $$\begin{aligned} x &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - 4 \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Per tant, la solució del sistema és: $x = 1$ i $y = 2$.

Observació 30. Per comprovar si heu calculat correctament la solució del sistema, en principi, hauríem de substituir els valors de x i y en les equacions originals. Ara bé, existeix un mètode alternatiu i un poc més ràpid: substituir el valor de la primera variable coneguda a les dues equacions.

En el nostre exemple (exemple 140), després de saber que $y = 2$, substituiríem aquest valor a les dues equacions. De fet, com que $x = 5 - 2y$ prové de la primera equació i és poc probable que ens haguem equivocat en l'aïllament de la x, podem usar aquesta expressió:

$$\begin{aligned} & x = 5 - 2y \Rightarrow x = 5 - 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 5 - 4 = 1 \\ & 4x - 3 \cdot 2 = -2 \Rightarrow x = \tfrac{-2+6}{4} = 1 \end{aligned}$$

A.8.2 Mètode d'igualació

ALGORISME 12 (mètode d'igualació). *El **mètode d'igualació** consisteix en les passes següents:*

a) *triar una incògnita i aïllar-la d'ambdues equacions.*

b) *igualar les expressions resultats.*

c) *resoldre l'equació corresponent amb una variable.*

d) *susbtituir el valor resultant a qualsevol de les expressions resultants de l'aïllament.*

EXEMPLE 141. Apliquem el mètode d'igualació a l'exemple 138.

- En primer lloc hem de triar la incògnita a aïllar. Triem x. Per tant,

$$\begin{cases} x & = 5 - 2y \\ x & = \frac{-2+3y}{4} \end{cases}$$

- Igualem les dues expressions resultants i resolem l'equació corresponent:

$$5 - 2y = \frac{-2+3y}{4},$$

la qual té solució $y = 2$ (vegeu Secció A.2):

$$\begin{aligned} 5 - 2y = & \ \tfrac{-2+3y}{4}, \\ 20 - 8y = & \ -2 + 3y \\ -8y - 3y & = -2 - 20 \\ -11y & = -22 \\ y & = 2. \end{aligned}$$

- Substituint aquest valor:

  – A la primera expressió:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - 4 \\ &= 1. \end{aligned}$$

  – A la segona expressió:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 + 3 \cdot 2}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Notem que el principi bastaria substituir a una expressió, però per la poca feina que suposa de més podem estar més segurs que no hem comès cap error.

- Per tant, la solució del sistema és: $x = 1$ i $y = 2$.

A.8.3 Mètode de reducció

ALGORISME 13 (mètode de reducció). *El **mètode de reducció** consisteix en les passes següents:*

a) *obtenir sistemes equivalents a l'original: multiplicant les equacions per nombre qualssevol diferents de zero; un sistema és **equivalent** a un altre si té les mateixes solucions.*

b) *aconseguir que hi hagi una variable amb coeficients oposats.*

c) *sumar les equacions i resoldre l'equació corresponent amb una variable.*

d) *susbtituir el valor resultant a qualsevol de les equacions originals.*

EXEMPLE 142. Apliquem el mètode de reducció a l'exemple 138.

- En primer lloc hem de triar la incògnita a "eliminar": per exemple la x. En aquest cas, podem multiplicar per -4 la primera equació,

$$\begin{cases} -4x - 8y &= -20 \\ \;\;\,4x - 3y &= -2 \end{cases}$$

- Ja tenim els coeficient de la x oposats. Per tant, simplement sumem les equacions:

$$-11y = -22,$$

  per la qual cosa, $y = 2$.

- Ara substituïm aquest valor a qualsevol equació. Posats a triar, millor la primera, ja que el coeficient de la x és 1:

$$x + 2 \cdot 2 = 5,$$

  pel que $x = 1$.

- Per tant, la solució del sistema és: $x = 1$ i $y = 2$.

L'elecció de la variable és arbitrària. En el cas d'haver triar la y, podríem haver multiplicat per 3 la primera equació i per 2 la segona.

A.8.4 Algunes reflexions de l'aplicació dels mètodes

Encara que tots els mètodes per resoldre sistemes d'equacions són *igual de bons*, no tots són igual de ràpids per resoldre determinants sistemes:

a) Si en el sistema existeix una variable amb un coeficient igual a ± 1, podeu aplicar el mètode de substitució d'una manera mitjanament ràpida. Per exemple, en el sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y &= 10 \\ 6x - y &= 17 \end{cases}$$

podríem aplicar el mètode de susbtitució aïllant la variable y de la segona equació. Si aïllassim la x o bé la y en l'altra equació, l'equació resultant tendria denominadors; la qual cosa faria el càlcul farragós.

b) Si hi ha una variable que tengui coeficients ± 1 en les dues equacions, llavors aplicar el mètode d'igualació és mitjanament ràpid. En cas contrari, ens trobaríem en el mateix cas desfavorable comentat anteriorment: resoldre equacions amb denominadors.

c) El mètode de reducció és suficientment ràpid en tots els casos.

Exercici 301. Resoleu els sistemes d'equacions següents:

a)
$$\begin{cases} 3x - y &= 8 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x - y &= 5 \\ 2x - y &= 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ -3x + 4y &= 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x + 2y &= 8 \\ 8x + 5y &= 22 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ \frac{x}{2} + y &= 2 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x - 2(y-1) &= 0 \\ x + y &= 7 \end{cases}$$

Solució. *a*) $x = 2, y = -2$, *b*) $x = 1, y = 0$, *c*) $x = 1, y = 1$, *d*) $x = -1, y = 6$, *e*) $x = 2, y = 1$, *f*) $x = 4, y = 3$. ■

A.9 Valors de les raons trigonomètriques dels angles més usuals

Per calcular els productes escalars o l'angle que formen plans i rectes, convé tenir present la taula següent (Taula A.1).

	0 rad	$\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad	$\pi/3$ rad	$\pi/2$ rad	π rad	$3\pi/2$ rad
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$

Taula A.1: Valors dels sinus, cosinus i tangent pels angles més usuals

Encara que qualsevol d'aquests valors es pot calcular amb una calculadora científica.

B

Exàmens proposats

En aquest *capítol* trobareu un seguit d'exàmens de prova a forma de recopilació.

Examen 1

1. Discutiu aquest sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x+my+z & =3 \\ -x+y-mz & =0 \\ mx-y+z & =-1 \end{array}\right\}$$

2. Una tenda ven tres classes de patinets. El primer patinet té un preu de 40 €, el segon de 50 € i el darrer de 80 €. En un mes s'han venut 1.000 patinets en total, amb una recaptació de 52.000 €. També sabem que la suma de la quantitat venuda de patinets del primer i tercer tipus és una quarta part de la quantitat venuda del segon tipus de patinet. Determineu la quantitat de cada tipus de patinet que s'han venut en la tenda esmentada.

Examen 2

1. Trobau les arrels del polinomi $6x^4-12x^3-6x^2+24x-12$

2. Calculeu $(A+B)^t$ i $(A\cdot B)^{-1}$ on $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Examen 3

1. Trobeu per a quins valors de m la matriu A és regular, on

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Trobau les matrius M de la forma $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & m & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de manera que $M^2 + 2M = T$,

   on $T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. Tenim dues matrius A i B tals que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Calculeu la inversa de $A \cdot B$.

Examen 4

1. Determineu a i b de manera que es verifiqui que $A^2 = A^t$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

2. És cert que el producte de dues matrius és commutatiu? Justifiqueu la resposta

3. Esbrineu per a quins valors de t la matriu B admet inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ t & 0 & 6 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Donat el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 1 \\ 2x + \lambda y - z &= 2 \\ 4x - y + 6z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

   a) Classifiqueu el sistema per a tots els valors de λ

   b) Resoleu-lo en els casos en què sigui possible

5. Un pagès vol comprar tres tipus d'arbres: ametllers a 7 € cadascun, garrofers a 9 € cadascun i oliveres a 12 € cadascuna. Es sap que en total compra 28 arbres, que el cost total de la compra és de 287 € i que el nombre d'oliveres que compra és el triple del d'ametllers. Calculeu quants d'arbres de cada tipus ha de comprar el pagès.

C

Exercicis dels exàmens oficials

Exercicis dels exàmens oficials[1] des de l'any 2010 classificats per blocs.

C.1 Àlgebra lineal

EXERCICI 302 (2010.a). Donada una matriu quadrada A, com es diu una matriu quadrada B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, on I és la matriu identitat? Quina condició ha de satisfer la matriu quadrada A perquè existeixi l'anterior matriu B?

EXERCICI 303 (2010.b). Donat el següent sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y - z = -2 \\ 2x + \lambda y = 0 \\ x - 2y + z = 3 \end{array}\right\}$$

Es demana:

a) Discutir el seu caràcter per a tots els valors de $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Resoldre'l en els casos en què sigui possible

EXERCICI 304 (2011.a). Siguin A i B dues matrius quadrades d'ordre $2 \cdot 2$, tals que $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si el determinant de la matriu A val 4, $\det(A) = 4$, quant val $\det(B)$ el determinant de la matriu B?

Donada la matriu $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ escriu la seva matriu transposada C^t.

Escriu una matriu X, que no sigui la identitat, de tal manera que $X^t = X$.

[1] https://estudis.uib.cat/grau/acces/mes_grans25/models_examen/

EXERCICI 305 (2011.b). Una nació importa 21.000 vehicles mensuals de les marques X, Y, Z, al preu de 1,2; 1,5 i 2 milions d'euros respectivament. Si el total de la importació ascendeix a 33.200 milions, i de la marca X s'importa el 40% de la suma de les altres dues marques, quants vehicles de cada marca entren en el país?

EXERCICI 306 (2012.a, 2023.a). Determinau els valors de k per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ admet inversa

EXERCICI 307 (2012.b, 2023.b). Determinau les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICI 308 (2013.a). Determinau els valors de t per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ admet inversa

EXERCICI 309 (2013.b). Determinau les solucions del sistema d'equacions indicant si el sistema és o no compatible determinat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICI 310 (2014.a). Determinau els valors de a i b de manera que la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ verifiqui que $A^2 = A$.

EXERCICI 311 (2014.b). Calculau les arrels del polinomi $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$. Expressau la descomposició factorial del polinomi anterior.

EXERCICI 312 (2015.a). Determinau els valors de a per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ no admet inversa

EXERCICI 313 (2015.b). Determinau si el sistema $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és o no compatible (determinat o no) quan $a = 1$ i $a = -2$.

EXERCICI 314 (2016.a). Els sous del pare, la mare i un fill sumats donen 16.250 euros. La mare guanya el doble que el fill. El pare guanya 2/3 del que guanya la mare. Utilitzant un sistema d'equacions que s'ajusti al problema i resolent-ho, determinau quant guanya cadascun d'ells

Exercici 315 (2016.b). Determinau el conjunt de valors de x per als quals la matriu següent

$$\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

no admet inversa. Per a quins valors de x la matriu té rang 3?

Exercici 316 (2017.a). Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculau $(A+B)^t$ i $(A \cdot B)^{-1}$. Nota A^t vol dir la transposada de la matriu A.

Exercici 317 (2017.b). Resoleu el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x \\ 2x - y - 3z = 4x - 2 \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases}$$

Exercici 318 (2018). Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Calculau $A \cdot B$

b) Calculau A^{-1} i B^{-1}

c) Calculau $(A \cdot B)^{-1}$

d) Calculau $A^{-1} \cdot B^{-1}$

e) Quina relació hi ha entre $(A \cdot B)^{-1}$ i $B^{-1} \cdot A^{-1}$?

Exercici 319 (2019.a). Determinau les matrius $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que satisfan l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 320 (2019.b). *a*) Donat el següent sistema d'equacions $\begin{cases} x + 3y - z & = 0 \\ 2x + ay & = 0 \\ x - 2y + z & = 3, \end{cases}$ discutiu el seu caràcter en funció del paràmetre real a. *b*) Resoleu-lo quan $a = 2$.

Exercici 321 (2020.a). Siguin A i B dues matrius quadrades d'ordre $2 \cdot 2$, tals que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Si $det(A) = 4$, quan val $det(B)$?. Donada la matriu $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, escriu la seva matriu transposada C^t. Escriu una matriu X, que no sigui la identitat, de tal manera que $X^t = X$.

Nota: $det(A)$ indica el determinant de la matriu A i X^t indica la matriu transposada de la matriu X.

Exercici 322 (2020.b). Un agricultor té repartides 10 hectàrees de terreny en guaret, cultiu d'ordi i cultiu de blat. La superfície dedicada a l'ordi ocupa 2 hectàrees més que la dedicada a l'ordi ocupa 2 hectàrees més que la dedicada al blat, mentre que en guaret té 6 hectàrees menys que la superfície total dedicada al cultiu de l'ordi i del blat. Quantes hectàrees té dedicades a cadascun dels cultius i quantes estan dedicades al guaret?

Exercici 323 (2021.a). Siguin A i B dues matrius, inverses l'una de l'altra. Si $det(A) = 10$, què val $det(B)$? Per a quins valors de a la matriu $\begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ no té inversa?

Exercici 324 (2021.b). Demostrau que el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + y + az &= 6 \end{aligned}\right\}$$

té solució única si $a \neq 8$. Calculau les solucions quan $a = 8$.

Exercici 325 (2022.a). Els sous del pare, la mare i un fill sumats donen 3.250 euros. La mare guanya el doble que el fill. El pare guanya $2/3$ del que guanya la mare. Quant guanya cadascun?

Exercici 326 (2022.b). Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C.2 Geometria

Exercici 327 (2010, 2023). Una recta r passa pel punt $(3, 4, 7)$ i és paral·lela a la recta s d'equació

$$s\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}$$

Es demana:

a) Determinar les equacions contínues i paramètriques de la recta r

b) Determinar l'equació d'un pla π que és perpendicular a r i passa pel punt $(1, 1, 1)$

Exercici 328 (2011). Calculau l'equació implícita del pla que passa pel punt $P = (2, 3, 5)$ i és paral·lel als vectors $\vec{u} = (-1, -2, -3)$ i $\vec{v} = (1, 3, 5)$. Calculau n perquè el punt $A = (1, n, 6)$ pertanyi al pla trobat

Determinau l'equació contínua de la recta que té per vector director el vector normal del pla trobat i que passa pel punt $P = (2, 3, 5)$.

Exercici 329 (2012.a). Calculau el valor del pendent de la recta $y = mx + 3$ sabent que passa pel punt d'intersecció de les rectes $y = 2x + 1$ i $y = x + 5$

Exercici 330 (2012.b). Determinau l'equació del pla que passa pels punts $A = (2,3,4)$, $B = (7,2,5)$ i $C = (2,3,1)$.

Exercici 331 (2013). Els punts $A = (0,0)$, $B = (2,1)$ i $C = (3,3)$ són vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram de vèrtexs $ABCD$. Trobeu les coordenades del vèrtex que falta, les equacions de les rectes que passen per les diagonals i les mesures d'aquestes diagonals.

Exercici 332 (2014.a). Determinau el pla π que és perpendicular al vector $\vec{v} = (4,-2,2)$ i que passa pel punt $A = (1,2,4)$.

Exercici 333 (2014.b). Donat el punt $D = (1,1,3)$ calculau el vector $\vec{AD}$, on $A = (1,2,4)$. Està el vector $\vec{AD}$ dins el pla π, determinat a l'apartat anterior?

Exercici 334 (2015.a). Determinau el punt d'intersecció de la recta $\begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 4+6\lambda \end{cases}$ amb el pla $x - 3y + 5z + 11 = 0$

Exercici 335 (2015.b). Calculau b en el punt $(5,-3,b)$ perquè sigui un punt del pla $x - 3y + 5z + 11 = 0$.

Exercici 336 (2016). *a*) Determinau la intersecció de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi \equiv x - y + z = 7$. *b*) Determinau l'equació del pla que és paral·lel al pla π i passa pel punt d'intersecció obtingut a l'apartat anterior

Exercici 337 (2017). *a*) Donat el pla $\pi \equiv x + y + z = 4$, determinau la recta r que passa pel punt $P = (1,2,4)$ i és perpendicular a π. *b*) Calculau el punt d'intersecció de r amb π.

Exercici 338 (2018.a). Calculau unes equacions paramètriques del pla d'equació implícita $\pi \equiv x + y + z = 3$, i indicau un dels seus punts i dos vectors directors independents.

Exercici 339 (2018.b). Donada la recta d'equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -2-3\lambda \end{cases}$$

Està la recta continguda en el pla d'equació $x + y + z = 3$?

Exercici 340 (2019). Se sap que un pla π és perpendicular al vector $\vec{v} = (2,3,-1)$ i que passa pel punt $(2,-1,3)$. Aleshores:

a) Determinau l'equació del pla π

b) Determinau l'equació de la recta que és perpendicular al pla π i passa pel punt $P = (3,0,-2)$.

Exercici 341 (2020.a). Calculeu l'equació implícita del pla que passa pel punt $P = (2,3,5)$ i és paral·lel als vectors $\vec{u} = (1,2,3)$ i $\vec{v} = (-1,-3,-5)$. Calculeu n per a què el punt $A = (n,3,6)$ pertanyi al pla trobat.

Determinau l'equació contínua de la recta que té per vector director el vector normal del pla trobat i que passa pel punt $P = (2,3,5)$.

Exercici 342 (2021). Donat el punt $P = (2, -1, 3)$, calculau les equacions dels plans següents:

a) Paral·lel al pla que té per equació $2x + 3y - z + 4 = 0$ i conté P

b) Perpendicular a la recta $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+2}{-1}$ i conté P

Exercici 343 (2022.a). Calculau l'equació del pla perpendicular al vector que uneix els punts $P = (2, -1, 3)$ i $Q = (-4, 2, 2)$ i que passa pel seu punt mitjà.

Exercici 344 (2022.b). Determinau les equacions implícites de la recta que és paral·lela al vector que uneix els punts $P = (2, -1, 3)$ i $Q = (-4, 2, 2)$ i que passa pel punt $R = (-1, 1, 1)$.

C.3 Probabilitat

Exercici 345 (2010, 2023). Una enquesta ha revelat que el 23% dels habitants de Barcelona llegeix *La Vanguardia*, el 14% llegeix *El País* i el 6% llegeix ambdós diaris.

a) Identificau els successos adequats i expressau les dades donades com a probabilitats relacionades amb aquests successos [2023]

b) Quina probabilitat hi ha que un individu, triat a l'atzar i que duu *El País* sota l'aixella, sigui lector de *La Vanguardia*? [2010, 2023]

c) I, si duu *La Vanguardia*, quina és la probabilitat que llegeixi *El País*? [2010, 2023]

d) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats anteriors en percentatge de lectors. [2010]

Exercici 346 (2011). En una determinada fàbrica d'automòbils, el 6% dels cotxes tenen defectes en el motor, el 8% tenen defectes en la carrosseria i el 2% té defectes en ambdós [components]. Sigui A el succés "el cotxe té defecte en el motor" i B el succés "el cotxe té defecte en la carrosseria". Es demana:

a) Expressar les dades proporcionades a l'enunciat com a probabilitats relacionades amb els successos A i B.

b) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui almenys un defecte?

c) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós?

d) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats *b*) i *c*) en percentatge de cotxes

Exercici 347 (2012). Donats dos successos A i B, se sap que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,3$ i $p(A \cap B) = 0,1$.

a) Calculau $p(A \mid B)$ i $p(A \mid A \cap B)$

b) Calculau $p(A \cap B \mid A \cup B)$ i $p(A \mid A \cup B)$

Exercici 348 (2013). Donades tres urnes, $U1$, $U2$ i $U3$, amb la següent composició de bolles blanques i negres:

U1: 3 blanques i 2 negres; U2: 4 blanques i 2 negres; U3: 1 blanca i 3 negres, [Es tria de forma aleatòria una urna i se n'extreu una bolla]

a) Calculeu la probabilitat d'extreure una bolla negra

b) Determinau la probabilitat que una bolla negra que s'ha extret procedeixi de la segona urna

Exercici 349 (2014). Una caixa conté 15 boles negres i 10 boles blanques. Es demana:

a) Si en triam una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui negra? I que sigui blanca?

b) Si extraiem dues boles, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que ambdues siguin blanques?

c) Si extraiem dues boles, sense reemplaçament, calculau la probabilitat que la primera sigui blanca i la segona negra

Exercici 350 (2015). Dels successos A i B se sap que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ i $p(A \cup B) = 0,7$. *a*) Calculau $p(A \cap B)$ i $p(A^c \cap B^c)$. *b*) Són els successos A i B independents?. Nota: per A^c denotam el succés complementari de A.

Exercici 351 (2016.a). En una aula de dibuix hi ha 40 cadires, 30 amb respatller i 10 sense. Entre les cadires sense respatller n'hi ha 3 de noves, i entre les cadires amb respatller n'hi ha 7 de noves. Triada a l'atzar una cadira, quina és la probabilitat qie sigui nova?

Exercici 352 (2016.b). En un experiment se sap que $p(B) = 0,3$ i $p(A \mid B) = 0,1$. Determinau $p(A \cap B)$.

Exercici 353 (2017). Un CEO d'una empresa balear té una reunió a Madrid i ha de triar de forma equiprobable entre dues companyies aèries. La probabilitat d'arribar amb retard amb la companyia A és de $0,25$ i amb la companyia B és de $0,10$.

a) Triada a l'atzar una companyia, quina és la probabilitat que el CEO arribi amb retard a la reunió?

b) Si el CEO ha arribat tard a la reunió, quina és la probabilitat que hagi utilitzat la companyia A?

Exercici 354 (2018). D'una baralla espanyola[2] de 48 cartes es considera l'experiment aleatori "extreure una carta". Calculau la probabilitat dels successos següents:

[2]Una baralla espanyola de 48 cartes està formada per quatre colls de 12 cartes cada coll: oros, bastos, espases i copes. Les cartes dins de cada coll van numerades de l'1 al 12. Una figura és una carta marcada amb un 10, 11 o un 12. Un as és una carta marcada amb un 1.

a) Treure una carta que sigui un nombre primer

b) Que la carta que extraiem no sigui un as

c) Que sigui una figura d'espases

d) Treure una carta de copes

e) Treure una carta que sigui una figura i que no sigui de copes

Exercici 355 (2019). El 70% dels clients d'una companyia d'assegurances d'automòbils té més de 25 anys. Un 5% dels clients d'aquest grup té algun accident al llarg de l'any. En el cas de clients més joves de 25 anys, aquest percentatge és del 20%.

a) Si s'escull un assegurat a l'atzar, calculau la probabilitat que tingui un accident aquest any

b) Si una persona va tenir un accident, calculau la probabilitat que sigui més jove de 25 anys.

Exercici 356 (2020). En una determinada fàbrica d'automòbils, el 6% dels cotxes tenen defectes al motor, el 8% tenen defectes a la carroseria i el 2% tenen defectes en ambdós. Sigui A el succés 'el cotxe té defecte al motor' i B el succés 'el cotxe té defecte a la carroseria'. Es demana:

a) Expressau les dades proporcionades a l'enunciat com a probabilitats relacionades amb els successos A i B

b) Quina és la probabilitat que un cotxe tengui almenys un defecte?

c) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós?

d) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats *b*) i *c*) en percentatge de cotxes.

Exercici 357 (2021). En una cada hi ha tres clauers, A, B i C. El primer té 5 claus; el segon, 7, i, el tercer, 8, de les quals només una de cada un obri la porta del rebost. Es tria a l'atzar un clauer i, d'aquest, una clau per intentar obrir el rebost. Feu un diagrama en arbre que representi les dades i probabilitats del problema

a) Quina serà la probabilitat que s'encerti la clau?

b) Quina serà la probabilitat que no s'encerti la clau?

c) Quina serà la probabilitat que el clauer triat sigui el tercer i la clau no obri?

d) I si la clau triada és la correcta, quina serà la probabilitat que pertanyi al primer clauer, A?

Exercici 358 (2022). Es disposa d'una moneda amb cara i creu, completament equilibrada i que no presenta cap problema. Tres amics, Pep, Tomeu i Cristòfol, es disposen a llançar la moneda per aquest ordre. Quan un treu cara, s'interromp el joc.

a) Quina és la probabilitat que Cristòfol llanci la moneda i tregui cara?

b) Calculau les probabilitats que Pep i Tomeu en llançar la moneda treguin cara.

c) Quina és la probabilitat que Tomeu llanci la moneda i tregui creu?

Continguts aliens

Els continguts següents no són propis; els autors corresponents en retenen tots els drets. De tota manera, les obres respectives es distribueixen sota una llicència prou permisiva, la qual permet la inclusió en aquesta obra sense demanar permís als autors explícitament. Específicament, les obres emprades estan o bé alliberades sota domini públic o bé alliberades sota alguna versió de la llicència Creative Commons Reconeixement (CC-BY).

- Els exercicis 192, 193, 194, 211, 220, 221, 232, 222, 223, 282, 283, 284 i 286 i els exemples 106 i 114 estan extrets del curs *Curs Orientació a la Universitat* impartit per Javier Sánchez [9].
- Els exercicis 287 i 288 estan inspirats en els exercicis 10 i 12 dels *Problemas de probabilidad* del curs *Curs Orientació a la Universitat* impartit per Javier Sánchez [9].
- La figura 5.5 correspon al fitxer *Parallellopipedum.png*[3] el qual està extret de la Wikipedia. El fitxer està alliberat al domini públic. 2007. L'autor és Gebruker Svdmolen.
- Les figures 6.1 i 7.2 són obres derivades del fitxer *Set operations illustrated with Venn diagrams*[4] de n'Uwe Ziegenhagen. 2010. L'obra original es distribueix sota llicència Creative Commons Reconeixement 2.5 (CC-BY 2.5).
- Les figures 6.2 i 7.3 són obres derivades de *A Venn diagram with PDF blending*[5]

[3] https://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Parallellopipedum.png

[4] http://www.texample.net/tikz/examples/set-operations-illustrated-with-venn-diagrams/

[5] http://www.texample.net/tikz/examples/venn/

de n'Stefan Kottwitz. 2015. L'obra original es distribueix sota llicència Creative Commons Reconeixement 2.5 (CC-BY 2.5).

- La figura 7.1 és una obra derivada de *Probability tree*[6] d'en Kjell Magne Fauske. 2006. L'obra original es distribueix sota llicència Creative Commons Reconeixement 2.5 (CC-BY 2.5).

[6] http://www.texample.net/tikz/examples/probability-tree/

Bibliografia

[1] María E. Ballvé, Ana M. Porto, Miguel Delgado, Teresa Ulecia, *Problemas de Matemáticas Especiales*. Sanz y Torres, Madrid, 2a edició, 2004.

[2] Miguel de Guzmán, *Selectividad. Matemáticas I. Pruebas de 1995*. Anaya, Madrid, 1996.

[3] Angélica Escoredo, María Dolores Gómez, José Lorenzo, Pedro Machín, Carlos Pérez, José del Río, Domingo Sánchez, *Matemàtiques II 2 Batxillerat*. Edicions Voramar, Santillana, València, 2009.

[4] Alícia Espuig Bermell *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior. Matemàtiques*. 2009. Aquest material es distribueix sota llicència Reconeixement NoComercial CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-NC-SA 3.0)

[5] Agustín Estévez Andreu, Juan Enciso Pizarro, *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Schaum, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

[6] Francisco Javier González Ortiz, *Proyecto MaTEX* (versió 1.00). 2004. Disponible en línia (accedit el novembre de 2014).

[7] Pierre-Simon de Laplace *Ensaño filosófico sobre las posibilidades* Altaya. 1995

[8] Francisco F. López Ruiz, Irene Laiz Alonso, Alazne Abóitiz Echeverría, Begoña Tejedor Álvarez, Alejandro López Ruiz i Alfredo Izquierdo González *Vídeo 6.4: Producto vectorial - Regla del sacacorchos* https://youtu.be/EgSqJw6aghA 2021

[9] Javier Sánchez, *Curs d'Orientació a la Universitat (COU)*. Fotocòpies amb exercicis distribuides per l'autor i notes manuscrites de Xavier Bordoy. Palma, 1996. No publicat.

[10] Universitat de les Illes Balears, *Accés per a més grans de 25 anys*. `http://estudis.uib.cat/grau/acces/mes_grans25/`.

[11] Ángel Vegas Pérez, Manuel López Cachero, *Elementos de matemáticas para economistas 1*. Ediciones Pirámide, Madrid, 2a edició, 1982.

Índex de figures

Índex de taules

Índex de resultats

Glossari