# Apunts de Matemàtiques per a l'Accés a la UIB per a majors de 25 anys

Teoria i exercicis per a la preparació de les "Proves d'accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys i menors de 40 anys" de l'assignatura de Matemàtiques

Xisco Sebastià

Xavier Bordoy

Col · laboradors del projecte *Apunts per a l'accés a la UIB per a majors de 25 anys*

Podeu llegir la versió digital escanejant aquest codi QR

## Quant a l'autor

Xavier Bordoy
Professor de Matemàtiques
CEPA Camp Rodó (Palma, Illes Balears)
Correu electrònic: somenxavier@posteo.net
Web: 101problemes.net

## Drets d'autor



Personalment consider que és un honor que useu, copieu o distribuïu aquesta obra o alguns fragments d'aquesta pels fins que considereu oportuns. M'agradaria que m'ho comunicassiu si així ho féssiu i, en aquest cas, estaria particularment orgullós d'haver aportat el meu gra d'arena per fer un material que altres persones consideren útil.

## Continguts aliens

Els següents continguts no són propis i, per tant, es distribueixen amb les seves corresponents llicències i autories:

- Els exercicis 109, 114, 115, 116, 117, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 12 i 14 s'han extret del llibre *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior. Matemàtiques* de n'Alícia Espuig Bermell [4]. El material es distribueix sota llicència Reconeixement NoComercial CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-NC-SA 3.0).
- Els exercicis 244, 245, 246, 247, 248, 8, 9, 16, 17 i 18 i l'exemple 12 estan extrets de *Apunts de Curs Orientació a la Universitat* de Javier Sánchez [7].

[1] http://git.somenxavier.xyz/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys

- L'exercici 249 està extret de *Problemas de Matemáticas Especiales* de María Ballvé *et al.* [1].
- La figura 6.6 correspon al fitxer *Parallellopipedum.png*[2] el qual està extret de la Wikipedia. Alliberat al domini públic. 2007 Gebruker Svdmolen.
- La figura 6.10 és una obra derivada del fitxer de Geogebra *Plane with normal vector*[3] de n'Øystein Nordvik i en Stord Haugesund de la University College. 2012. El material original es distribueix sota llicència Reconeixement CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-SA 3.0).
- Les figures 1.1 i 1.4 són obres derivades del fitxer *Set operations illustrated with Venn diagrams*[4] de n'Uwe Ziegenhagen. 2010. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).
- Les figures 1.2 i 1.5 són obres derivades de *A Venn diagram with PDF blending*[5] de n'Stefan Kottwitz. 2015. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).
- La figura 1.3 és una obra derivada de *Probability tree*[6] d'en Kjell Magne Fauske. 2006. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).
- Els exercicis 255, 256 i 257 estan extrets del "Proyecto MaTEX-1-ESO" (exercicis 20 al 29) de Francisco Javier González Ortiz. 2004. L'obra original té tots els drets reservats.

L'ús d'aquests materials es realitza acollint-se als termes de les corresponents llicències i al dret de cita i ressenya per a fins docents amparat per l'article 32 de la Llei de Propietat Intel · lectual de la legislació espanyola — Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. Entrada 8930 del BOE 97, de 22 d'abril de 1996.

## Informació del document

Mathematics Subject Classification (2010): 97-01, 97A10

La versió d'aquest document és la 2.5.0-pre. Aquest document ha estat generat, el 26 de setembre de 2020 a les 17:28, usant LaTeX, LuaTeX, Geogebra i TikZ sota un entorn GNU/Linux (Artix Linux). La revisió d'aquest document és la número 229. El conjunt de les versions s'administra amb el git. La referència d'aquesta versió és la:

000841f0e84e95dcad99eceda0b3110b32cd009e

El document ha estat mecanografiat. Encara que s'hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-nos pel canal que considereu més oportú:

[2]https://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Parallellopipedum.png
[3]http://tube.geogebra.org/material/show/id/21240
[4]http://www.texample.net/tikz/examples/set-operations-illustrated-with-venn-diagrams/
[5]http://www.texample.net/tikz/examples/venn/
[6]http://www.texample.net/tikz/examples/probability-tree/

- Obrint una incidència a la web del codi font: git.somenxavier.xyz/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys/issues
- Enviant un missatge de correu electrònic a somenxavier@gmail.com

D'altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per a millorar-la, us agraïríem que ens ho communiquéssiu. Si el canvi fos del nostre gust, l'incorporaríem a l'obra original en els mateixos termes de la llicència.

## Història del document

L'autoria de la versió inicial d'aquests apunts correspon a en Xisco Sebastià, que els emprava al CEPA Llevant.

El curs 2013-2014 vaig conèixer la seva existència a través d'una alumna de Preparació de les proves d'accés a la UIB del CEPA Sud, on donava classe de Matemàtiques, i els vaig emprar com a llibre de text de classe.

A finals de 2014, en Xisco Sebastià, a qui coneixia amb anterioritat, va alliberar molt amablement els apunts sota una llicència Creative Commons Reconeixement 4.0, després d'una conversa telefònica.

Amb posterioritat a aquest fet, vaig crear un repositori de git per desar aquests apunts i, paulatinament, he anat introduïnt el que crec que són millores[7].

Segurament existeixen, almenys, dues versions paral · leles: la que mantenc jo i la d'en Xisco Sebastià.

[7] Originàriament el repositori estava allotjat a github (https://github.com/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys), però l'any 2019 els vaig traslladar a un servidor propi (http://git.somenxavier.xyz/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys/).

# Índex

# Índex de figures

# Índex de taules

# Índex de resultats

# Prefaci

Aquest text pretén ser un manual per a la preparació de la prova de Matemàtiques d'Accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys de l'assignatura de Matemàtiques.

Els continguts d'aquest manual només abarquen tres de les quatre parts de les quals consta el temari. El motiu principal d'aquest fet és que, encara que el manual les tengués, no es tendria temps material de veure-les a classe amb els set mesos d'un curs de preparació a la UIB de qualsevol Centre d'Educació de Persones Adultes (d'octubre a abril). S'ha optat per deixar de banda el bloc d'Anàlisi, que és el que requereix més coneixements previs per entendre'l.

S'ha procurat que l'estil del manual sigui el més proper a l'alumne, sense deixar de banda, però, els aspectes més formals.

Es suposa un coneixement equivalent a l'Educació Secundària Obligatòria (ESO) per llegir fluïdament el text: operacions amb els diferents tipus de nombres, resolució d'equacions de primer i segon grau, factorització de polinomis, etc. (vegeu l'Apèndix A). El nivell dels continguts del manual es correspondria, essencialment, amb un segon de batxillerat excepte la part de Geometria al pla i Probabilitat que equivaldria a un nivell d'ESO.

Palma, 26 de setembre de 2020.

# Part I

# Probabilitat

# 1

# Experiències aleatòries

En aquest capítol ens ocuparem de les definicions, més o menys formals, que permeten definir el concepte de probabilitat.

Definició 1 (experiència). Una *experiència* o *experiment* és qualsevol procediment, pràctica o simplement aconteixement en el que les regles de joc, és a dir, com s'ha de realitzar aquest, estan clares des d'un principi i en el que es mesura cert resultat final.

En principi existeixen variables rellevants a l'experiment i altres de negligibles.

Exemple 1. Exemples d'experiments serien:

*a*) Llançar una moneda i mirar-ne el resultat

En aquest experiment les variables rellevants serien, per exemple, la distribució de pesos de les cares, la forma de la moneda i el mètode de tir.

*b*) Accelerar un vehicle fins a una velocitat concreta i després frenar bruscament i mirar la distància recorreguda

En aquest experiment les variables rellevants seiren la velocitat just abans de frenar, el pes del vehicle, la pendent del terreny i la força de fregament.

*c*) Comptar la freqüència absoluta dels colors dels cotxes en un aparcament per a determinar el color més freqüent.

En aquest darrer experiment, les variables rellevants serien, per exemple, el nombre de cotxes de cada tipus de color a l'aparcament.

**Definició 2 (experiment determinista).** Un *experiment determinista* és aquell experiment la repetició del qual produeix idèntics resultats, és a dir, per al mateix valor de les variables rellevants, s'obté el mateix resultat[1]. Per tant, el resultat de l'experiment es pot conèixer abans de dur-lo a terme una vegada estudiat aquest prèviament.

**Definició 3 (experiment aleatori).** Un *experiment aleatori* és aquell experiment que es caracteritza per la imprevisibilitat del seu desenllaç, a pesar de què s'executi sempre amb les mateixes condicions. En general, depèn de l'atzar.

Els experiments aleatoris tenen les característiques següents:

- En la realització de cada repetició, el seu resultat pot diferir
- Si repetim les proves calculant les seves freqüències relatives[2] de cadascun dels resultats possibles, llavors aquestes freqüències tendeixen a estabilitzar-se cap a un nombre fix, que és el que anomenarem *probabilitat*

**Exemple 2.** En l'exemple anterior, exemple 1, el llançament de la moneda seria un experiment aleatori, l'experiment de la frenada del vehicle seria un experiment determinista i l'experiment dels colors dels vehicles es consideraria un experiment aleatori.

En aquesta part ens ocuparem dels experiments aleatoris.

## 1.1 Espai mostral i esdeveniments

**Definició 4 (espai mostral).** S'anomena *espai mostral* al conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori. Es sol designar per $E$ o per $\Omega$.

**Exemple 3.** Si llançam un dau, l'espai mostral és $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si llançam una moneda, l'espai mostral és $E = \{C, X\}$ (hem obviat que ens pugui sortir cantó).

**Exemple 4.** En l'experiment corresponent a extreure una bolla d'una urna amb tres bolles vermelles ($V$), dues de blaves ($B$) i 4 de negres ($N$), l'espai mostral és $E = \{V, B, N\}$.

[1] Tècnicament, si les condicions inicials són les mateixes, les condicions finals també ho són.

[2] Recordem que la freqüència relativa no és res més que la divisió entre el nombre de vegades que apareix un resultat dividit pel nombre total de proves. És el tant per u d'aparició.

Hi ha exemples d'espais mostrals més complicats.

Exemple 5. Si llançam dues monedes l'espai mostral és

$$E = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

Recordem que la notació $(a, b)$ denota un parell ordenat. Per tant, el resultat $(C, X)$ no és el mateix que el resultat $(X, C)$. En el primer cas, voldria dir que la moneda és cara i el segona moneda ha donat creu. El segon cas és totalment el contrari.

Si no tenguéssim en compte l'ordre, és a dir, si per a nosaltres les monedes fossin indistingibles[3], llavors l'espai mostral seria

$$E = \{CC, CX, XX\}$$

De forma intuïtiva està clar que la probabilitat de $CX$ en el segon cas seria major que la probabilitat de $(C, X)$ en el primer, ja que *compta doble*. Per tant, hem d'anar molt alerta de si prenem els resultats amb ordre o no.

Exemple 6. Si llançéssim dos daus, l'espai mostral seria

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}$$

Exemple 7. En l'experiment consistent en llançar una moneda i posteriorment un dau, l'espai mostral és

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (C,1), & (C,2), & (C,3), & (C,4), & (C,5), & (C,6), \\ (X,1), & (X,2), & (X,3), & (X,4), & (X,5), & (X,6) \end{array} \right\}$$

Notem que si l'experiment consistís en tirar primer el dau i després la moneda, llavors l'espai mostral seria:

Si no s'especifica l'ordre amb el qual llancem les coses, l'ordre amb el qual escrivim els resultats no té importància, però una vegada decidit s'ha de mantenir al llarg de tot l'exercici.

Exercici 1. Escriviu l'espai mostral corresponent als experiments següents:

*a*) Un dau de quatre cares

*b*) Tres monedes

Definició 5 (esdeveniment). S'anomena *esdeveniment* (o *succés*) a qualsevol subconjunt de $E$.

[3] Ho sigui si només *comptéssim* el nombre de cares i el nombre de creus.

Exemple 8. *a*) En l'experiment aleatori del llançament d'una moneda, tenim que els seus esdeveniments són: $\{C, X\}$, $\{C\}$, $\{X\}$ i $\emptyset$. $\emptyset$ denota el *conjunt buit*, el qual no té cap element.

*b*) Els esdeveniments de l'experiment consistent en llançar un dau serien $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{1, 2\}$, ..., $\{1, 2, 3\}$, ..., $\{3, 5, 6\}$, ..., $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exercici 2. Escriviu tots els possibles esdeveniments corresponents als experiments següents:

*a*) Llançar un dau de 4 cares

*b*) Llançar dues monedes (exemple 5)

*c*) Extreure una bolla d'una urna de l'exemple 4

Exercici 3. Escriviu quatre esdeveniments corresponents als experiments:

*a*) Llançar dos daus (exemple 6)

*b*) Llançar una moneda i un dau (exemple 7)

**Proposició 1.** *En un experiment aleatori, si el seu espai mostral $E$ és finit i té $n$ elements, llavors hi ha $2^n$ possibles esdeveniments.*

Definició 6 (esdeveniment elemental). Un *esdeveniment elemental* és qualsevol esdeveniment que té un sol element. En cas contrari, quan l'esdeveniment tengui més d'un element, es diu *esdeveniment compost*.

Exemple 9. Referint-nos al llançament d'un dau de sis cares, els seus esdeveniments elementals són $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Esdeveniments compostos són, per exemple $\{2, 3, 6\}$ i $\{1, 5\}$ o el mateix $E$.

En el llançament d'una moneda, els seus esdeveniments elementals són $\{C\}$ i $\{X\}$ i els seus esdeveniments compostos són $\{C, X\}$.

Definició 7 (esdeveniment impossible). S'anomena *esdeveniment impossible* a aquell esdeveniment que mai pot ocórrer. És el conjunt buit, $\emptyset$.

Definició 8 (esdeveniment segur). S'anomena *esdeveniment segur* al que sempre es verifica. Correspon a l'espai mostral, $E$.

Exemple 10. En el llançament de dues monedes l'esdeveniment segur és

$$\{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

Exercici 4. Trobeu els esdeveniments segurs i impossibles dels exercicis exercici 2 i exercici 3.

## 1.2 Operacions amb esdeveniments

Definició 9 (unió d'esdeveniments). La *unió* de dos esdeveniments, $A$ i $B$, és aquell esdeveniment, denotat per $A \cup B$, format per cada element que hi ha en $A$ o en $B$.

Col · loquialment, la unió de dos esdeveniments és aquell esdeveniment que ocorre quan ocorre, al menys, un dels dos. De la definició és veu que $A \cup B$ és el mateix que $B \cup A$.

Gràficament, aquest concepte es pot representar mitjançant un *diagrama de Venn* (Figura 1.1a):

**Definició 10 (intersecció d'esdeveniments).** La *intersecció* de dos esdeveniments, $A$ i $B$, és aquell esdeveniment, denotat per $A \cap B$, format per aquells elements que estan simultàniament a $A$ i a $B$. Dos esdeveniments són *incompatibles* si la seva intersecció és el conjunt buit. En cas contrari, es diu que són *compatibles*.

De manera informal, l'esdeveniment intersecció de dos esdeveniment és aquell que ocorre quan ocorren ambdós. De la definició es veu que $A \cap B$ és el mateix que $B \cap A$ (Figura 1.1b).

**Definició 11 (esdeveniment contrari).** Donat un esdeveniment $A$, el seu *esdeveniment contrari* o *complementari*, que es denota per $A^c$ o $\overline{A}$, és l'esdeveniment format per tots els elements de l'espai mostral que no són de $A$. És a dir, l'esdeveniment contrari de $A$ es verifica quan no ocorre $A$ (Figura 1.1d.

**Definició 12 (diferència d'esdeveniments).** Donats dos esdeveniments, $A$ i $B$, la *diferència* entre $A$ i $B$, que es denota per $A \backslash B$ (o $A - B$), és l'esdeveniment format pels elements de $A$ que no estan en $B$ (Figura 1.1c).

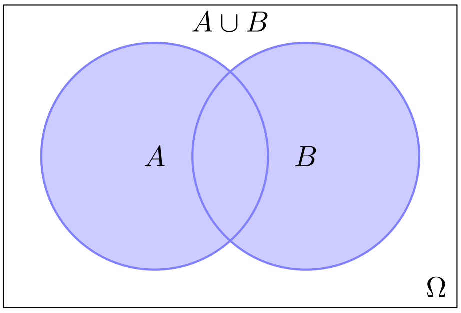
Exemple 11. En l'experiment de llançar un dau i mirar el resultat, tenim que $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si agafam $A =$ que surti parell i $B =$ que surti un nombre menor que 5, tenim que:

- $A \cup B =$ que surti parell o menor que $5 = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Per tant, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A \cap B =$ que surti parell i menor que $5 = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$. Per tant, $A \cap B = \{2, 4\}$.
- $A \setminus B = \{6\}$
- $B \setminus A = \{1, 2\}$
- $A^c =$ el contrari de què surti parell $= \{1, 3, 5\}$
- $B^c =$ el contrari de què surti un nombre menor que $5 = \{5, 6\}$

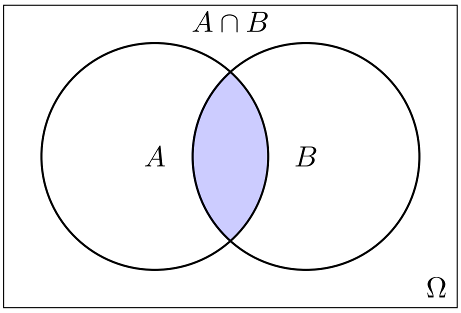
### 1.2.1 Propietats de les operacions

Les operacions sobre el conjunt d'esdeveniments anteriorment descrites satisfan certes propietats. Si $A$, $B$ i $C$ són esdeveniments qualssevol i $E$ denota l'espai mostral, aleshores:

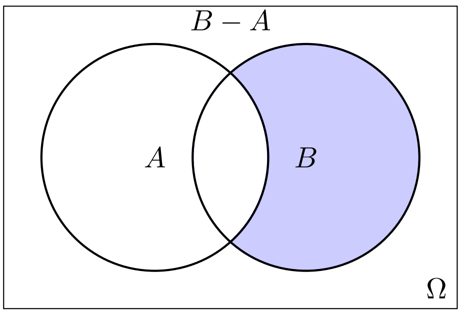
*a*) $A \cup E = E$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A^c = E$



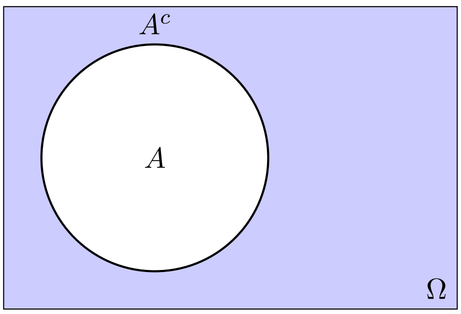

(a) Unió de dos esdeveniments




(b) Intersecció de dos esdeveniments




(c) Diferència de dos esdeveniments




(d) Complementari d'un esdeveniment

Figura 1.1: Operacions entre esdeveniments representats mitjançant diagrames de Venn *b*) $A \cap E = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A^c = \emptyset$

*c*) $A \setminus B = A \cap B^c$

*d*) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$

*e*) Idempotència: $(A^c)^c = A$

*f*) Commutatives:

(a) $A \cup B = B \cup A$
(b) $A \cap B = B \cap A$

*g*) Associatives:

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

*h*) Distributives:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

En particular:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

*i*) *Lleis de De Morgan*

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Observació 1. Les més importants són les propietats distributives i les lleis de De Morgan.

Exercici 5. Es disposa d'una urna amb bolles numerades de l'1 al 16, de la qual s'extreu una bolla. Considerem els esdeveniments següents:

*a*) $A$ = treure un 7

*b*) $B$ = treure un nombre menor que 7

*c*) $C$ = treure un nombre parell

*d*) $D$ = treure un múltiple de 3

Calculeu *a*) $\Omega$, *b*) $A \cap B$, *c*) $A \cup B$, *d*) $B \cap C$, *e*) $C \cap D$, *f*) $C \cup D$, *g*) $B^c$, *h*) $A \setminus B$, $B \setminus A$. Existeixen esdeveniments incompatibles entre si?

Exercici 6. Es llança una ruleta de 10 costats, numerats de la següent manera: 2, 4, 6, 8, ..., 20, i s'observa el resultat obtingut.

*a*) Trobeu l'espai mostral.

*b*) Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:

(a) $A$ = "obtenir un nombre parell"
(b) $B$ = "obtenir un nombre senar"
(c) $C$ = "obtenir un múltiple de 3"
(d) $D$ = "obtenir un múltiple de 5"
(e) $E$ = "obtenir un nombre major que 4"
(f) $F$ = "obtenir un nombre menor que 6"
(g) $G$ = "obtenir un múltiple de 3 i 4"

*c*) Calculeu els seus esdeveniments contraris.

*d*) Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d'$A$ amb cadascun dels altres esdeveniments.

*e*) Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

Exercici 7. Aplicant les propietats anteriors, demostreu que:

*a*) $A \cap (A \cap B) = A \cap B$

*b*) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

*c*) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

*d*) $(A^c \cap B) \cup A = A \cup B$

*e*) $(A \cup B^c) \cap B = A \cap B$

*f*) $((A \setminus B) \cup (B \setminus A))^c = A \cap B$

Exemple 12. D'entre els habitants d'un poble es tria una persona a l'atzar. Considerem els esdeveniments següents: $A$ = ser soci del casino, $B$ = ser soci del club de futbol local i $C$ ser soci d'alguna associació juvenil.

*a*) Expresseu en funció de $A$, $B$ i $C$ les situacions següents:

(a) "ser soci d'alguna d'aquestes associacions": $A \cup B \cup C$
(b) "ser soci de les tres associacions": $A \cap B \cap C$
(c) "ser soci només del casino": $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
(d) "ser soci de, com a màxim, una o dues associacions: $A \cup B \cup C - (A \cap B \cap C)$
(e) "no ser soci de cap de les associacions": $\overline{(A \cap B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
(f) "ser soci d'una sola associació": $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

*b*) Expresseu el significat dels esdeveniments següents:

(a) $A \cup B \cup C$: “pertànyer a, almenys, ua associació”
(b) $\overline{(A \cup B \cup C)}$: “no ser soci de cap associació”
(c) $A \cup B - C$: “no ser soci de juvenil però sí d'alguna de les altres dues”
(d) $\overline{(A \cap B \cap C)}$: “no ser soci de les tres alhora”
(e) $C - (A \cup B)$: “ser soci, només, de l'associació juvenil”
(f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$: “ser soci de, almenys, dues associacions”

Per ajudar-nos a resoldre cadascun dels apartats, hem fet servir el diagrama de Venn de tres esdeveniments (Figura 1.2).

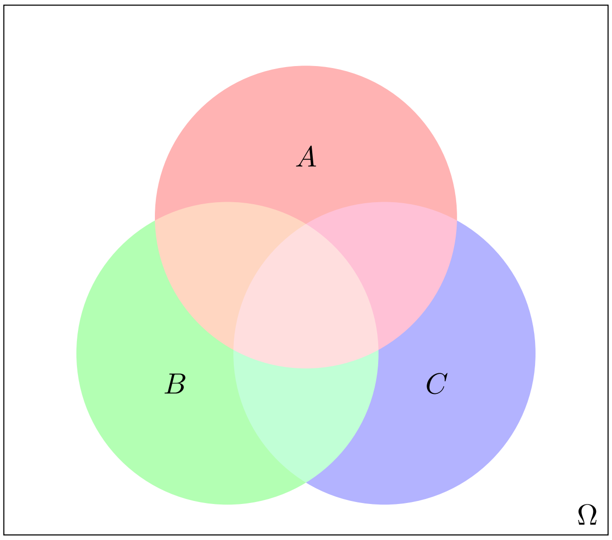



Figura 1.2: Diagrama de Venn de tres esdeveniments

Exercici 8. Siguin els esdeveniments següents: $A$ = “plou avui”, $B$ = “plou demà” i $C$ = “plou passat-demà”. Expresseu mitjançant operacions entre esdeveniments:

*a*) Plou un dels tres dies, almenys

*b*) Plou avui però no demà ni passat-demà

*c*) No plou cap dels tres dies

*d*) Plou com a màxim dos d'aquests tres dies

*e*) Plou avui però no demà

Expliqueu el significat de

*a*) $(A \cap B) - C$

*b*) $(A \cup B) - C$

*c*) $A \cup B \cup \overline{C}$

*d*) $(A \cap B) \cup (C \cap A)$

*e*) $\overline{A \cup B}$

Exercici 9. Considerem els esdeveniments “ser oient de RNE”, “set oient de la SER”, “ser oient de M80”. Expreseu, mitjançant operacions amb esdeveniments, els esdeveniments següents: *a*) “ser oient de només dues emissores”, *b*) “ser oient de RNE però no de la SER ni de M80”, *c*) “ser oient de, almenys, una emissora”, *d*) ‘escoltar alguna emissora però no les tres”, *e*) “no escoltar més d’una emissora”

## 1.3 Probabilitat

La probabilitat és la mesura de la certesa de què ocorri un cert esdeveniment aleatori, és a dir, la probabilitat mesura la *facilitat* de què l’esdeveniment tengui lloc: a major probabilitat, majors són les possibilitats de què l’esdeveniment ocorri. A cada esdeveniment se li associa un nombre, de 0 a 1:

- Si la probabilitat d’un esdeveniment és 0, llavors és impossible que occorri dit esdeveniment
- Si la probabilitat és 1, llavors l’esdeveniment és segur que passarà, en qualsevol cas
- En els altres casos, el valor de la probabilitat indica el tant per u de possibilitats de què l’esdeveniment ocorri.

De manera més formal,

Definició 13 (probabilitat). La *probabilitat* és una aplicació que associa a cada esdeveniment $A$ un nombre, $p(A)$, anomenat la probabilitat de $A$, que satisfà les propietats següents:

*a*) $p(A) \geq 0$ per a qualsevol esdeveniment $A$. És a dir, la probabilitat d’un esdeveniment qualsevol no pot ser negativa.

*b*) $p(E) = 1$. La probabilitat de l’esdeveniment segur és 1.

*c*) $p(\emptyset) = 0$. La probabilitat de l’esdeveniment impossible és 0.

*d*) Si $A$ i $B$ són esdeveniments incompatibles, llavors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.[4]

[4] La definició axiomàtica de la probabilitat s’escapa de l’abast d’aquest manual. Conceptes com el de $\sigma$-àlgebra i $\sigma$-additivitat són necessaris per introduir-la.

### 1.3.1 Propietats de la probabilitat

La definició anterior, té una sèrie de conseqüències: si $A$ és un esdeveniment qualsevol, llavors:

*a*) $p(A^c) = 1 - p(A)$

*b*) Si $A$ és un subconjunt de $B$, llavors $p(A) \leq p(B)$

*c*) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

*d*) *regla de Laplace* Si els esdeveniments elementals tenen tots la mateixa probabilitat, llavors

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos possibles}},$$

Exemple 13 (aplicació de la regla de Laplace). Una urna conté 5 bolles blanques, 7 bolles negres i 3 bolles verdes. Se n'extreu una a l'atzar. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui negra?

Tenim que la probabilitat de treure una bolla concreta és la mateixa (les bolles no estan trucades), per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{negra}) = \frac{\text{nombre de bolles negres}}{\text{nombre total de bolles}} = \frac{7}{15}$$

Exemple 14 (aplicació de la regla de Laplace). D'un joc de cartes espanyoles en triam una a l'atzar[5]. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui una figura, és a dir un 10, un 11 o un 12?

Treure una carta és un esdeveniment equiprobable, per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{figura}) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Exercici 10. En el llançament d'un dau, calculeu la probabilitat de què:

*a*) surti un cinc,

*b*) surti un nombre parell,

*c*) no surti un nombre parell,

*d*) surti múltiple de 3.

Exercici 11. A una oficina, un 30% del personal són homes. Es tria una persona a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què aquesta sigui una dona.

Exercici 12. En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

[5] A la baralla espanyola, hi ha 48 cartes: 12 cartes de bastos, 12 d'ors, 12 d'espases i 12 de copes. El 10 s'anomena *sota*, l'11 s'anomena *cavall* i el 12, *rei*.

*a*) Sota

*b*) Copa o oros

*c*) Copa i oros

*d*) Figura i espasa

*e*) Figura o espasa

*f*) Cavall o espasa

Exercici 13. En una bossa hi ha 5 bolles vermelles, 10 bolles negres i 5 bolles blaves. En treiem una i miram de quin color és. Calculeu la probabilitat de:

*a*) Treure una bolla vermella

*b*) Treure una bolla negra o blava

*c*) Treure una bolla que no sigui blava.

Exercici 14. En una bossa hi ha deu boles numerades de l'1 al 10. Si extraiem una bola de la bossa, calculeu la probabilitat de:

*a*) Treure un 7

*b*) Treure un nombre menor que 7

*c*) Treure un nombre no inferior 7

*d*) Treure un múltiple de 5

*e*) Treure un divisor de 6

*f*) Treure un nombre primer

Exercici 15. En una capsa hi ha vuit bolles numerades consecutivament com segueix: 2, 4, 6, ..., 16. Si diem $A$ = "treure un nombre menor o igual que 10" i $B$ = "treure un múltiple de 3". Calculeu la probabilitat de: *a*) $A$ *b*) $B$ *c*) $A^c$ *d*) $B^c$ *e*) $A \cup B$ *f*) $A \cap B$

*Solució.* Exercici 10 *a*) 1/6, *b*) 1/2, *c*) 1/2, *d*) 1/3, Exercici 11 0.3, Exercici 12 *a*) 4/48, *b*) 1/2, *c*) 0, *d*) 3/48, *e*) 21/48, *f*) 15/48, Exercici 13 *a*) 1/4, *b*) 3/4 *c*) 3/4, Exercici 14 *a*) 0.1, *b*) 0.6, *c*) 0.4, *d*) 0.2, *e*) 0.3, *f*) 0.4, Exercici 15 *a*) 0.625, *b*) 0.25, *c*) 0.375, *d*) 0.75, *e*) 0.75, *f*) 0.125 ■

Exercici 16. En el llançament de dos daus, trobeu la probabilitat de què *a*) ambdues cares sigui parells, *b*) la suma de les cares sigui 9

Exercici 17. Si sabem que la probabilitat dels esdeveniments $A$, $B$ i $A \cap B$ és $p(A) = 1/3$, $p(B) = 2/5$ i $p(A \cap B) = 1/15$, trobeu les probabilitats de: *a*) que es compleixi algun dels esdeveniments $A$ o $B$ *b*) que no es compleixi $A$ però sí $B$, *c*) que es compleixi, només, un esdeveniment *d*) que no es compleixi ni $A$ ni $B$

*Solució.* *a*) 2/3, *b*) 1/3, *c*) 3/5, *d*) 1/3 ■

Exercici 18. En un banc hi ha dues alarmes, $A$ i $B$. En cas d'atracament, la probabilitat de què s'activi $A$, $B$ o ambdues és: $p(A) = 0,75$, $p(B) = 0,85$ i $p(A \cap B) = 0,65$. Trobeu la probabilitat de què: *a*) s'activi alguna de les dues *b*) s'activi només una *c*) no se n'activi cap

Exemple 15. Donats els esdeveniments $A$ i $B$, i les probabilitats $p(A) = 0.1$, $p(B) = 0.2$ i $p(A \cup B) = 0.25$, calculeu *a*) $p(A^c)$ *b*) $p(A \cap B)$.

*a*) Tenim que $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0.1 = 0.9$

b) Aplicant la probabilitat de la unió: $0.25 = 0.1 + 0.2 - p(A \cap B)$. Per tant, $p(A \cap B) = 0.1 + 0.2 - 0.25 = 0.05$.

Exercici 19. Determineu si són compatibles o incompatibles els esdeveniments $A$ i $B$, sabent que $p(A) = 1/4$, $p(B) = 1/2$ i $p(A \cup B) = 2/3$.

Exercici 20. Dels esdeveniments $A$ i $B$ se sap que $p(A) = 2/5$, $p(B) = 1/3$ i $p(A^c \cap B^c) = 1/3$. Calculeu $p(A \cup B)$ i $p(A \cap B)$.

## 1.4 Probabilitat condicionada

En molts de casos, la probabilitat depèn d'un factor. Per exemple, la probabilitat de què una persona sigui calba és relativament baixa. Ara bé, la probabilitat de què un home sigui calb ja és, per desgràcia, més alta. Per tant, la probabilitat de ser calb depèn del sexe de les persones. D'aquesta manera podem calcular la probabilitat de ser calb o bé la probabilitat de ser calb condicionat a ser home. Això darrer vol dir que sabent que triam un home, quina és la probabilitat de què aquest sigui calb.

Definició 14 (probabilitat condicionada). Donats els esdeveniments $A$ i $B$, per *probabilitat de $A$ condicionat a $B$* entendrem la probabilitat de què es verifiqui l'esdeveniment $A$ si prèviament s'ha verificat l'esdeveniment $B$. S'escriu $p(A \mid B)$ i es calcula com

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)},$$

amb $p(B) \neq 0$.

### 1.4.1 Propietats de la probabilitat condicionada

Si $A$ i $B$ són esdeveniments qualssevol, llavors:

a) $p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, si $p(A) \neq 0$.

b) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = p(B) \cdot p(A \mid B)$

c) Dos esdeveniments són *independents* quan $p(A \mid B) = p(A)$. En aquest cas, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

   **Proposició 2.** *Si $A$ i $B$ són independents, llavors també ho són $A^c$ i $B^c$*

Exemple 16 (probabilitat condicionada). En una bossa tenim:

- tres bolles verdes, numerades de l'1 al 3,
- quatre bolles vermelles, numerades del 4 al 7,
- una bolla negra, amb el nombre 8.

de la qual extraiem una bolla. Calculeu $p(\text{parell}|\text{verda})$, $p(\text{parell}|\text{vermella})$ i $p(\text{parell}|\text{negra})$.

Hem de calcular les probabilitats condicionades següents:

$$\begin{aligned} p(\text{parell} \mid \text{verda}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{verda})}{p(\text{verda})} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} \\ p(\text{parell} \mid \text{vermella}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{vermella})}{p(\text{vermella})} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2} \\ p(\text{parell} \mid \text{negra}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{negra})}{p(\text{negra})} = \frac{1/8}{1/8} = 1 \end{aligned}$$

Exercici 21. D'un joc de cartes se'n treu una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què:

*a*) sigui un rei,

*b*) sigui una figura,

*c*) sigui el rei d'espases,

*d*) sigui un rei sabent que ha sortit una figura,

*e*) sigui una figura sabent que ha sortit un rei,

*f*) sigui el rei d'espases sabent que ha sortit una figura.

Exemple 17. A l'exemple anterior (exemple 16), els esdeveniments "parell" i "vermella" són independents, ja que

$$p(\text{parell} \mid \text{vermella}) = p(\text{parell}) = \frac{1}{2}$$

## 1.5 Experiments compostos: tècniques de resolució

Definició 15 (experiment compost). Un experiment es diu *compost* si està format per més d'una part, la qual dóna lloc a un resultat. Si l'experiment només té una part es diu *experiment simple*.

Exemple 18 (exemple d'experiments compostos). Exemple d'experiment compost és:

*a*) Tirar dos daus

*b*) Extreure dues (o més) bolles d'una urna, amb o sense reposició (la reposició és si tornam la bolla extreta a l'urna).

*c*) Extreure una bolla d'una urna i, segons el color de la bolla, extreure'n una altra d'una altra.

Existeixen diverses tècniques per a calcular les probabilitats dels experiments compostos, les quals de forma general podem emprar indistintament. El millor és veure'ls amb exemples.

### 1.5.1 Diagrama d'arbre

Exemple 19. A una casa hi ha tres clauers, $A$, $B$ i $C$ amb 5, 7 i 8 claus respectivament, de les quals només una de cada clauer obri la porta del rebost. Es tria un clauer a l'atzar i, d'aquest, una clau per intentar obrir el rebost.

*a*) Quina és la probabilitat d'obrir el rebost?

*b*) Quina és la probabilitat de què es triï el tercer clauer i la que la clau triada no obri el rebost?

*c*) Quina és la probabilitat de què s'hagi triat el clauer $C$ sabent que s'ha obert el rebost?

*Solució.* En primer lloc, facem un *diagrama d'arbre* (Figura 1.3).

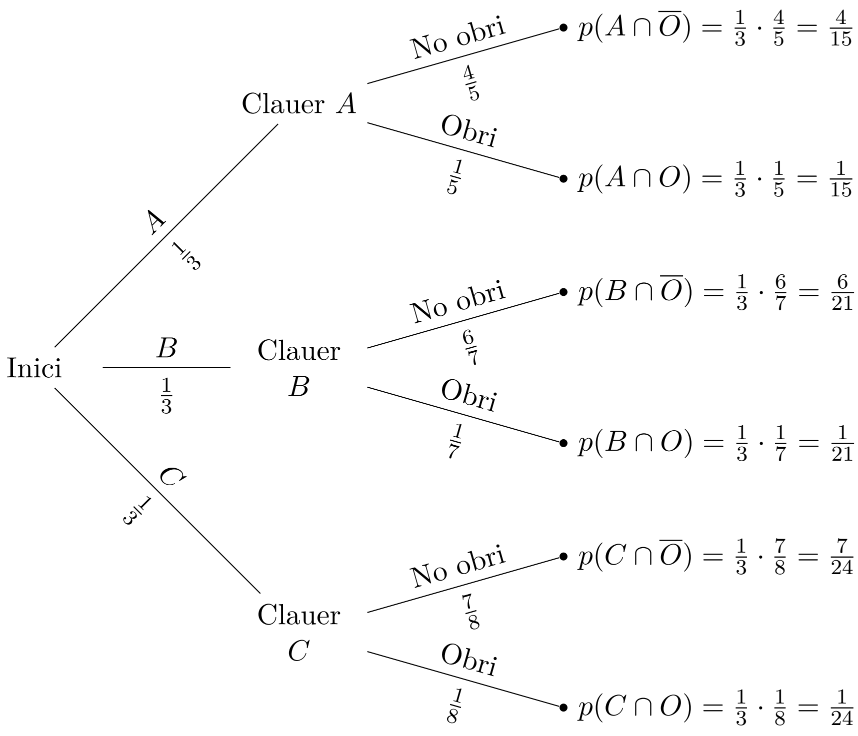



Figura 1.3: Diagrama d'arbre

D'aquesta manera, tenim que

*a*) La probabilitat d'obrir el rebost és:

$$p(O)=p(A\cap O)+p(B\cap O)+p(C\cap O)=\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{24}=\frac{131}{840}$$

*b*) La probabilitat de triar el clauer $C$ i no obrir el rebost és $p(C \cap \overline{O}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24}$.

*c*) La probabilitat de què s'hagi triat el clauer $C$ sabent que s'ha obert el rebost és $p(C \mid O)$:

$$p(C \mid O) = \frac{p(C \cap O)}{p(O)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{131}{840}} = \frac{1/24}{131/840} = \frac{840}{3144} = \frac{35}{131}$$

Notem diverses coses:

*a*) Per calcular la probabilitat d'una *fulla* del diagrama d'arbre, hem de multiplicar cadascun del valors de les probabilitats que té cada *branca*. Així hem calculat la probabilitat $p(C \cap \overline{O})$.

*b*) Cada branca és disjunta, és a dir, la seva intersecció és buida. D'aquesta manera, la probabilitat de què passin esdeveniments que estan a diferents fulles es calcula sumant les seves probabilitats. Així hem calculat $p(O)$.

*c*) Notem que l'espai mostral d'aquest experiment compost seria

$$\Omega = \{(a, a_1), \ldots, (a, a_5), (b, b_1), (b, b_2), \ldots, (b, b_7), (c, c_1), \ldots (c, c_8)\},$$

on, per exemple, $(b, b_5)$ denota que s'ha triat el clauer $B$ i s'ha triat la cinquena clau d'aquest clauer. D'aquesta manera, triar el clauer $A$ seria l'esdeveniment

$$A = \{(a, a_1), (a, a_2), (a, a_3), (a, a_4), (a, a_5)\}$$

De forma anàloga es definirien els esdeveniments $B$, triar el clauer $B$, i $C$, triar el clauer $C$. L'esdeveniment "la clau triada obri el rebost", $O$, seria

$$O = \{(a, a_2), (b, b_3), (c, c_4)\},$$

si suposem que $a_2$, $b_3$ i $c_4$ serien les claus que obririen el rebost. Noteu que el diagrama d'arbre serveix per a trobar fàcilment les probabilitats de $A$, $B$, $C$ i $O$ sense haver de manejar conjunts.

*d*) Als apartats *a*) i *c*) hem aplicat, sense saber-ho, la probabilitat total de l'esdeveniment $O$ i el teorema de Bayes.

**Proposició 3** (probabilitat total). *Sigui un esdeveniment $B$ que pot dependre d'altres esdeveniments $A_1, A_2, \ldots, A_n$ incompatibles entre si ($A_i \cap A_j = \emptyset$ per a tots els $i, j$) i tals que la seva unió és $\Omega$ ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$). Aleshores la probabilitat de $B$ es pot calcular com*

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B \mid A_1) + p(A_2) \cdot p(B \mid A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B \mid A_n)$$

*Aquesta igualtat es coneix com a* probabilitat total de $B$.

**Teorema 4** (teorema de Bayes). *Amb els mateixos termes que el teorema de la probabilitat total,*

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B \mid A_i)}{p(A_1) \cdot p(B \mid A_1) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B \mid A_n)}$$

■

Exercici 22. Llançam una moneda dues vegades. Quina és la probabilitat d'obtenir: *a*) Dues cares? *b*) Almenys una cara? *c*) Una cara i una creu?

Exercici 23. Un moix encalça un ratolí. Aquest pot fugir per tres carrerons diferents, que designarem per $A$, $B$ i $C$. Les probabilitats de què el ratolí entri en els carrerons $A$, $B$ i $C$ són, respectivament, de 0.3, 0.5 i 0.2. Se sap que la probabilitat de què el moix caci al ratolí després de què aquest entri al carreró $A$ és de 0.4, de 0.6 si entra en el carreró $B$, i de 0.1 si ho fa pel carreró $C$. Calculeu *a*) la probabilitat de què el moix caci al ratolí *b*) la probabilitat de què el ratolí hagi entrat en el carreró $A$ si sabem que finalment el moix l'ha caçat

Exercici 24. D'un joc de cartes espanyoles, n'extraiem dues (sense reemplaçament). Quina és la probabilitat de què ambdues siguin d'espases?

*Solució.* Exercici 22 *a*) 1/4 *b*) 3/4 *c*) 1/2 Exercici 23 *a*) 0.44 *b*) 0.273 Exercici 24 11/188 ■

Exercici 25. A certa floristeria varen rebre quantitats iguals de roses i gladiols, de color groc i blanc. El 60% dels gladiols són de color groc, mentre que el 70% de les roses són de color blanc.

*a*) Si triem una rosa, quina probabilitat tenim que sigui de color groc?

*b*) Quina proporció de flors són de color blanc?

*c*) Si es varen comprar un total de 2000 flors i prenem dos gladiols, quina és la probabilitat de què aquests siguin de diferent color?

Exercici 26. Una màquina ha produït 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

*a*) Trobeu la proporció de peces que no són defectuoses

*b*) Calculeu la probabilitat de què, si examinem dues peces, ambdues resultin defectuoses

*c*) Calculeu la probabilitat de què, sabent que la segona peça és defectuosa, la primera també ho sigui.

Exercici 27. Un estoig conté 15 llàpissos de color vermell i 10 de color blau.

*a*) Si triem un llapis a l'atzar, quina probabilitat es té que sigui vermell?

*b*) Si n'extraiem dos, quina és la probabilitat de què ambdos siguin blaus?

*c*) Calculeu la probabilitat de què, sabent que el segon és vermell, el primer hagi estat blau

### 1.5.2 Taules de contingència

Exemple 20. En una empresa hi ha 300 empleats, amb 200 dones i 100 homes. D'aquests, un 30% dels homes i un 40% de les dones tenen un contracte indefinit. Trobeu la probabilitat de què *a*) una persona elegida a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit *b*) una persona tengui un contracte indefinit *c*) sigui dona sabent que té un contracte indefinit

*Solució.* En comptes de fer un diagrama d'arbre, realitzarem una *taula de contingència* (Taula 1.1).

| | Homes | Dones | |
|---|---|---|---|
| Contracte indefinit | 30 | 80 | 110 |
| Altres contractes | 70 | 120 | 190 |
| Total | 100 | 200 | 300 |

Taula 1.1: Taula de contingència del sexe i tipus de contracte

Per saber, per exemple, el nombre d'homes amb contracte indefinit hem calculat el 30% de 100: $\frac{30}{100} \cdot 100 = 30$. De forma anàloga, per saber el nombre de dones amb contracte indefinit: $\frac{40}{100} \cdot 200 = 80$. Per saber els homes i dones amb diferent contracte, hem restat el total menys el nombre de contractes indefinits per sexes.

Amb aquesta taula podem veure fàcilment que

*a*) La probabilitat de què una persona triada a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit és $80/300 = 4/15$

*b*) La probabilitat de què una persona tengui contracte indefinit és de $110/300 = 11/30$

*c*) La probabilitat de què una persona sigui dona sabent que té contracte indefinit és

$$p(\text{dona} \mid \text{indefinit}) = \frac{p(\text{dona} \cap \text{indefinit})}{p(\text{indefinit})} = \frac{80/300}{110/300} = \frac{80}{110} = \frac{8}{11}.$$

■

Observació 2. En el cas de no saber el nombre total d'empleats, podríem suposar que fossin 100, per exemple.

Exercici 28. En una determinada població hi ha un 53% de dones. Un 20% dels homes té afició per la lectura. Aquesta afició augmenta fins al 30% en el cas de les dones. Es tria una persona a l'atzar. *a*) Quina és la probabilitat de què sigui dina i no tengui afició a la lectura? *b*) Quina és la probabilitat de què la persona triada sigui una dona sabent que té afició per la lectura?

*Solució.* *a*) $0,371$ *b*) $0,63$ ■

Exercici 29. En una oficina, el 70% dels empleats són extrangers. De entre aquests, el 50% són dones, mentre que, dels nacionals, són homes el 20%.

*a*) Quin percentatge d'empleats nacionals són dones?

*b*) Calculeu la probabilitat de què un empleat de l'oficina sigui dona

*c*) En Ferran fa feina a l'oficina. Quina és la probabilitat de què sigui extranger?

*Solució.* *a*) 80% *b*) $0,59$ *c*) $35/41$ ■

Exercici 30. Una ciutat ha remodelat el seu passeig marítim i en diari local ha aparegut l'enquesta, realitzada a 200 persones, sobre si el resultat ha estat satisfactori. Els resultats varien depenent de la zona on viuen els enquestats: dels qui viuen al centre, el 30% li ha agradat el resultat final de les obres. Si viuen a les afores, aquest percentatge ha pujat a un 50%. Dels 200 enquestats, 120 viuen en el centre.

*a*) Quina és la probabilitat de què a una persona li hagin agradat les obres?

*b*) Si sabem que la persona li han agradat les obres, quina probabilitat hi ha que visqui en el centre?

Exercici 31. S'ha realitzat un estudi entre els estudiants d'un curs ofimàtica: d'entre els estudiants, un 40% ja havia cursat anteriorment un curset d'ofimàtica. D'aquests, un 20% té un ordinador a casa, mentre que dels que no havien cursat anteriorment ofimàtica, aquest percentatge baixa al 10%.

*a*) Quina és la probabilitat de què un estudiant tengui ordinador a casa?

*b*) Si un estudiant té ordinador a casa, quina és la probabilitat de què no hagi rebut abans formació d'ofimàtica?

### 1.5.3 Diagrames de Venn

Aquest mètode és convenient aplicar-lo quan sabem informació sobre esdeveniments excloents, com per exemple tenir una afició o una altra.

Exemple 21. En un poble, el 55% dels habitants consumeix pa integral, el 30% pa multicereal i el 20% d'ambdós tipus. Quina és la probabilitat de què una persona triada a l'atzar no consumeixi cap dels dos tipus de pa?

*Solució.* Elaborarem un diagrama de Venn dels consumidors de pa (Figura 1.4). Per fer-ho, suposarem que hi ha 100 habitants al poble (tenim tants per cent al problema, per tant no és una suposició descabellada):

*a*) Si hi ha 55 habitants que consumeixen pa integral i 20 que també consumeixen multicereal, aleshores n'hi ha 35 que *només* consumeixen pa integral.

*b*) De la mateixa manera, hi ha 10 persones que només consumeixen pa multicereal.

*c*) Si en total hi ha 100 persones, tenim que hi ha 35 persones que no consumeixen cap tipus de pa.

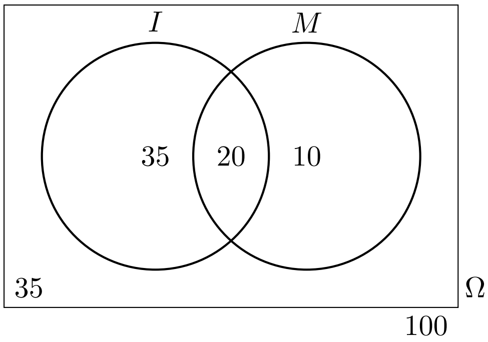



Figura 1.4: Diagrama de Venn dels consumidors de pa

Per tant, la probabilitat de triar un habitant que no consumeixi cap tipus de pa és $p(\overline{I} \cap \overline{M}) = 35/100 = 0.35$.[6]

■

Exercici 32. En una població, es sap que el 30% escolta els informatius per la radio, el 60% per la televisió i el 20% pels dos mitjans. Si es tria una persona a l'atzar, determineu la probabilitat de què:

*a*) escolti algun dels mitjans de comunicació

*b*) escolti la radio i no vegi la televisió

*c*) sabent que no veu la televisió, que escolti la radio

*d*) escolti només un mitjà de comunicació

[6] Haguéssim pogut obtenir aquest resultat usant les propietats de les operacions d'esdeveniments: $p(\overline{I} \cap \overline{M}) = p(\overline{(I \cup M)}) = 1 - p(I \cup M) = 1 - (p(I) + p(M) - p(I \cap M)) = 1 - (0.55 + 0.30 - 0.20) = 0.35$

Exemple 22. En una ciutat es publiquen tres diaris: $A$, $B$ i $C$. El 50% de la gent està subscrita al diari $A$, el 40% a $B$ i el 30% a $C$. El 20% està subscrit a $A$ i a $B$, el 10% a $A$ i $C$, el 20% a $B$ i $C$ i el 5% a tots els diaris. Si triem una persona a l'atzar d'aquesta ciutat, calculeu la probabilitat de què:

*a*) estigui subscrit almenys a un diari

*b*) no estigui subscrit a cap diari

*c*) estigui subscrit exactament a un diari

*Solució.* Facem un diagrama de Venn de tres conjunts: subscriptors de $A$, de $B$ i de $C$ (Figura 1.5). Hem marcat en negreta les dades donades. Per calcular les dades que falten, hem procedit de la manera següent:

*a*) Hem suposat que hi ha 100 persones en total.

*b*) Sabem que $|A \cap B \cap C| = 5$ i $|A \cap B| = 20$. Per tant, els subscritors de $A$ i $B$ però que no estan subscrits a $C$, i.e., $A \cap B \cap \overline{C}$, són $20 - 5 = 15$. De la mateixa manera, $|A \cap C \cap \overline{B}| = 5$ i $|B \cap C \cap \overline{A}| = 15$.

*c*) Com que $|A| = 50$, per l'apartat anterior, tenim que $|A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 50 - (5 + 5 + 15) = 25$. De la mateixa manera, $|B \cap \overline{C} \cap \overline{A}| = 40 - (5 + 15 + 15) = 5$ i $|C \cap \overline{A} \cap \overline{B}| = 30 - (5 + 5 + 15) = 5$

*d*) Per últim, $|\overline{(A \cup B \cup C)}| = 100 - 75 = 25$.

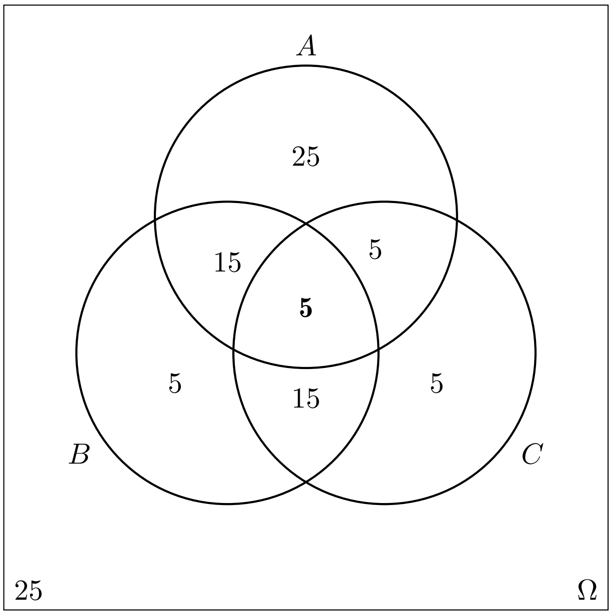



Figura 1.5: Diagrama de Venn dels subscriptors de diaris

Per tant, amb tot,

*a*) $p(\text{almenys un diari}) = \frac{25+15+5+5+15+5+5}{100} = 75/100 = 0.75$

*b*) $p(\text{cap diari}) = 25/100 = 0.25$

*c*) $p(\text{exactament 1 diari}) = \frac{25+5+5}{100} = 35/100 = 0.35$

■

Exercici 33. En un grup de matrimonis heterosexuals s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris. En un 30% tant l'home com la dona els té i, finalment, el $37,5\%$ dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris i la dona no els té.

*a*) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni heterosexual l'home tengui estudis universitaris?

*b*) En quin percentatge de matrimonis heterosexuals en els que la dona té estudis universitaris, l'home també els té?

*c*) Quin percentatge correspon a matrimonis en el que l'home no té estudis universitaris i la dona sí?

*Solució.* *a*) $0,675$, *b*) 60%, *c*) 20% ■

Exercici 34. Un estudiant fa dues proves el mateix dia. La probabilitat de què passi la primera és de $0,6$, la que passi la segona és de $0,8$ i de què passi ambdues és de $0,5$. Es demana:

*a*) la probabilitat de què passi almenys una prova

*b*) la probabilitat de què no passi cap prova

*c*) són les proves esdeveniments independents?

*d*) la probabilitat de què passi la segona prova en cas de no haver superat la primera

*Solució.* *a*) $0,9$, *b*) $0,1$, *c*) no són independents *d*) $0,75$ ■

Exercici 35. Un aparell elèctric està constituït per dos components: $A$ i $B$. Sabent que hi ha una probabilitat de $0,58$ de què no falli cap element, i que en el 32% dels casos falla $B$ però no $A$, determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component $A$.

*Solució.* $0,9$ ■

## 1.6 Exercicis proposats

Exercici 36. Un restaurant té contractats a dos cambrers: Javier i Ana per atendre el servei del menjador. Ana posa el servei el 70% dels dies i es confon al col · locar els coberts només el 5% dels dies. Mentre, Javier col · loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

*a*) Aquest matí, l'encarregat del restaurant ha passat revista al servei. Quina és la probabilitat de què trobi algun servei mal col · locat?

*b*) Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col · locats i vol trobar quina és la probabilitat de què hagi estat en Javier

*Solució.* *a*) $0,11$ *b*) $15/22$ ■

Exercici 37. Certa persona compra tots els dies el diari local, comprant-lo indistintament en un de les botigues, $A$ i $B$, que estan més pròximes a ca seva. El 80% dels dies el compra a la botiga $A$.

*a*) Quina proporció dels dies compra el diari a la botiga $B$?

*b*) Quina probabilitat hi ha de què compri dos dies el diari a la botiga $A$?

*c*) Quina és la probabilitat de què dos dies consecutius compri el diari a dues botigues diferents?

*Solució.* *a*) $0,20$ *b*) $0,64$ *c*) $0,32$ ■

Exercici 38. La probabilitat de què un aficionat al futbol vagi al camp municipal a veure un partit és del 90% quan es disputa en cap de setmana i el 50% si té lloc en un dia laborable. La probabilitat de què un partit es jugui en cap de setmana és la mateixa que se jugui entre setmana.

*a*) Cert partit es celebrarà la setmana que ve en un dia encara sense determinar. Calculeu la probabilitat de què els aficionats vagin a veure'l al camp

*b*) Si finalment un aficionat va anar a veure el partit, quina és la probabilitat de què aquest hagi estat en cap de setmana?

*Solució.* *a*) $0,7$ *b*) $45/70$ ■

Exercici 39. En una capsa estan desats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

*a*) Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?

*b*) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, quina és la probabilitat de què funcionin els dos correctament?

*c*) Si el segon no funciona correctament, quina és la probabilitat de què el primer tampoc ho faci?

Exercici 40. El 25% de les famílies de certa comunitat autònoma espanyola no surt fora de la mateixa durant les vacances d'estiu. El 65% estiueja per la resta de l'estat i el 10% restant se'n va a l'extranger. Dels qui queden a la seva comunitat, només un 10% no usa cotxe en els desplaçaments. Aquesta quantitat augmenta al 30% entre els que surtin per la resta d'Espanya, i al 90% entre els que viatgen a l'extranger.

*a*) Calculeu el percentatge de famílies d'aquesta comunitat que utilitza el cotxe en els seus desplaçaments d'estiu

*b*) Una família no usa cotxe en les seves vacances d'estiu. Quina és la probabilitat de què surti de la comunitat movent-se per la resta d'Espanya?

*Solució.* *a*) 69% *b*) 13/20 ■

Exercici 41. Un grup de 40 persones acabar de prendre un bus. D'aquests, només 10 són fumadors. Entre els fumadors, el 70% es mareja durant el viatge. I entre els qui no fumen, aquesta quantitat baixa al 40%.

*a*) Quina probabilitat hi ha que dues persones siguin fumadores ambdues?

*b*) Quina és la probabilitat de què un viatger no es maregi?

*Solució.* *a*) 3/52 *b*) $0,525$ ■

Exercici 42. Dos joves aficionats als jocs d'atzar es troben realitzant un solitari amb una baralla espanyola. Extreuen una carta de la baralla i volen saber quina és la probabilitat d'obtenir rei condicionat a què s'hagi tret figura

*Solució.* 1/3 ■

Exercici 43. En un país s'ha constituït una comissió parlamentària integrada per deu membres, dels quals set pertanyen al partit governant i la resta al partit de l'oposició. Entre els set membres del partit governant hi ha quatres homes; dos entre els del partit de l'oposició. El president de la comissió s'elegeix per sorteig entre els seus integrants. Celebrat el sorteig, es sap que el president triat ha estat un home. Quin partit té més possibilitats de dirigir la comissió?

*Solució.* 2/3 ■

Exercici 44. S'ha fet un estudi d'un nou tractament sobre 120 persones que pateixen certa enfermetat. Trenta d'elles ja han patit l'enfermetat amb anterioritat. Entre les persones que l'han patida anteriorment, el 80% ha reaccionat positivament al nou tractament. De les que no la han patida amb anterioritat, el percentatge de la reacció positiva ha estat del 90%.

*a*) Si triem a l'atzar un pacient, quina és la probabilitat de què no reaccioni positivament al nou tractament?

*b*) Si un pacient ha reaccionat positivament al tractament, quina és la probabilitat de què no hagi patit l'enfermetat amb anterioritat?

Exercici 45. A cert curs d'un centre d'ensenyament, el 62.5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. D'altra banda, d'entre els qui varen aprovar Matemàtiques, el 80% també varen aprovar Física. Es sap igualment que només el $33,3\%$ dels qui no varen aprovar Matemàtiques varen aprovar Física.

*a*) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures alhora?

*b*) Quin va ser el percentatge d'aprovats a l'assignatura de Física?

*c*) Su un estudiant no aprovà Física, quina és la probabilitat de què aprovàs Matemàtiques?

Exercici 46. El 70% dels sol · licitants d'un lloc de feina té experiència i a més formació adient amb el lloc de treball. Malgrat això, hi ha un 20% que té experiència i no una formació adient. Es sap també que entre els sol · licitants que tenen formació adient amb el lloc, un 88, 5% té experiència.

*a*) Quina és la probabilitat de què un sol · licitant no tengui experiència?

*b*) Si un sol · licitant té experiència, quina és la probabilitat de què la seva formació sigui adient amb el lloc de treball?

*c*) Calculeu la probabilitat de què un sol · licitant tengui formació adient amb el lloc.

Exercici 47. Un grup d'amics ha estat parlant sobre els seus gusts musicals. La música clàssica agrada al 20% d'ells. Es sap també que el percentatge dels qui els agrada la música moderna d'entre els que els agrada la música clàssica és del 75% i que el percentatge de qui els agrada la música moderna d'entre els qui no els agrada la música clàssica és del 87, 5%.

*a*) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi la música moderna?

*b*) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi tant la música clàssica com la moderna?

*c*) Si a una persona li agrada la música moderna, quina és la probabilitat de què tamé li agradi la música clàssica?

*d*) Si a una persona no li agradi la música moderna, quina és la probabilitat de què li agradi la clàssica?

Exercici 48. En un grup de matrimonis heterosexuals s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris; en un 30% tant l'home com la dona els tenen; finalment, en el 37, 5% dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris, la dóna també els té. En aquest grup de matrimonis:

*a*) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni el marit tengui estudis universitaris?

*b*) En quin percentatge de matrimonis en els que la muller té estudis universitaris el marit també els té?

*c*) En quin percentatge de matrimonis el marit no té estudis universitaris i la muller sí?

Exercici 49. En un grup de persones, al 50% els hi han posat alguna vegada una multa de trànsit. D'altra banda, al $12,5\%$ no els hi han posat mai cap multa però sí han sofert alguna vegada un accident. Finalment, al 60% dels qui mai han tengut un accident no els hi han posat mai una multa.

*a*) Quin percentatge de persones no han tengut mai un accident ni els hi han posat una multa?

*b*) Quin percentatge de persones no han tengut mai cap accident?

*c*) Entre les persones que mai han tengut cap multa, quin percentatge no ha tengut mai un accident?

Exercici 50. L'urna $S$ conté 4 bolles blanques i 3 negres, i l'urna $T$ conté 3 bolles blanques i dues negres. Prenem a l'atzar una bolla de l'urna $S$ i, sense mirar-la, la introduïm a l'urna $T$. A continuació, extraïem amb reemplaçament dues bolles de l'urna $T$. Trobeu la probabilitat de què:

*a*) les bolles siguin del mateix color

*b*) les bolles siguin de distint color

Exercici 51. Un banc concedeix tres tipus de crèdits: hipotecaris, empresarials i personals. Es sap que el 30% dels crèdits concedits són hipotecaris; el 50%, empresarials; i el 20% restant són personals. Han resultat impagats el 20% dels crèdits hipotecaris, el 25% dels crèdits empresarials i el 50% dels crèdits personals. Es demana:

*a*) Representar la situació mitjançant un diagrama d'arbre

*b*) Seleccionat un crèdit a l'atzar, calcular la probabilitat de què es pagui

*c*) Un crèdit determinat ha resultat impagat. Calculeu la probabilitat de què sigui un crèdit hipotecari

Exercici 52. En un trajecte entre dues ciutats pròximes, un automobilista ha d'atravessar tres zones que estan en obres i en les que es regula el trànsit mitjançant semàfors. La probabilitat de trobar el semàfor en vermell per a cadascuna de les tres zones és $0,3$, $0,7$ i $0,5$. Calculeu la probabilitat de què el conductor:

*a*) Trobi els tres semàfors en vermell

*b*) Trobi els tres semàfors en vermell

*c*) Trobi exactament un semàfor en vermell *d*) Trobi almenys un semàfor en vermell

Exercici 53. En un determinat barri d'una ciutat s'ha observat que el 70% dels seus habitants té més de 50 anys i que d'aquests el 60% és propietari de la vivenda que habita. També es sap que el percentatge de propietaris és del 30% entre aquelles persones que no superen els 50 anys. Es demana:

*a*) Trobar la probabilitat de què un veïnat del barri, el qual ha estat triat a l'atzar, sigui propietari de la vivenda en la qual habita.

*b*) Triat un veïnat a l'atzar, que és propietari de la vivenda on habita, calculeu la probabilitat de què tengui més de 50 anys.

Exercici 54. Provem una vacuna contra el grip en un grup de 400 persones, de les quals 180 són homes i 220 dones. De les dones, 25 es contagien de grip i, dels homes, ho fan 23. Determineu les probabilitats de què:

*a*) Al seleccionar una persona a l'atzar, resulti que no té grip

*b*) Al seleccionar una persona a a l'atzar, resulti ser una dona que no té grip

*c*) Seleccionada una persona que no té grip, resulti que sigui un home

*d*) Seleccionada una dona, resulti que no té grip

Exercici 55. El 20% dels empleats d'una empresa són enginyers i un altre 20% són economistes. Tres de quatre enginyers ocupa un càrrec directiu, mentre que només ho fa el 50% dels economistes. De la resta dels empleats, només ocupen càrrecs directius un 20%. Calculeu les probabilitats de què:

*a*) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti ser un enginyer que no ocupa càrrec directiu

*b*) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti no ser ni enginyer ni economista, però que ocupi un càrrec directiu

*c*) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser economista

*d*) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser enginyer o economista

Exercici 56. El 15% dels habitants d'un país pateix certa enfermetat. Per a diagnosticar-la es disposa d'un procediment, el qual no és completament fiable: dóna positiu en el 90% dels casos de persones realment malaltes, però també dóna positiu en el 5% de les persones sanes (el que es coneix com *fals positius*). Determineu la probabilitat de què:

*a*) estigui sana una persona el diagnòstic de la qual ha donat positiu *b*) estigui malalta una persona el diagnòstic del qual ha estat negatiu

Exercici 57. Tres avions disparen simultàniament a un blanc, sent independients els dispars l'uns dels altres, i sent la probabilitat de què un avió acerti al blanc de $0,6$. Calculeu la probabilitat de què el blanc sigui destruït.

Exercici 58. Una caixa conté 100 peces, entre les que hi ha 20 defectuoses pel que fa a la longitud, 12 defectuoses pel que fa a l'amplada i 15 defectuoses pel que fa a l'altura. D'altra banda, sabem que hi ha 7 peces defectuoses en longitud i altura, 4 peces defectuoses en longitud i amplada, 5 que ho són en amplada i altura i 2 defectuoses en els tres aspectes. Es demana:

*a*) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar presenti un sol defecte.

*b*) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar sigui defectuosa només pel que respecte a la longitud

Exercici 59. De 150 pacients, 90 tenen una enfermetat cardíaca, 50 tenen càncer i 20 tenen ambdues enfermetats. Determineu la probabilitat de què un pacient triat a l'atzar tengui només una de les dues enfermetats.

Exercici 60. Una màquina es composa de dos components: $A$ i $B$. La probabilitat de què el component $A$ falli és de $0,05$ mentre que la probabilitat de què $B$ arribi a fallar és de $0,03$. La màquina funciona correctament sempre que ho fan ambdos components i també en el 30% dels casos en què ambdos components es comportin erròniament. En cas contrari, la màquina falla. Calculeu la probabilitat de què la màquina no funcioni correctament.

Exercici 61. Els habitants d'un poble poden votar entre dos partits polítics: $A$ i $B$. El 55% dels habitants són menors de 30 anys; d'ells, el 80% són del partit $B$. Dels majors de 30 anys, només ho són 1 de 10 persones. Escollim una persona a l'atzar.

*a*) Calculeu la probabilitat de què sigui del partit $A$

*b*) La persona triada resulta ser del partido $A$. Quina probabilitat hi ha de què tengui menys de 30 anys?

Exercici 62. N'Aina, en Bartomeu i en Cristòfol sortegen a l'atzar l'ordre en què entraran per una porta.

*a*) Calculeu la probabilitat de què els dos darrers en entrar siguin homes

*b*) Determineu si són independients els esdeveniments 'la dona entra abans que algun dels homes' i 'els dos homes entren consecutivament'.

Exercici 63. Es tenen dues urnes, $U_1$ i $U_2$, el contingut del qual és el següent:

- en l'urna $U_1$ hi ha 4 bolles blaves, 3 vermelles i 3 verdes

- en l'urna $U_2$ hi ha 4 bolles vermelles, 5 blaves i 1 verda

Es llancen tres monedes a l'aire i si s'obtenen dues cares, s'extreu una bolla de l'urna $U_1$; en qualsevol cas, s'extreu una bolla de l'urna $U_2$. Trobeu la probabilitat de què la bolla extreta sigui blava. Ajudeu-vos d'un diagrama d'arbre.

Exercici 64. Un aparell elèctric està constituït per dos components, $A$ i $B$. Sabent que hi ha una probabilitat de $0,58$ que no falli cap dels dos components, i que en el 32% dels casos falla $B$ no havent fallat $A$, determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component $A$.

Exercici 65. Una urna, $A$, conté 5 bolles blanques i 3 de negres. Una altra urna, $B$, en té 6 de blanques i 4 de negres. Elegim una urna a l'atzar i extraiem dues bolles, que resulten ser negres. Trobeu la probabilitat de què l'urna elegida hagi estat la $B$.

# Part II

# Àlgebra lineal

# 2

# Determinants

Un *determinant* el nombre, que es calcula segons determinades regles, associat a una disposició de nombres escrits en forma d'$n$ fileres i $n$ columnes. El tamany del determinant, és a dir, el nombre de fileres (o de columnes) s'anomena *ordre*. Alguns exemples d'aquesta disposició són les expressions següents:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

En aquest cas, el primer determinant té ordre 2 i el segon determinant té ordre 3.

En general, un determinant d'ordre $n$ tendrà una expressió de l'estil

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

on cada $a_{ij}$ és un nombre, amb $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, n$.

A continuació veurem com es calculen aquests valors numèrics associats a cadascuna d'aquestes expressions. Com pareix natural, aquests valors dependran de l'ordre del determinant.

## 2.1 Càlcul de determinants

**Ordre 1** El determinant d'ordre 1 és el propi element que el constitueix:

$$|a| = a$$

**Ordre 2** Es calculen mitjançant la regla següent:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemple 23.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3{\cdot}(-1) - (-5){\cdot}2 = -3 + 10 = 7$$

Observem que el que va precedit del signe positiu és aquell que s'aconsegueix multiplicant els nombres en *sentit dret*. En canvi, el terme precedit pel signe negatiu s'obté multiplicant els dos nombres en *sentit esquerre*.

**Ordre 3** Es calculen mitjançant la regla de Sarrus

**Algorisme 1** (regla de Sarrus).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

De la mateixa manera que per als determinants d'ordre 2, els termes del determinant que es calculen multiplicant els nombre en *sentit dret* van precedits de signe positiu i tenen signe negatiu els que provénen de multiplicacions de nombres *en sentit esquerre*. Gràficament (Figura 2.1):

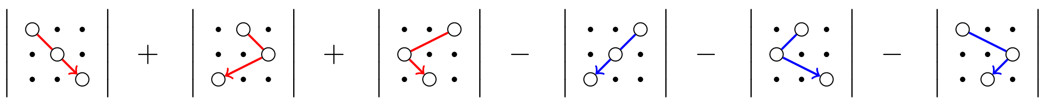


Figura 2.1: Regla pnemotècnica per a recordar la regla de Sarrus

Exemple 24.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 \cdot 4$$
$$- (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 4$$
$$= -4 + 0 - 36 - 6 + 30 - 0$$
$$= -16$$

**Ordre $\geq 4$** Per a calcular els determinants d'ordre superior a 3 ens fan falta alguns conceptes que veure més endavant (vegeu Subsecció 2.2.1).

Exercici 66. Calculeu els determinants següents:

*a)*

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

*d)*

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

*g)*

$$\begin{vmatrix} x & 5+x \\ 7 & -8x \end{vmatrix}$$

*b)*

$$\begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

*e)*

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

*h)*

$$\begin{vmatrix} 3-x & 4x^2 \\ 6 & 7+2x \end{vmatrix}$$

*c)*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

*f)*

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

*i)*

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

*Solució.* *a)* 5, *b)* −7, *c)* 15, *d)* 30, *e)* −40, *f)* 68, *g)* $-8x^2 - 7x - 35$, *h)* $-26x^2 - x + 21$, *i)* $x^3 + 3x^2$. ■

## 2.2 Càlcul de determinants d'ordre superior a 3

### 2.2.1 Adjunt d'un element d'un determinant

Definició 16 (menor complementari). Donat un determinant, el *menor complementari* d'un element qualsevol és el determinant que resulta de suprimir la filera i la columna a les quals pertany aquest element.

Exemple 25. Donat el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

El menor complementari de l'element que ocupa la filera 3 i la columna 2 (és a dir, el nombre 2) és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

donat que hem llevat la tercera filera i la segona columna.

Definició 17 (adjunt). S'anomena *adjunt* d'un element al menor complementari precedit del signe $+$ o $-$ segons l'esquema següent:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

De forma compacte, el signe de l'element $a_{ij}$ és $(-1)^{i+j}$, on $i$, $j$ indiquen, respectivament, la filera i la columna d'aquest element dins el determinant. Això vol dir que si la suma $i+j$ és parell, aleshores el signe de l'adjunt serà positiu, i si $i+j$ és senar, aleshores l'adjunt tendrà signe negatiu.

Exemple 26. A l'exemple anterior, l'adjunt del 2 és

$$-\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

el valor del qual és $-27$.

Exercici 67. Calculeu l'adjunt de l'element central i de l'element $a_{13}$ del determinant

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

### 2.2.2 Càcul dels determinants d'ordre 4 o superior

Per al càlcul de determinants d'ordre 4 o majors s'utilitza el *desenvolupament* per una filera o una columna, que consisteix en calcular un determinant d'ordre $n$ a partir de $n$ determinants d'ordre $n-1$. Les passes a seguir són les següents:

**Algorisme 2** (desenvolupament d'un determinant).

1. *Es tria una filera o columna qualsevol (la tria és arbitrària)*
2. *El resultat del determinant és la suma dels adjunts dels elements d'aquesta filera pels seus adjunts*

*És a dir, si tenim un determinant d'ordre $n$:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

*aleshores el seu desenvolupament per la primer filera seria*

$$a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13} + a_{14} \cdot \Delta_{14} + \ldots + a_{1n} \cdot \Delta_{1n},$$

*on $\Delta_{ij}$ denota l'adjunt de l'element $a_{ij}$.*

Exemple 27. Calcularem el valor del determinant següent desenvolupant-lo per la quarta columna:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= -3 \cdot \left( - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \left( \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) \\
&\quad + 0 \cdot \left( - \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 3 \cdot \left( \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right) \\
&= -3 \cdot (-70) + 1 \cdot 28 + 0 + 3 \cdot (-77) \\
&= 7
\end{aligned}$$

Observem que, amb aquest mètode, és convenient triar aquella línea que contengui més zeros, ja que per a aquests no és necessari ni tan sols calcular el seu adjunt.

Exercici 68. Calculeu el valor dels determinants següents:

*a*)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -6 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

*b*)
$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

*Solució.* *a*) 2326, *b*) 0 ■

## 2.3 Propietats dels determinants

Definició 18 (línia d'un determinant). S'anomena *línia* d'un determinant a qualsevol filera o columna del determinant.

Vegem a continuació les propietats dels determinants.

1. Si un determinant té tots els elements d'una línia qualsevol iguals a zero, el determinant val 0.

   Per exemple:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Un determinant que té dues línees paral · leles iguals val 0.

   Per exemple:
$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Això és especialment útil quan el determinant involucra lletres. Per exemple:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & 2 & a \\ a & 3 & a \end{vmatrix} = 0,$$

fet que ens estalvia una considerable feina, que de ben segur faríem si calculèssim el valor d'aquest determinant emprant la regla de Sarrus.

3. Si es multipliquen tots els elements d'una línia d'un determinant per un mateix nombre, el valor del determinant queda multiplicat per aquest nombre.

   Per exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -32.$$

   En aquest darrer determinant hem multiplicat tots els elements de la segona filera per 2.

   Aquesta propietat es fa servir per treure factor comú d'un determinant; aquesta operació s'ha de fer línia a línia quan s'aplica més d'una vegada a un mateix determinant:

   Observació 3 (extracció de factor comú a un determinant). Si una línia d'un determinant està multiplicada per un mateix nombre, es pot treure factor comú aquest nombre a fora del determinant. Per exemple:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 10 & -6 \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & -4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 & -6 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 8 \cdot 56 \\ &= 448 \end{aligned}$$

   Després de seguir aquesta regla, el determinant resultant té nombres més petits i, per tant, resulta més fàcil de calcular.

   Exemple 28. Volem calcular el determinant $\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ a & 3 & b \\ a & 2 & b \end{vmatrix}$.

Podríem aplicar la regla de Sarrus, però el fet de què el determinant tingui lletres faria que fos molt farragós. Per això intentarem extreure factor comú:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ a & 3 & b \\ a & 2 & b \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ja que té dues columnes iguals.

Exercici 69. Treieu tot el factor comú que es pugui del determinant

$$\begin{vmatrix} 6 & -18 \\ -4 & 15 \end{vmatrix}$$

Exercici 70. Només treient factor comú, calculeu el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 4x \\ x^2 & 2x^2 & 4x^2 \\ x^3 & 2x^3 & 4x^3 \end{vmatrix}.$$

## 2.4 Exercicis proposats

### 2.4.1 Càlcul de determinants

Exercici 71. Calculeu el valor dels determinants següents:

$$a)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix} \quad e)\begin{vmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

### 2.4.2 Resolució d'equacions amb determinants

Per afrontar aquesta secció és necessari conèixer la resolució d'equacions de primer, de segon grau i de grau major o igual que 3 (vegeu Secció A.2, Secció A.4 i Secció A.5; concretament exemple 136).

Exercici 72. Resoleu les equacions següents:

$$a)\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad c)\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$b)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercici 73. Per a quin valor de $x$ s'anul · la el determinant següent?

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Exercici 74. Resoleu l'equació següent:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Exercici 75. Trobeu, en funció de $a$, el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

Exercici 76. Trobeu, en funció de $a$, el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a \\ a & a+1 & 1 \\ a+2 & a & a+1 \end{vmatrix}$$

i digueu quan el determinant val 0.

# 3

# Matrius

## 3.1 Definicions

Definició 19 (matriu). Una *matriu* és una col · lecció de nombres disposats en fileres i columnes. Es diu *quadrada* si aquesta disposició té tantes fileres com columnes; en cas contrari es diu *rectangular*.

Exemple 29. Són exemples de matrius les següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La primera és una matriu rectangular i la segona és una matriu quadrada.

Definició 20 (ordre d'una matriu). L'*ordre* d'una matriu és el nombre de fileres i columnes que té, i s'escriu de la forma $n \times m$, on $n$ és el nombre de fileres i $m$ és el nombre de columnes.

De vegades també s'anomena *dimensió* de la matriu.

En el cas de les matrius quadrades es sol indicar el seu ordre únicament amb el nombre de fileres (o columnes).

Exemple 30. A l'exemple anterior la primera és d'ordre $2 \times 3$, i la segona és d'ordre $2 \times 2$, o bé, simplement, d'ordre 2.

En general, una matriu $A$ d'ordre $n \times m$ tendrà l'aspecte

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

o bé de forma compacte $A = (a_{ij})$ on $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, m$. Per tant, en últim terme, una matriu d'ordre $n \times m$ no és res més que una successió de $n \cdot m$ nombres, que, per diverses raons, s'ha preferit escriure en forma de quadre.

**Notació 1 (conjunt de les matrius).** El conjunt de totes les matrius d'ordre $n \times m$ s'indica per $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ o, simplement, $\mathcal{M}_{n\times m}$. Si $m = n$, es sol escriure $\mathcal{M}_n$.[1]

## Tipus de matrius

**Definició 21 (matriu nul·la).** Una matriu és *nul·la* quan tots els seus elements són iguals a zero, és a dir, $a_{ij} = 0$, per a tot $i, j$.

**Exemple 31.** Les matrius

*a)*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*b)*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

són nul·les (d'ordre $3 \times 4$ i $3 \times 3$ respectivament).

**Definició 22 (matriu oposada).** Donada una matriu $A$, la seva *oposada* és la matriu formada pels elements d'$A$ amb signe oposat, és a dir, $-A = (-a_{ij})$.

**Exemple 32.** La matriu $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -a & 6 \end{pmatrix}$ és la matriu oposada de la matriu $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & a & -6 \end{pmatrix}$.

**Definició 23 (matriu filera).** Una matriu es diu *matriu filera* si només té una filera, és a dir, quan és d'ordre $1 \times m$.

**Definició 24 (matriu columna).** Una matriu s'anomena *matriu columna* si només té una columna, o sigui quan té ordre $n \times 1$.

**Exemple 33.** Les matrius

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

són matrius filera i columna respectivament.

[1] La raó de tenir $\mathbb{R}$ és especificar que les entrades de la matriu pertanyen al conjunt de nombres reals $\mathbb{R}$.

**Definició 25 (diagonal principal).** S'anomena *diagonal principal* d'una matriu quadrada al conjunt d'elements que van del vèrtex superior esquerre a l'inferior de la dreta.

**Exemple 34.** A la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

els nombres $3, -1$ i $7$ són els que formen la diagonal principal.

**Definició 26 (matriu unitat).** Es diu *matriu unitat* (o *matriu identitat*) a aquella matriu quadrada en la qual tots els elements de la diagonal principal són uns i la resta d'elements són zeros. Es simbolitza per $I$ o $Id$. Si es vol indicar el seu ordre, aleshores s'indica mitjançant un subíndex:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

són les matrius unitat d'ordre 2, d'ordre 3, etc.

**Definició 27 (matriu triangular).** Una matriu $A = (a_{ij})$ es diu *triangular* quan $a_{ij} = 0$ per a tot $i < j$ o bé quan $a_{ij} = 0$ per a tot $i > j$. En paraules, quan els elements per davall o per damunt de la diagonal principal són zero.

**Definició 28 (matriu diagonal).** Una matriu $A = (a_{ij})$ s'anomena *diagonal* si, i només si, $a_{ij} = 0$ per a tot $i \neq j$, és a dir, els elements que no estan a la diagonal principal són zero.

**Observació 4.** Una matriu no té res que veure amb un determinant: un determinant és un nombre i una matriu una col · lecció de nombres. Encara que a tota matriu quadrada li podem associar un determinant, que es denota per $|A|$ o bé $\det(A)$.

## Igualtat entre matrius

**Definició 29 (igualtat de matrius).** Direm que dues matrius són *iguals* si són del mateix ordre i els seus elements respectius són iguals.

**Exemple 35.** Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3-3 \\ \pi & 24/2 & -4 \end{pmatrix}$$

són iguals.

**Exercici 77.** Calculeu el valor de $x$ perquè les matrius $A$ i $B$ siguin iguals, amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -x+4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

## 3.2 Operacions amb matrius

A continuació es defineixen les operacions que es poden realitzar amb matrius.

### 3.2.1 Suma i diferència de matrius

Definició 30 (suma i resta de matrius). La *suma* de dues matrius del mateix ordre es fa sumant els elements respectius. La *diferència* (o resta) es calcula restant els elements corresponents.

És a dir, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són dues matrius d'ordre $n \times m$, aleshores les matrius $A + B$ i $A - B$ són iguals $(a_{ij} + b_{ij})$ i $(a_{ij} - b_{ij})$, respectivament, i tenen ordre $n \times m$.

Exemple 36. Vegem una diferència de matrius:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-1) & 3-5 \\ 5-5 & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La suma es fa de manera anàloga.

Exercici 78. Calculeu $A - B$, $B - A$ i $-A + B$, amb

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

### 3.2.2 Multiplicació d'un nombre per una matriu

Definició 31 (multiplicació de nombres i matrius). Per *multiplicar un nombre per una matriu* es multiplica aquest nombre per cadascun dels elements de la matriu.

De vegades aquest nombre s'anomena *escalar*.

Exemple 37.

$$-5\cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cdot 1 & -5\cdot(-2) & -5\cdot 0 \\ -5\pi & -5\cdot 12 & -5\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -5\pi & -60 & 20 \end{pmatrix}$$

Exercici 79. Calculeu

$$-3\cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5\cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

### 3.2.3 Transposició d'una matriu

Definició 32 (transposició de matrius). La *transposició* d'una matriu és l'operació per la qual es canvien de manera ordenada les fileres per les columnes (i viceversa). La *matriu transposta* de la matriu $A$ es representa per $A^t$.

Exemple 38. La matriu transposta de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

és la matriu

$$A^t = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 5 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercici 80. Escriviu les transpostes de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.2.4 Producte de dues matrius

No sempre és possible multiplicar dues matrius. Per aquest motiu, abans de definir la multiplicació de dues matrius hem de veure quina condició han de complir les matrius que volem multiplicar per a que aquesta operacióes pugui fer.

**Condició 1** (producte de dues matrius). *Per poder multiplicar dues matrius s'ha de complir que el nombre de columnes de la primera matriu (la que es col · loca a l'esquerra) ha de coincidir amb el nombre de fileres de la segona (la que es col · loca a la dreta).*

Aquesta condició, a més de ser necessària per a la multiplicació de dues matrius, és suficient.

Degut a què el nombre de fileres i de columnes de dues matrius poden ser qualssevol, pot ocorre que es pugui calcular el producte $A \cdot B$ de les matrius $A$ i $B$, però que no es pugui calcular $B \cdot A$.

Exemple 39. No podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

però sí podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vegem ara com es multipliquen dues matrius.

Definició 33 (multiplicació de matrius). Siguin $A$ i $B$ dues matrius d'ordres $n \times m$ i $m \times p$ respectivament. El seu producte

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{m2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

té ordre $n \times p$ i es calcula de la manera següent:

1. L'element $c_{ij}$, que és l'element del resultat $A \cdot B$, es calcula multiplicant la filera $i$-èssima de $A$ per la columna $j$-èssima de $B$, és a dir,

   $$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{im} \cdot b_{mj}$$

   (l'element $c_{11}$ s'obté multiplicant la filera 1 de $A$ per la columna 2 de $B$, l'element $c_{12}$ s'obté multiplicant la filera 1 de $A$ per la columna 2 de $B$, etc.)

2. Això es realitza per a totes les fileres i columnes

Amb aquesta definició, l'ordre de la matriu $A \cdot B$ és $n \times p$. Esquemàticament:

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & AB \\ n \times m & & m \times p & & n \times p \end{matrix}$$

Exemple 40.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2(-2) + 0 \cdot 3 + (-3)(-4) & 2(-1) + 0 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 6 \\ \\ 0(-2) + 1 \cdot 3 + 1(-4) & 0(-1) + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

És a dir, l'element que ha d'anar, per exemple, a la 2a filera i 1a columna es calcula sumant els productes dels elements de la 2a filera de la primera matriu amb els elements de la 1a columna de la segona matriu.

Exercici 81. Calculeu els productes de matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

## 3.3 Propietats de les operacions amb matrius

### Propietats de la suma de matrius

Siguin $A, B$ i $C$ matrius d'ordre $m \times n$. Aleshores, es compleixen les propietats següents:

*a*) Associativa:
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

*b*) Commutativa:
$$A + B = B + A$$

### Propietats del producte de nombres per matrius

Siguin $a$ i $b$ nombres reals, i $A$ i $B$ matrius d'ordre $m \times n$. Aleshores, es compleixen les propietats següents:

*a*) Pseudoassociativa: $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$

*b*) Distributiva respecte la suma d'escalars: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

*c*) Distributiva respecte la suma de matrius: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

*d*) Element neutre: $1 \cdot A = A$

### Propietats del producte de matrius

*a*) Associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

*b*) Element neutre: $A \cdot I = I \cdot A = A$

*c*) Commutativa: en general, com ja hem observat, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

### Propietats distributives

*a*) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

*b*) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

### Propietats de la transposició de matrius

*a*) $(A + B)^t = A^t + B^t$

*b*) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

### Propietats dels determinants de matrius

*a*) El determinant del producte de dues matrius és igual al producte dels seus determinants, és a dir,

$$|A{\cdot}B| = |A| \cdot |B|$$

*b*) El determinant d'una matriu (quadrada) $A$ és igual al determinant de la seva matriu transposta, és a dir,

$$|A| = \left|A^t\right|.$$

Exemple 41. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenim que $|A| = -3$ i $|B| = 2$ i, per tant, $|A| \cdot |B| = -6$, que coincideix amb

$$|A{\cdot}B| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Exemple 42. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es té que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \text{ i } \left|A^t\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16.$$

## 3.4 Matriu inversa d'una matriu quadrada

Definició 34 (matriu inversa). Donada una matriu quadrada $A$, la seva *matriu inversa*, que es denota per $A^{-1}$, és una matriu del mateix ordre tal que compleix les condicions següents de forma simultània:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I, \\ A^{-1} \cdot A &= I. \end{aligned}$$

Noteu que una condició per a què una matriu tengui inversa és que sigui quadrada. Les matrius rectangulars no tenen matriu inversa perquè un dels productes no existeix (vegeu condició 1).

Definició 35 (matriu regular). Les matrius que tenen inversa s'anomenen *matrius regulars*. En altre cas, es diu que la matriu és *singular*.

Exemple 43. No totes les matrius són regulars: per exemple la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

no té inversa, ja que si en tingués arribaríem a un error: si suposem que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, aleshores s'hauria de complir que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el que implica que

$$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - d = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + d = 1 \end{cases}$$

Però la primera i la segona equació impliquen que $0 = 1$. Contradicció!.

**Teorema 5.** *Una matriu quadrada $A$ és regular si, i només si, $|A| \neq 0$. És a dir*

$$A \text{ té inversa} \iff |A| \neq 0$$

*Expressat amb paraules:*

a) *Si una matriu quadrada té inversa, aleshores el seu determinant és diferent de zero*

b) *I si el determinant d'una matriu quadrada no val zero, aleshores aquesta matriu té inversa.*

Ara sabem quina condició s'ha de complir per a què una matriu sigui regular, però com es calcula la matriu inversa d'una matriu quadrada? A continuació ho veurem.

**Teorema 6 (càlcul de la matriu inversa).** *Si $A$ és regular, aleshores*

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|},$$

*on $Adj(A)$ denota la* matriu adjunta *d'$A$, formada pels adjunts dels elements de $A$.*

**Algorisme 3 (càlcul de la matriu inversa).** *Per calcular la matriu inversa d'una matriu quadrada $A$ seguirem les passes següents:*

1. *En primer lloc calcularem $|A|$. Si aquest val $0$, ja podem assegurar que la matriu $A$ no té inversa. Si $|A| \neq 0$, seguim amb els punts següents.*

2. *Calculam la matriu adjunta de $A$, és a dir, $Adj(A)$.*

3. *Farem la transposta de $Adj(A)$. La denotarem per $(Adj(A))^t$.*

4. *Finalment, es té que*
$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}$$

Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 44. Sigui
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
Tenim que
$$|A| = -9 - 16 = -25 \neq 0$$
El fet de què aquest determinant no valgui zero ens assegura que existeix la matriu inversa de $A$. Anem a calcular-la.

La matriu adjunta de $A$ és
$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -9 & -8 & 12 \\ -6 & 3 & 8 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
La transposta de l'adjunta és, aleshores,
$$(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$
Per tant, la inversa de $A$ és:
$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}}{-25} = \begin{pmatrix} 9/25 & 6/25 & 4/25 \\ 8/25 & -3/25 & -2/25 \\ -12/25 & -8/25 & 3/25 \end{pmatrix}$$

Exercici 82. Calculeu, si en té, la matriu inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

### 3.4.1 Matriu inversa en funció d'un paràmetre

Exemple 45. Suposem que volem calcular la matriu inversa de

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu depèn del paràmetre $a$. Per tant, podem suposar que la matriu inversa de $B$ existirà o no segons el valor numèric que prengui el paràmetre $a$. ¿Què ha de valer $a$ per a què existeixi $B^{-1}$? Aquest valor de $a$ quedarà imposat per la condició

$$|B| \neq 0,$$

que és la condició que ens assegura que existeix la matriu inversa de $B$. Calculem $|B|$:

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 21a - 7$$

Aquest determinant val 0 si, i només si, quan $21a - 7 = 0$. És a dir, quan $a = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. Aquí apareixen dues possibilitats:

*a*) Si $a = 1/3$, tenim que $|B| = 0$, i, per tant, no existeix la matriu inversa de $B$.

*b*) Si $a \neq 1/3$, aleshores $|B| \neq 0$, i, per tant, existeix $B^{-1}$. En aquest cas, podem calcular la matriu inversa de $B$, que òbviament dependrà del paràmetre $a$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & a \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-7a & -1 & 7 \\ -1 & -3 & 21 \\ a & 3a & -7 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu inversa de $B$ és:

$$B^{-1} = \frac{(Adj(B))^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2-7a & -1 & a \\ -1 & -3 & 3a \\ 7 & 21 & -7 \end{pmatrix}}{21a-7} = \begin{pmatrix} \frac{2-7a}{21a-7} & \frac{1}{7-21a} & \frac{a}{21a-7} \\ & & \\ \frac{1}{7-21a} & \frac{3}{7-21a} & \frac{3a}{21a-7} \\ & & \\ \frac{7}{21a-7} & \frac{21}{21a-7} & \frac{7}{7-21a} \end{pmatrix}$$

Exercici 83. Calculeu la matriu inversa de $B$ en funció del paràmetre $\alpha$, amb

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

## 3.5 Rang d'una matriu d'ordre qualsevol

Definició 36 (menor d'una matriu). Si en una matriu qualsevol (no necessàriament quadrada) seleccionam $p$ fileres i $p$ columnes, els elements en què s'encreuen aquestes $p$ fileres i $p$ columnes formen una submatriu quadrada d'ordre $p$. El determinant d'aquesta submatriu s'anomena *menor d'ordre $p$* (o simplement *menor*) de la matriu inicial.

Exemple 46. De la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ \pi & 12 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pi & -4 \end{vmatrix}$$

és un menor d'ordre 2.

En aquest cas, hem seleccionat els elements en els quals s'encreuen les fileres 1 i 2 i les columnes 1 i 3.

Definició 37 (rang d'una matriu). Donada una matriu qualsevol $A$, es defineix el seu *rang* al màxim ordre dels seus menors no nuls. És a dir, el rang d'una matriu és un nombre $p$ que compleix les condicions següents:

*a*) Existeix un menor no nul d'ordre $p$

*b*) Tots els menors d'ordre $p+1$ són nuls, o bé no existeixen menors d'ordre $p+1$.

En altres paraules, calculem el

$$\max\{p \mid \text{ existeix un menor d'ordre } p \text{ no nul }\}.$$

El rang d'una matriu $A$ es representa per $rg\,(A)$ o simplement $rgA$.

Exemple 47. El rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

és 3, ja que existeix, al menys, un menor d'ordre 3 no nul, com, per exemple, el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

i no hi ha cap menor d'ordre 4.

Tot seguit, veurem com podem calcular el rang d'una matriu de forma efectiva. Per això, hem d'introduïr el concepte d'independència lineal. En primer lloc, recordem la definició de combinació lineal:

Definició 38 (combinació lineal). Una línia $L$ és *combinació lineal* de $n$ línies $L_1$, $L_2$, ..., $L_n$ si, i només si, podem obtenir la línia $L$ com a suma de les línies $L_1$, ..., $L_n$ prèviament multiplicades per nombres reals, és a dir,

$$L = a_1 \cdot L_1 + a_2 \cdot L_2 + \ldots + a_n \cdot L_n.$$

Exemple 48. En la matriu següent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la tercera columna és combinació lineal de les dues primeres, ja que es pot aconseguir sumant la primera columna multiplicada per 2 i la segona columna multiplicada per 3, és a dir, $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$.

**Proposició 7** (relació de la combinació lineal i els determinants). *Per un determinant qualsevol, són equivalents:*

- *Existeix una línia que és combinació lineal de les altres línies paral·leles*
- *Totes les línies són combinació lineal de les altres línies paral·leles*
- *El determinant val 0*

Exemple 49. Tal com hem dit en l'example anterior (exemple 48), la tercera columna és combinació lineal de les dues anteriors. Per la proposició, això vol dir que:

- la primera columna també és combinació lineal de la segona i tercera columnes
- la segona columna és combinació lineal de la primera i tercera columnes
- el determinant
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$
val 0.
- qualsevol filera és combinació lineal de les altres fileres

Definició 39 (dependència lineal). Una línia és *linealment dependent* de $n$ línies $L_1$, $L_2$, ..., $L_n$ si, i només si, $L$ es pot expressar com a combinació lineal de $L_1$, ..., $L_n$.

En cas contrari, $L$ és *linealment independent*, és a dir, no existeixen cap nombres $a_1$, ..., $a_n$ tals que $L$ sigui igual a $a_1 \cdot L_1 + \ldots + a_n \cdot L_n$.

**Proposició 8** (fites del rang d'una matriu). *Es pot veure que, si $A$ és una matriu qualsevol d'ordre $n \times m$, aleshores:*

*a)* *$rgA$ és igual al nombre de línies linealment independents*

*b)* $rgA \leq \min\{m, n\}$

*c)* $rgA \geq 0$. *I* $rgA = 0$ *si, i només si, $A$ és igual a la matriu nul·la.*

*d)* *Si $A$ no és la matriu nul·la, aleshores* $rgA \geq 1$.

**Algorisme 4** (càlcul del rang d'una matriu de dalt a baix). *Per a calcular el rang d'una matriu $A$ d'ordre $n \times m$ es segueixen els passos següents:*

*a)* *Es calcula el mínim del nombre de fileres i columnes d'$A$, és a dir, $r = \min\{n, m\}$. Aquest és el rang màxim que pot tenir $A$.*

*b) Es calculen els menors d'ordre $r$ d'$A$. Si algun d'aquests és no nul, aleshores automàticament $rgA = r$. En cas contrari, $rgA < r$.*

*Notem que només calcularem* tots *els menors d'ordre $r$ quan* tots *ells sigui nuls. Tot d'una que trobem un menor d'ordre $r$ no nul, ja no calcularem cap més menor d'ordre $r$ i conclourem que $rgA = r$.*

*c) Es procedeix de manera anàloga al pas anterior pels menors d'ordre $r-1$ i es conclou que $rgA = r-1$ o bé $rgA < r-1$.*

*d) Es repeteixen aquestes passes successivament.*

Exemple 50. Suposem que volem calcular el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

*a*) Per la proposició 8, tenim que $rgA \leq \min\{3, 4\} = 3$.

*b*) Hem de veure si existeix un menor d'ordre 3 no nul. Hi ha quatre possibilitats per a formar menors d'ordre 3: *a*) triar les columnes 1, 2 i 3, *b*) triar les columnes 1, 2 i 4, *c*) triar les columnes 1, 3 i 4 i *d*) triar les colimnes 2, 3 i 4. Si algun d'aquests menors fos no nul, aleshores el rang d'$A$ seria 3. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $rgA < 3$.

*c*) Vegem si és dos: existeix un menor no nul d'ordre 2? Sí, per exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$. Per la qual cosa, $rgA = 2$.

Exercici 84. Calculeu el valor del rang de la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

### 3.5.1 Rang d'una matriu en funció d'un paràmetre

De vegades, una matriu pot incloure un paràmetre. El rang d'aquesta matriu dependrà, aleshores, del valor que tengui aquest paràmetre. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 51. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Anem a calcular el seu rang. De manera anàloga a l'exemple 50, calcularem el rang d'$A$ arran dels menors més grans possibles. Així, en aquest exemple començarem amb

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 2\alpha + 6 - 4\alpha = 16 - 2\alpha,$$

que és el menor més gran que es pot treure a partir d'$A$. Aquest menor val 0 si, i només si, $16 - 2\alpha = 0$, és a dir, quan $\alpha = 8$.

Diferenciem casos:

*a*) Si $\alpha \neq 8$: existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0 ($\Delta \neq 0$), i no hi ha menors d'ordre superior a 3 ($rgA \leq 3$). Per tant, el rang de $A$ és 3.

*b*) Si $\alpha = 8$: tots els menors d'ordre 3 (de fet, l'únic menor d'ordre 3 en aquest cas) són zero. Per tant, $rgA < 3$. Cerquem, aleshores, un menor d'ordre 2 diferent de 0. Per exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

per la qual cosa el rang és 2.

En conclusió, si $\alpha \neq 8$, aleshores $rgA = 3$. I si $\alpha = 8$, aleshores $rgA = 2$.

Exercici 85. Calculeu $rgA$ en funció del paràmetre $\alpha$, on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

## 3.6 Exercicis proposats

Exercici 86. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu, si és possible, $AB$ i $BA$.

Exercici 87. Calculeu $3AA^t - 2I$, amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 88. Comproveu que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ amb les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 89. Determineu els valors de $m$ per als quals es verifica que $X^2 - \frac{5}{2}X + I = \mathbf{0}$, amb

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 90. Determineu $a$ i $b$ de forma que es verifiqui que $A^2 = A$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

Exercici 91. Trobeu totes les matrius $X$ de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ tals que } X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 92. Calculeu dos nombres reals $m$ i $n$ tals que $A + mA + nI = \mathbf{0}$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 93. Siguin $A$ i $B$ les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobeu les condicions que han de complir els coeficientes $a, b$ i $c$ perquè es verifiqui que $AB = BA$.

Exercici 94. Trobeu dues matrius $X$ i $Y$ que verifiquin el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2X - 3Y & = & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Exercici 95. Calculeu, si és possible, la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 96. Calculeu la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 97. Digueu en funció dels paràmetres corresponents quan les matrius següents són regulars. En cas de ser-ho, trobeu la seva inversa:

*a*)
$$A = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{pmatrix}$$

*b*)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

*c*)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

*d*)
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \alpha+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

*e*)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a-1 & -2 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

*f*)
$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$$

*g*)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*h*)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

*i*)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

*j*)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

*k)*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*l)*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*m)*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*n)*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

*o)*

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

*p)*

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

Exercici 98. Calculeu el rang de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercici 99. Estudieu el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 100. Estudieu el rang de la matriu següent en funció de $a, b$ i $c$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

# 4

# Sistemes d'equacions lineals

## 4.1 Definicions

**Definició 40 (sistema d'equacions lineal).** Un *sistema d'equacions lineals de $m$ equacions i $n$ incògnites* és un conjunt d'equacions que tenen l'aspecte general següent:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\},$$

de manera que s'han de verificar conjuntament.

Anomenarem:

*a*) A $x_1$, ..., $x_n$ les *incògnites* del sistema

*b*) A $a_{ij}$, on $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$, els *coeficients* del sistema

*c*) A $b_1$, ..., $b_m$ els *termes independents* del sistema

Una *solució* del sistema és un conjunt de valors $c_1$, ..., $c_n$ de manera que verifiquen simultàniament cada equació, és a dir,

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}\cdot c_1 + a_{12}\cdot c_2 + \ldots + a_{1n}\cdot c_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot c_1 + a_{22}\cdot c_2 + \ldots + a_{2n}\cdot c_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\cdot c_1 + a_{m2}\cdot c_2 + \ldots + a_{mn}\cdot c_n & = & b_m \end{array}\right\}.$$

Aquests valors es poden escriure en forma de $n$-tupla ordenada $(c_1, \ldots, c_n)$.

*Resoldre* el sistema és trobar totes les $n$-tuples que són solució d'aquest.

## 4.2 Tipus de sistemes

**Definició 41 (tipus de sistemes lineals).** Atenent al nombre de solucions, un sistema pot esser de diversos tipus:

- Si un sistema no té solució, s'anomena *incompatible*
- Si té solució, s'anomena *compatible*
  - Si el sistema té una sola solució, aleshores s'anomena *compatible determinat*
  - Si el sistema té més d'una solució, aleshores s'anomena *compatible indeterminat*. En els sistemes lineals, un sistema compatible indeterminat té infinites solucions (no en pot tenir un nombre finit distint d'1).
    - Un sistema compatible indeterminat es diu *simplement indeterminat* si el conjunt de solucions depèn d'un paràmetre
    - Un sistema compatible indeterminat es diu *doblement indeterminat* si el conjunt de solucions depèn de dos paràmetres[1]

**Definició 42 (sistema homogeni).** Un sistema d'equacions s'anomena *homogeni* si tots els seus termes independents són iguals a zero. És a dir, els sistemes d'equacions tenen la pinta següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}.$$

**Exemple 52.** El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x - y + 6z & = & -9 \\ -x + 3y - 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

[1] Per exemple, les solucions del sistema format per l'única equació $2x - 3y + 4z = 1$ es poden expressar com $y = a$, $z = b$ i $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2b$, on $a$ i $b$ són nombres reals qualsevols (paràmetres).

és compatible, ja que el conjunt de tres nombres $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$ és solució del sistema, donat que

$$\left.\begin{array}{rcl} 4\cdot(-2) - 1 + 6\cdot 0 & = & -9 \\ -(-2) + 3\cdot(-1) - 2\cdot 0 & = & -1 \end{array}\right\}$$

En canvi, el conjunt $x = 3$, $y = 27$, $z = 1$ no es solució, ja que alguna de les equacions no es verifica (la segona en aquest cas):

$$\left.\begin{array}{rcl} 4\cdot 3 - 27 + 6\cdot 1 & = & -9 \\ -3 + 3\cdot 27 - 2\cdot 1 & \neq & -1 \end{array}\right\}.$$

Exemple 53. El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ x + y & = & 2 \end{array}\right\}$$

és incompatible (no tiene solució), ja que no existeixen dos nombres, $x$ i $y$, tals que la seva suma sigui, a la vegada, 3 i 2 (o la suma dóna 3 o dóna 2, pero no els dos valors de cop).

## 4.3 Sistemes matricials

Per resoldre sistemes d'equacions de forma còmoda, és necessari passar de la seva forma algebraica clàssica (com a conjunt d'equacions) a una forma matricial (com a igualtat entre matrius). Això facilitarà enormement esbrinar el nombre de solucions d'un sistema i el seu càlcul.

Un sistema de $m$ equacions i $n$ incògnites $x_1$, ..., $x_n$ adopta la forma general:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}.$$

Aquest es pot expressar de forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o bé en la forma més compacte

$$A \cdot x = b,$$

on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

La matriu $A$ s'anomena *matriu de coeficients del sistema*, la matriu (filera) $b$ s'anomena *matriu de termes independents* i $x$ reb el nom de *matriu de variables*.

Anomenarem *matriu ampliada (o completa) del sistema* i la representarem com a $M$, a la matriu d'ordre $m \times (n+1)$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Exemple 54. Per exemple, en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & -2 \end{array}\right\}$$

les incògnites són $x, y$ i $z$, i els termes independients són 0 i $-2$. La matriu dels coeficients i la matriu ampliada són, respectivamente,

$$A = \left( \begin{array}{rrr} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array} \right), \; M = \left( \begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

Exemple 55. El sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x - y + 6z & = & -9 \\ -x + 3y - 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

és el mateix que

$$\left( \begin{array}{rrr} 4 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left( \begin{array}{r} -9 \\ -1 \end{array} \right)$$

## 4.4 Regla de Cràmer

La regla de Cràmer permet trobar la solució de sistemes d'equacions lineals en els que es verifiquin, simultàniament, les condicions següents:

- Hi ha tantes equacions com a incògnites
- La matriu de coeficients té determinant no nul

Amb aquestes condicions, la regla de Cràmer permet trobar la solució del sistema. En aquest cas, podem assegurar que només existeix una única solució (el sistema és compatible determinat), però això ho veurem més endavant (Secció 4.5).

**Algorisme 5** (regla de Cràmer). *Sigui*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}.$$

*un sistema d'equacions d'n equacions amb n incògnites tal que el determinant $|A|$ de la seva matriu de coeficients $A$ és no nul. Aleshores, el sistema té una sola solució, $(x_1, \ldots, x_n)$, que ve donada per:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Exemple 56. Sigui el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & -2 \\ x + y & = & 1 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema té 3 equacions i 3 incògnites i, a més, es compleix que

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 6 = -8 \neq 0$$

Per tant, podem aplicar la regla de Cràmer, amb el que la solució del sistema és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{-8} = \frac{-7}{8}$$

Per tant, $(5/8, 3/8, -7/8)$ és la solució del sistema d'equacions.

Exercici 101. Resoleu el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} -x-2y+5z & = & -3 \\ 3x+3z & = & 4 \\ 2x-2y+z & = & 0 \end{array}\right\}$$

## 4.5 Discussió d'un sistema de equacions

Per suposat, no tots els sistemes d'equacions lineals tenen tantes equacions com incògnites, i fins i tot en aquest cas, no tots compleixen que el determinant de la seva matriu de coeficients sigui no nul. Per tant, la regla de Cràmer no és aplicable en aquests casos. Ara bé, tendrem algorismes per a la resolució dels sistemes d'equacions més generals (Secció 4.6)

Ara bé, abans d'ocupar-nos de la resolució general dels sistemes d'equacions lineals, ens interessarem sobre els criteris que han de complir per a què aquests tenguin solució. És a dir, estudiarem en quins casos un sistema d'equacions té solució i, en aquest cas, quantes en té. D'aquesta manera, podem assegurar-nos que, abans de resoldre un sistema d'equacions, aquest té una solució i, per tant, no començarem a resoldre sistemes que no tenguin solució, amb el conseqüent guany de temps.

**Teorema 9** (teorema de Rouché-Frobenius)**.** *Sigui un sistema d'equacions lineals qualsevol amb $n$ incògnites. I siguin $A$ la matriu de coeficients i $M$ la matriu ampliada. Aleshores:*

- $rgA \neq rgM \iff$ *El sistema és incompatible (no té solució)*
- $rgA = rgM \iff$ *El sistema és compatible (té solució)*
  - $rgA = rgM = n \iff$ *El sistema és compatible determinat (té una única solució)*
  - $rgA = rgM < n \iff$ *El sistema és compatible indeterminat (té infinites solucions)*

D'aquesta manera, per saber si un sistema d'equacions té solució o no, en primer lloc s'han de calcular els valors de $rgA$ i $rgM$ i procedir a classificar el sistema segons la taula anterior.

Observació 5. Recordem que el rang d'una matriu és el nombre de línies linealment independents (proposició 8). Per tant, clarament, tenim que

$$rgA \leq rgM$$

Notem que, en el cas d'un sistema homogeni, aquest desigualtat realment és una igualtat, és a dir, $rgA = rgM$.

Observació 6. La idea que s'amaga darrera del teorema de Rouché-Frobenius (teorema 9) és analitzar si una equació és combinació lineal de les altres: si això passa, aleshores la podem suprimir del sistema, ja que aquesta equació no ens aporta cap informació. Per exemple, en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+3y+4z & = & 2 \\ x+2y+3z & = & 1 \\ x+y+z & = & 1 \end{array}\right\}$$

tenim que la tercera equació és combinació lineal de les dues primeres ($L_3 = L_1 - L2$). En el nostre cas, això és el mateix que dir que el rang de la matriu ampliada és menor que 3 (el nombre d'incògnites), per aplicació de proposició 8, ja que les fileres de la matriu ampliada són les equacions del sistema d'equació. Si el rang de la matriu ampliada coincideix amb el nombre d'incògnites, vol dir que totes les equacions són linealment independents i, per tant, no n'hi ha cap que sigui deduïble de les altres.

D'altra banda, la comparació entre els rangs de la matriu ampliada i la matriu de coeficients ens dóna informació sobre la compatibilitat del sistema. Per a què un sistema tengui solució, la independència lineal de les seves equacions ha de ser la mateixa que la independència lineal de les equacions considerades sense termes independents.

Exemple 57. Sigui el sistema de equacions

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x-y+z & = & 0 \\ x+3z & = & -2 \\ 3x-y+4z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Per a determinar quin tipus de sistema és, hem de calcular els rangs de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- Com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

aleshores $rgA < 3$. Si cercam un menor d'ordre 2, en trobem un no nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Per tant, $rgA = 2$.

- Com que $rgA = 2$ i $rgA \leq rgM$, sabem que $rgM \geq 2$. Hem de veure si $rgM$ pot ser igual a 3. Per aixo, hem de calcular tots els menors d'ordre 3 de $M$. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

pel que $rgM = 2$.

- Per tant, $rgA = rgM = 2 < 3$. Per la qual cosa, aquest sistema és compatible indeterminat. Per tant, té un nombre infinit d'incògnites.

Exercici 102. Clasifiqueu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ x - 3z & = & 3 \\ 3x - 3y - 2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

### 4.5.1 Discussió d'un sistema de equacions en funció d'un paràmetre

Quan en un sistema apareix un paràmetre en els termes independents o en els coeficients del sistema, aleshores la classificació d'aquest depèn del valors que té aquest paràmetre.

Exemple 58. Sigui el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - 3y + 5z & = & 0 \\ x - 3z & = & -2 \\ 3x - \alpha y + 2z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Estudiem els valors dels rangs de les seves matrius de coeficients i ampliada en funció del paràmetre $\alpha$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -\alpha & 2 \end{vmatrix} = 33 - 11\alpha$$

Pel que, $|A|$ valdrà zero si, i només si, $33 - 11\alpha = 0$, és a dir, si $\alpha = 3$. D'aquí es segueix que hem de diferenciar casos:

*a*) Si $\alpha \neq 3$, aleshores $|A| \neq 0$. Per tant, $rgA = 3$. I, per tant, com que $rgA \leq rgM \leq 3$, tenim que $rgM = 3$. I tenim tres incògnites, pel que el sistema és compatible determinat (té una única solució per a cada valor concret de $\alpha$).

*b*) Si $\alpha = 3$, aleshores les matrius de coeficients i ampliades són:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, sabem que $rgA < 3$ (l'únic menor d'ordre 3, $|A|$, és zero). I com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

aleshores $rgA = 2$ (hi ha un menor d'ordre dos no nul).

Queda ara calcular el rang de $M$. Sabem segur que $rgM$ com a mínim és 2. Hem de veure si pot ser tres. Per això, calculem tots els menors d'ordre tres:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, $rgM = 2$.

En resum, si $\alpha \neq 3$, el sistema és compatible determinat. I si $\alpha = 3$, el sistema és compatible indeterminat.

Exercici 103. Clasifiqueu el sistema següent en funció del paràmetre $\alpha$:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ \alpha x - 3z & = & 3 \\ 3x - 3y - 2z & = & 3 \end{array}\right\}$$

Notem que l'aplicació del teorema de Rouché-Frobenius (teorema 9) no proporciona la solució del sistema, sinó tan sols quantes en té. En l'apartat següent es mostra com trobar aquestes solucions.

## 4.6 Resolució d'un sistema d'equacions

La resolució d'un sistema d'equacions varia lleugerament segons si aquest és un sistema compatible determinat o un sistema compatible indeterminat. Ara bé, a grans trets, sempre es realitzen els mateixos passos:

- En primer lloc, s'esbrina si el sistema és compatible o incompatible usant el teorema de Rouché-Frobenius (teorema 9). En cas de què el sistema sigui incompatible, s'ha acabat (no hi ha solució per tant no es pot calcular).
- Quan es té un sistema compatible, es determina si aquest és determinat o indeterminat.
- En el primer cas, usant la regla de Cràmer es resol el sistema i es calcula la seva única solució. En l'altra cas, es transforma el sistema en un altre compatible determinat, el qual depèn d'un paràmetre, i es calcula la seva solució, aplicant de nou la regla de Cràmer. En aquest cas, s'obté una solució que depèn d'un paràmetre.

Vegem els dos tipus de sistemes a continuació.

### 4.6.1 Sistema compatible determinat

Exemple 59. Sigui el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x-2y+3z & = & -2 \\ 4x-3y & = & 0 \\ y+z & = & -1 \\ 3x-2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Volem resoldre aquest sistema. Per fer-ho, escrivim les matrius de coeficients i ampliada, respectivament:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i calculem els seus rangs:

- $A$ té un menor d'ordre 3 no nul:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0,$$

  Per tant, $rgA = 3$ (recordem que $rgA \leq 3$ perquè no hi pot haver menors d'ordre 4).

- $|M| = 0$, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

  (que és l'únic menor d'ordre 4 de $M$). Per tant, $rgM = 3$.

- Com que $rgA = rgM = 3$, aleshores el sistema és compatible determinat (teorema de Rouché-Frobenius)

Per tant, per ara sabem que el sistema té una solució i que aquesta és única, però encara no sabem com calcular-la. El pas següent és reduïr el nombre d'equacions del sistema: el nostre sistema té tres incògnites i quatre equacions. Per tant, de qualque manera, *sobra* una equació. Per saber quina sobra, trobarem quines equacions són (linealment) independents unes de les altres. Ara bé, hem vist que el menor

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

era diferent de zero. Aquest menor correspon a les fileres 2a, 3a i 4a. Això vol dir que les equacions 2a, 3a i 4a són independents unes de les altres (tres línies són linealment independents si el seu determinant no és zero). O sigui, la primera equació és redundant (és combinació lineal de les altres).

Aleshores, a partir d'ara les úniques equacions que es tendran en compte seran la segona, la tercera i la quarta. El nostre sistema és ara:

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x - 3y & = & 0 \\ y + z & = & -1 \\ 3x - 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Ara el nostre sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer ($\Delta \neq 0$ i hi ha tantes equacions com a incògnites). Aleshores, aplicant aquesta regla es té que la seva solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{3}{-17} = \frac{-3}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{4}{-17} = \frac{-4}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{13}{-17} = \frac{-13}{17}$$

Per tant, l'única solució del sistema és:

$$x = \frac{-3}{17},\ y = \frac{-4}{17},\ z = \frac{-13}{17}$$

Exercici 104. Resoleu el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} 4x+y & = & -1 \\ -x+3y & = & 2 \\ 3x+4y & = & 1 \end{array}\right\}$$

### 4.6.2 Sistema compatible indeterminat

Exemple 60. Sigui el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x+y-3z & = & 1 \\ 2x-y+z & = & -1 \\ 10x-y-z & = & -1 \end{array}\right\}$$

La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, hem de calcular $rgA$ i $rgM$ per a saber de quin tipus de sistema es tracta:

- En primer lloc, calculem el determinant d'$A$:

  $$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

  Per tant, $rgA<3$. I com que

  $$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=6+6=12\neq 0,$$

  aleshores $rgA=2$.

- Per a calcular $rgM$, mirem si existeixen menors d'ordre tres no nuls. Ja sabem que $|A|=0$. Per tant, ens queden tres menors d'ordre tres a calcular:

  $$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

  Per tant, el $rgM$ no pot ser 3. I com que $rgA\leq rgM$, tenim que $rgM=2$.

- Amb tot, el sistema és compatible indeterminat, ja que $rgA=rgM=2<$ nombre d'incògnites del sistema. Per tant, té infinites solucions.

El menor que ha decidit el rang d'ambdues matrius ha estat

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Per tant, aquest és el menor que indica quines són les *les equacions i incògnites principals* del sistema. Aquest menor correspon a les fileres 1a i 2a i a les columnes 1a i 3a. Per les que les úniques equacions que es tendran en compte a partir d'ara seran la primer i la segona. D'altra banda, aïllarem a l'esquerra del símbol =, les incògnites $x$ i $z$ (que són la primera i la tercera), i es passaran a la dreta de l'igual els termes de la incògnita $y$. Aleshores, el nostre sistema és ara:

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x - 3z & = & 1 - y \\ 2x + z & = & -1 + y \end{array}\right\}$$

Les incògnites $x$ i $z$ depenen d'una tercera incògnita, $y$, que pot tenir el valor que es vulgui. És a dir, $y$ és un paràmetre. Per a fer constar aquest fet i no confondre una incògnita amb un paràmetre, es fa el canvi de variable $y = \lambda$, on $\lambda$ és un nombre real qualsevol. Amb tot el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x - 3z & = & 1 - \lambda \\ 2x + z & = & -1 + \lambda \end{array}\right\}$$

Ara volem resoldre aquest sistema que té incògnites $x$ i $z$. Aquest sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer (té tantes equacions com a incògnites i el determinant de la matriu de coeficients és no nul, ja que aquest és $\Delta$). Aplicant la regla de Cràmer, s'obté que:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{12} = \dfrac{-2+2\lambda}{12} = \dfrac{2\,(-1+\lambda)}{2 \cdot 6} = \dfrac{-1+\lambda}{6} \\ z & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 1-\lambda \\ 2 & -1+\lambda \end{vmatrix}}{12} = \dfrac{-8+8\lambda}{12} = \dfrac{4\,(-2+2\lambda)}{4 \cdot 3} = \dfrac{-2+2\lambda}{3} \end{array}$$

Per tant, les solucions del sistema d'equacions són:

$$x = \frac{-1+\lambda}{6},\ y = \lambda\ z = \frac{-2+2\lambda}{3},$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ és un nombre qualsevol.

Exercici 105. Resoleu el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rcr} x - 5y + 2z & = & -3 \\ -5x - y & = & 2 \\ -4x - 6y + 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

### 4.6.3 Sistemes d'equacions amb un paràmetre

La solució, en cas d'existir, d'un sistema d'equacions lineals en el que apareix un paràmetre dependrà del valors d'aquest paràmetre. Vegem-ne un exemple.

Exemple 61. Sigui el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha x+y+z & = & 4 \\ x+y+z & = & \alpha \\ x-y+\alpha z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Aquest sistema depèn del paràmetre $\alpha$. L'existència de solucions i quines siguin aquestes solucions, en cas d'existir, dependrà, doncs, del valor d'$\alpha$.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{array}\right),\ M=\left(\begin{array}{cccc} \alpha & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 2 \end{array}\right)$$

En primer lloc, hem de classificar el sistema. Per tant, hem de calcular $rgA$ i $rgM$. Però, com què ambdues matrius depenen d'$\alpha$, aquests rangs també dependran d'aquest paràmetre. D'aquesta manera, hem d'estudiar els rangs de $A$ i $M$ en funció d'$\alpha$.

Comencem, per exemple, amb la matriu de coeficients. Prenem el menor més gran possible:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{array}\right|=\alpha^2-1$$

Aquest menor valdrà zero si, i només si,

$$\alpha^2-1=0 \iff \alpha^2=1 \iff \alpha=\pm 1$$

Per tant, hem de considerar diverses possibilitats:

*a*) Si $\alpha \neq \pm 1$, aleshores $|A| \neq 0$. Per tant, existeix un menor d'ordre 3 no nul. El que implica que, $rgA=3$. I aleshores $rgM=3$. Per tant, el sistema és compatible determinat. I a més es compleixen les condicions de la regla de Cràmer. Per tant,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left|\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{array}\right|}{\alpha^2-1}=\frac{-\alpha^2+3\alpha+4}{\alpha^2-1}=\frac{(\alpha-4)(-\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{4-\alpha}{\alpha-1} \\ y &= \frac{\left|\begin{array}{ccc} \alpha & 4 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{array}\right|}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^3-7\alpha+6}{\alpha^2-1}=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{\alpha+1} \end{aligned}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha - 10}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha + 5)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}$$

Per tant, per a cada possible valor de $\alpha$, tenim una única solució.

*b*) Si $\alpha = 1$, aleshores les matrius $A$ i $M$ són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esbrinem el rang de $M$. Per això, calculem tots els seus menors d'ordre 4, excepte $|A|$ que ja hem calculat. Ara bé, no importa calcular-los tots[2], ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Per tant, tenim que $rgM = 3$. Ara bé, $rgA \neq 3$. Per tant, el sistema és incompatible. I per tant, no té solució.

*c*) Si $\alpha = -1$, aleshores les matrius de coeficients i ampliada són iguals a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabem que $rgA \neq 3$. D'altra banda, $rgM = 3$, ja que el menor següent és no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Per tant, de nou, el sistema és incompatible.

## 4.7 Exercicis proposats

Exercici 106. Apliqueu la regla de Cràmer per resoldre els sistemes següents:

*a*) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$

[2] Els altres dos menors donen 0 i 6.

c) $\begin{cases} x+y+2z &= 2 \\ x-z &= 0 \\ y-z &= -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y &= 4 \\ y-z &= 4 \\ 2x+2z &= 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3y+4z &= 0 \\ -5x-4y-3z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ 2x-y+z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$

Exercici 107. Classifiqueu els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 6x-2y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 5x+z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-y-t=2 \\ z-t=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases}$

Exercici 108. Discutiu els sistemes següents segons els valors del paràmetre $m$:

a) $\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+y+z=m \\ x-y+mz=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+my+z=0 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx+y+z=m \\ x+y+z=3 \\ x+y+mz=3 \end{cases}$

Exercici 109. Resoleu, si es pot, els sistemes següents:

a) $\begin{cases} -x+2y+z=3 \\ 5x-y+4z=3 \\ -3x+3y-5z=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+2y+5z=1 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x-4y+z=-6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y+8z=2 \\ x+3y-z=8 \\ -x+2y+z=-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 6x-4y+7z=11 \\ -x+2y+3z=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -2x+4y-5z=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ x+5y+7z=1 \\ -x-y+5z=1 \end{cases}$

Exercici 110. Resoleu els sistemes compatibles de l'exercici 107.

Exercici 111. Resoleu aquests sistemes compatibles indeterminats:

a) $\begin{cases} -x+2y+z=3 \\ 3x-y+2z=5 \\ x+3y+4z=11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x-6y+3z=18 \\ x-2y+z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+2y+6z=12 \\ x+y+3z=6 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+z=10 \\ 2x-y=5 \\ 5x+z=20 \end{cases}$

Exercici 112. Discutiu i resoleu els sistemes següents en funció del paràmetre corresponent:

a) $\begin{cases} mx-y-z=m \\ x-y+mz=m \\ x+y+z=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax+7y+20z=1 \\ ax+8y+23z=1 \\ x-az=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx+y=2-2m \\ x+my=m-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax=2 \\ ay+2z=0 \end{cases}$

Exercici 113. Hi ha algun valor d'$a$ per al qual el sistema tengui infinites solucions?

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+1)\,x+2y+z & = & a+3 \\ ax+y & = & a \\ ax+3y+z & = & a+2 \end{array}\right\}$$

### 4.7.1 Problemes de sistemes d'equacions

Exercici 114. En una fàbrica es produeixen cotxes blancs, negres i vermells. Fabriquen 140 cotxes diaris. El nombre de cotxes negres representa 3/5 del nombre de cotxes blancs, i el nombre de cotxes vermells és 1/4 del nombre de cotxes negres. Quants cotxes de cada color es fabriquen cada dia?

Exercici 115. Els diners que porten en Pere, en Joan i n'Àngel sumen 200€. N'Àngel porta la mateixa quantitat de diners que en Pere i en Joan junts, i en Pere porta 3/2 dels diners que porta en Joan. Quants diners porta cadascú?

Exercici 116. La Mariona va tres diumenges seguits a la pastisseria. El primer diumenge compra tres pastissets de moniato, dos de nata i un de xocolata, i es gasta 15,75 €. El segon diumenge compra dos pastissets de moniato, un de nata i un de xocolata, i es gasta 10 €. El tercer dia compra un pastisset de cada tipus i es gasta 7,5 €. Quin és el preu de cada pastisset?

Exercici 117. En una caixa hi ha pomes, peres i plàtans. En total sumen 12 peces de fruita. El triple del nombre de pomes és igual a la suma del nombre de peres i plàtans i el doble del nombre de peres és igual a la suma del nombre de pomes i plàtans. Trobeu el nombre de pomes, peres, i plàtans.

Exercici 118. Dos amics inverteixen 20000 € cadascun. El primer col · loca una quantitat $A$ al 4% d'interès, una quantitat $B$ al 5% i la resta al 6%. L'altre inverteix la mateixa quantitat $A$ al 5%, la quantitat $B$ al 6% i la resta al 4%. Determineu les quantitats $A$, $B$ i $C$ si el primer obté uns interessos de 1050 € i el segon de 950 €

Exercici 119. Una botiga ha venut 600 exemplars d'un article per un total de 6384€. El preu original era de 12 €, però també han venut còpies defectuoses amb descomptes del 30% i del 40%. Si el nombre de còpies defectuoses venudes va ser la meitat del de còpies en bon estat, calculeu a quantes còpies s'aplicà el descompte del 30%

Exercici 120. Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 €, i un total de 2000€. Si el nombre de bitllets de 10€ és el doble que el nombre de bitllets de 20€, calculeu quants de bitllets hi ha de cada tipus.

Exercici 121. La suma de les tres xifres d'un nombre és 7. La xifra de les centenes és igual a la suma de la xifra de les desenes més el doble de la xifra de les unitats. D'altra banda, si s'inverteix l'ordre de la xifres, el nombre original disminueix en 297 unitats. Calculeu les xifres del nombre inicial

# Part III

# Geometria

En aquest apartat es tractarà la Geometria en dues parts:

- Geometria del pla, que estudia aquells elements geomètrics que es poden representar soble un pla bidimensional.
- Geometria de l'espai, per a elements de tres dimensions.

Tècnicament, s'estudiarà la geometria cartesiana afí i mètrica.

# 5

# Geometria del pla

En aquest tema s'estudiaran els vectors i les rectes definits sobre un espai de dues dimensions.

## 5.1 Punts

Aquest apartat tracta de l'estudi dels vectors i de les seves operacions a l'espai de dues dimensions. Aquest espai queda representat per uns *eixos de coordenades*, que són dues rectes reglades entre les quals hi ha un angle recte (Figura 5.1):

- L'eix horitzontal s'anomena *eix de les abscises* (o simplement *eix de les $X$*) i s'anomena amb la lletra $X$
- L'eix vertical s'anomena *eix de les ordenades* (o simplement *eix de les $Y$*) i s'anomena amb la lletra $Y$

En conjunt, els eixos formen el que s'anomena *Pla cartesià*.

Cada punt del pla queda determinat per les seves projeccions sobre cadascun dels eixos, el que s'anomenen *coordenades* (Figura 5.2).

L'*origen de coordenades* és el punt de coordenades $(0, 0)$.

A partir d'aquest moment identificarem un punt amb les seves coordenades.

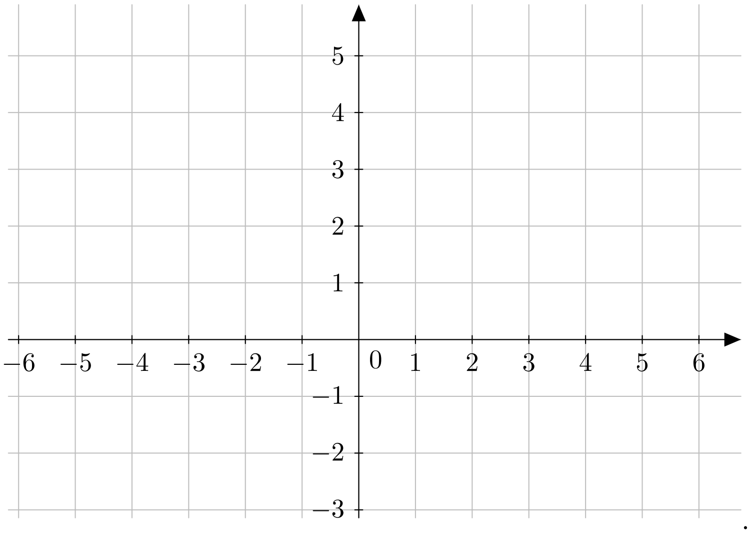



Figura 5.1: Pla cartesià

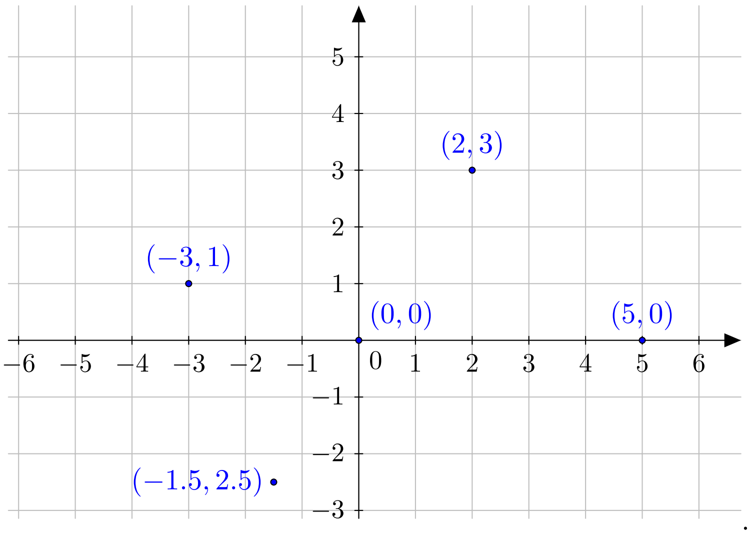



Figura 5.2: Diversos punts al pla cartesià

Notació 2 (notació dels punts). Els punts es poden escriure de dues maneres diferents: $A = (0, 1)$ o bé $A(0, 1)$.

### 5.1.1 Punt mitjà

Donats dos punts del pla, $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$, que determinen un segment, podem preguntar-nos quines són les cooordenades del punt mitjà d'aquest segment. Aquest punt queda determinant per la següent expressió:

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Exemple 62. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinant pels punts $P(0, -5)$ i $Q(-3, 1)$.

$$P_M = \left(\frac{0 + (-3)}{2}, \frac{-5 + 1}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}, -2\right)$$

Exercici 122. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinant pels punts $P(-3, 7)$ i $Q(-5, 3)$.

Exercici 123. Donat el punt $P(0, -5)$, calculeu les coordenades del punt simètric de $P$ respecte del punt $M(-1, 12)$.

Hem de notar que, encara que pareixi que sí, aquest resultat no es pot estendre quan es vol trobar un punt que estigui a distància $1/3$ d'$A$ en el segment $\overline{AB}$ (en general, a distància $d \neq 1/2$). En aquest cas, s'haurà de procedir a raonar amb vectors (Secció 5.2), per exemple trobant el vector $1/3 \cdot \overrightarrow{AB}$ i situant-lo amb origen $A$. El seu extrem final seria el punt desitjat.

## 5.2 Vectors

Definició 43 (vector fix). Un *vector fix* és una segment orientat a l'espai (és a dir una fletxa), que té un *origen* (el punt on comença) i un *final* (punt on acaba). Els dos punts s'anomenen *extrems del vector*.

Per tant, un vector té:

- Una direcció: la recta sobre la qual està el vector
- Un sentit: cap a on apunta la fletxa. Si $A$ i $B$ són els extrems d'un vector, aleshores aquest vector pot tenir dos sentits: de $A$ cap a $B$ (punt origen és $A$ i el punt destí és $B$) o de $B$ cap a $A$ (punt origen és $B$ i el punt destí és $A$)
- La seva longitud. Formalment s'anomena *mòdul* del vector

Notació 3 (notació de vectors). Els vectors es denoten amb una fletxa a damunt del seu nom. D'aquesta manera escriurem $\overrightarrow{AB}$ per denotar el vector que té origen $A$ i final a $B$. Si volem obviar els extrems, podem escriure $\overrightarrow{u}$, per exemple.

Exemple 63. Siguin els vectors següents (Figura 5.3):

- Els extems dels vectors són:
  - El vector $\overrightarrow{a}$ té origen $(-1, 1)$ i fi $(-3, -1)$
  - El vector $\overrightarrow{b}$ té origen $(-1, -1)$ i fi $(0, 0)$

– El vector $\overrightarrow{c}$ té origen $(-4,3)$ i fi $(-1,3)$
– El vector $\overrightarrow{d}$ té origen $(-4,2)$ i fi $(-4,-1)$
– El vector $\overrightarrow{u}$ té origen $(1,1)$ i fi $(3,3)$
– El vector $\overrightarrow{v}$ té origen $(4,1)$ i fi $(6,3)$
– El vector $\overrightarrow{w}$ té origen $(1,-1)$ i fi $(3,1)$

mòdul

- Els vectors $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ tenen la mateixa direcció
- Els vectors $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tenen el mateix sentit, però el vector $\overrightarrow{a}$ té sentit contrari
- Els vectors $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tenen el mateix mòdul. El mòdul de $\overrightarrow{b}$ és la meitat que el mòdul de $\overrightarrow{u}$. I $\overrightarrow{c}$ i $\overrightarrow{d}$ tenen el mateix mòdul (encara que no tenguin ni la mateixa direcció ni sentit)

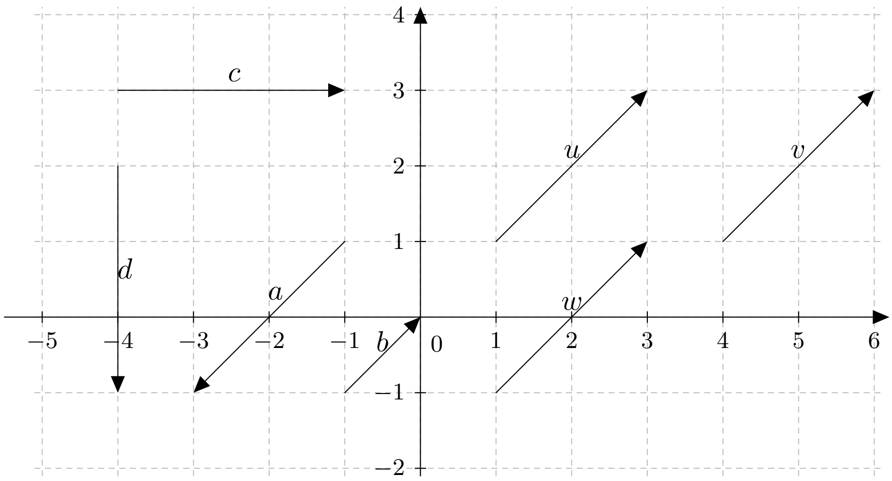



Figura 5.3: Diversos vectors al pla

Definició 44 (vector lliure). Un *vector lliure* és un segment orientat al pla, però del qual tenim la llibertat de triar el seu origen. És a dir, vector que tenen la mateixa direcció, sentit i longitud són a partir d'ara iguals per a nosaltres, independentment d'on estiguin situats. Formalment aquests vectors s'anomenen *equipolents*

En general, si no se'ns diu el contrari, o no se'ns dóna l'origen d'un vector, es suposarà que aquest és lliure. A més sempre suposarem que l'origen del vector és l'origen de coordenades i, per tant, escriurem el vector com a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(3,5)}$ i no $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(3,5)}$, obviant el seu origen.

A més, de la mateixa manera que pels punts, existeixen dues notacions estàndard: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{(3,5)}$ o bé $\overrightarrow{A}\overrightarrow{(3,5)}$, que podrem usar indistintament.

Exemple 64. Els vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ són equipolents (Figura 5.3). És més, tots aquests vectors es consideren el mateix vector que $\overrightarrow{(2,2)}$.

Definició 45 (coordenades i components d'un vector). Donat un vector $\overrightarrow{v}$, les seves *coordenades* són els nombres que formen el seu producte cartesià, és a dir, si $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$, aleshores, $v_x$ i $v_y$ són les seves coordenades. $v_x$ es diu *coordenada de l'eix de les abscises* i $v_y$, *coordenada de l'eix de les ordenades*, o simplement coordenada de l'eix $X$ i coordenada de l'eix $Y$, respectivament.

Les coordenades es poden interpretar com a les longituds, amb signe, de les projeccions d'un vector sobre els dos eixos de coordenades. Cadascuna de les dues components d'un vector pot ser positiva o negativa segons que la respectiva projecció apunti cap a la part positiva o negativa del corresponent eix de coordenades (figura Figura 5.4). En aquest sentit les coordenades s'anomenen *components*.

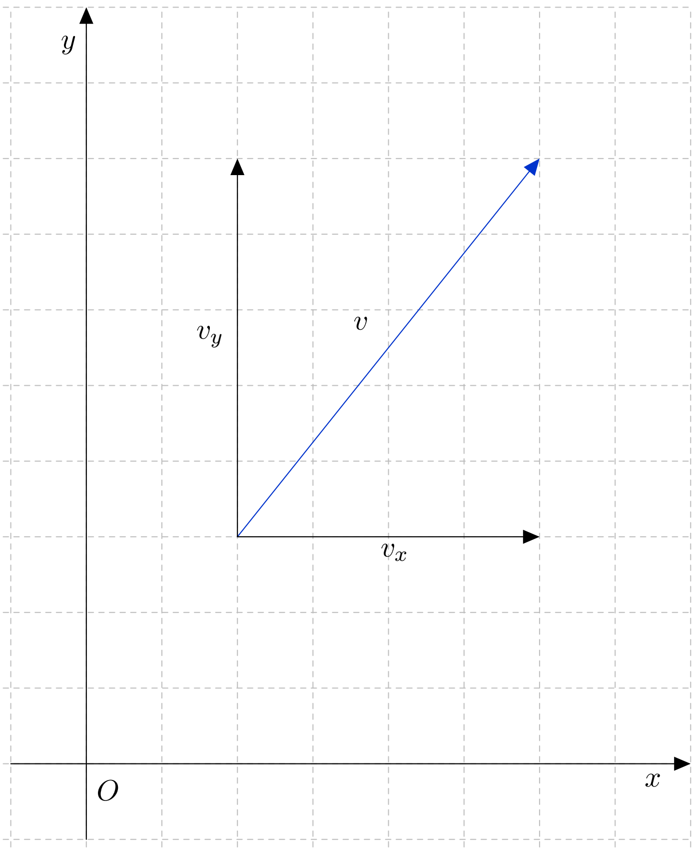



Figura 5.4: Components d'un vector

Exemple 65. Són vectors els següents:

$$\overrightarrow{B}(3,-2),\ \overrightarrow{C}(-5,1)$$

El vector $\overrightarrow{B}$ apunta cap a la dreta i cap a baix, i el vector $\overrightarrow{C}$ apunta cap a l'esquerra i cap a dalt. Com que no se'ns diu quins són els seus origens, es considerarà que aquests vectors són lliures, i que, per tant, podem situar-los els on es desitgi.

Exercici 124. Representeu gràficament els vectors $\overrightarrow{A}(-3,4)$, $\overrightarrow{B}(5,-1)$ i $\overrightarrow{C}(1,0)$.

Observació 7 (vector d'extrems donats). Si un vector té origen en el punt $P(x_1,y_1)$ i final en el punt $Q(x_2,y_2)$, aleshores les components d'aquest vector es calculen amb l'expressió següent:

$$\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1),$$

és a dir, restem les coordenades del punt final menys les coordenades del punt inicial.

Exemple 66. Calculeu les components del vector que comença en el punt $P\,(0,-6)$ i acaba en el punt $Q\,(-3,2)$:

$$\overrightarrow{PQ}=(-3-0,2-(-6))=(-3,8)$$

Exercici 125. Calculeu les components del vector d'origen $P\,(-2,1)$ i que acaba en el punt $Q\,(-3,-5)$.

Exercici 126. Els punts $A(3,0)$, $B(-5,4)$ i $C(6,-4)$ són vèrtexos d'un para $\cdot$ lelogram. Representeu gràficament aquests punts i calculeu les cooordenades de vèrtex restant.

Definició 46 (mòdul d'un vector). El *mòdul* d'un vector és la seva longitud. El mòdul del vector $\overrightarrow{A}(a,b)$, que es representa per $\left|\overrightarrow{A}\right|$, es calcula amb la fórmula:

$$\left|\overrightarrow{A}\right|=|(a,b)|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Exemple 67. El mòdul del vector $\overrightarrow{A}(3,-2)$ és:

$$\left|\overrightarrow{A}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}.$$

Exercici 127. Calculeu el valor del mòdul del vector $\overrightarrow{A}(-5,1)$.

Acabem amb unes quantes definicions:

Definició 47 (vector unitari). Un vector és *unitari* quan té mòdul 1.

Definició 48 (ortogonalitat, ortonormalitat). Donats dos vectors $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, direm que $\overrightarrow{u}$ és *ortogonal* a $\overrightarrow{v}$ simplement quan $\overrightarrow{u}$ sigui perpendicular a $\overrightarrow{v}$, és a dir, quan ambdós formen un angle de 90 graus.

Si a més, $\overrightarrow{u}$ és unitari, aleshores direm que $\overrightarrow{u}$ és *ortonormal* a $\overrightarrow{v}$.

## 5.2.1 Operacions amb vectors

Definim aquí les diferents operacions que es poden fer amb vectors.

### 5.2.1.1 Suma de dos vectors

Definició 49 (suma de dos vectors). . Siguin $\overrightarrow{A}(a,b)$ i $\overrightarrow{A'}(a',b')$ dos vectors. La seva *suma* es defineix com:

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{A'}=(a,b)+(a',b')=\left(a+a',b+b'\right)$$

Exemple 68. Donats els vectors $\overrightarrow{A}(3,-2)$ i $\overrightarrow{B}(-5,1)$, la seva suma és:

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(3,-2)+(-5,1)=(3-5,-2+1)=(-2,-1)$$

Noteu que, per a què es puguin sumar dos vectors aquests han de tenir el mateix origen o bé ser lliures. En aquest cas, la suma de dos vectors es pot calcular gràficament: en el dibuix següent es representa la suma gràfica de $\overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{B}$ (Figura 5.5):

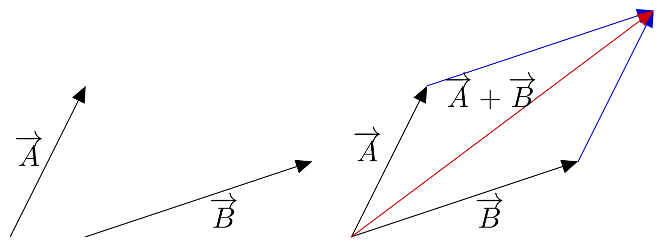



Figura 5.5: Regla del paral · lelogram

Es pot procedir de manera anàloga per a qualssevol vectors. Aquesta manera gràfica d'aconseguir la suma es coneix com *regla del paral · lelogram*.

Exercici 128. Calculeu gràficament i analítica la suma dels vectors $\overrightarrow{A}(-5,4)$ i $\overrightarrow{B}(3,-1)$.

### 5.2.1.2 Diferència de dos vectors

Definició 50 (diferència de dos vectors). Donats dos vectors $\overrightarrow{A}(a,b)$ i $\overrightarrow{A'}(a',b')$, la seva *diferència* es defineix com:

$$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{A'}=(a,b)-(a',b')=\left(a-a',b-b'\right)$$

Exemple 69. Donats els vectors $\overrightarrow{A}(3,-2)$ i $\overrightarrow{B}(-5,1)$, la seva diferència és:

$$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=(3,-2)-(-5,1)=(3+5,-2-1)=(8,-3)$$

Exercici 129. Calculeu $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ i $\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}$, amb $\overrightarrow{A}(-5,4)$ i $\overrightarrow{B}(3,-1)$.

#### 5.2.1.3 Producte d'un escalar per un vector

Definició 51 (producte d'un escalar per un vector). Donat un nombre $k \in \mathbb{R}$ i un vector $\overrightarrow{A}(a,b)$, *el producte de k per* $\overrightarrow{A}$, $k \cdot \overrightarrow{A}$, es defineix com:

$$k \cdot \overrightarrow{A} = k \cdot (a,b) = (ka, kb)$$

Exemple 70. Donats el vector $\overrightarrow{A}(3,-2)$ i el número $k=-5$, es té que el seu producte és:

$$k \cdot \overrightarrow{A} = -5 \cdot (3,-2) = (-5 \cdot 3, -5 \cdot (-2)) = (-15, 10)$$

En el dibuix següent es veu un exemple gràfic del producte d'un nombre (en aquest cas el 3) per un vector (Figura 5.6):

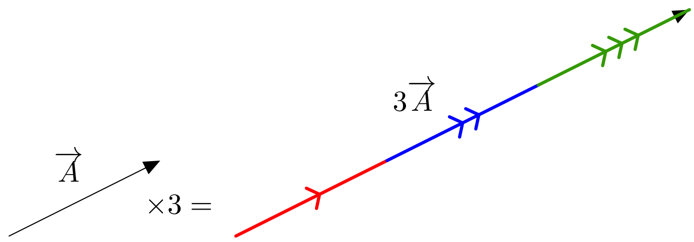



Figura 5.6: Exemple d'un producte d'un escalar per un vector

Exercici 130. Calculeu gràficament i analítica el producte $-3 \cdot \overrightarrow{B}$, amb $\overrightarrow{B}(3,-1)$.

Observació 8. Aquesta operació ens dóna sempre un vector paral · lel al vector inicial, és a dir, els vectors de components $(a,b)$ i $(ka,kb)$ són paral · lels, ja que si dividim les components respectives d'aquests dos vectors s'obté sempre el mateix nombre:

$$\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b} = k.$$

**Proposició 10** (Condició de parel · lelisme entre dos vectors). *En relació a això, podem establir el resultat següent:*

$$\overrightarrow{A}(a,b) \text{ és paral} \cdot \text{lel a } \overrightarrow{A'}(a',b') \iff \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

Expressat en paraules, això ens diu que si dos vectors són paral · lels, aleshores el quocient entre les seves respectives components dóna el mateix resultat, i viceversa, és a dir, que si el quocient entre les respectives components de dos vectors dóna el mateix resultat, aleshores aquests dos vectors són paral · lels.

Exemple 71. Determineu, a cadascun dels apartats següents, si els vectors són paral · lels entre si:

*a*) $\overrightarrow{A}(2,-3)$ i $\overrightarrow{B}(4,-6)$:
$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}$$
Per tant, aquests dos vectors són paral · lels entre si.

*b*) $\overrightarrow{C}(2,-1)$ i $\overrightarrow{D}(4,-3)$:
$$\frac{2}{4}\neq\frac{-1}{-3}$$
Així, aquests dos vectors no són paral · lels entre si.

Exercici 131. Determineu si els vectors següents són paral · lels entre si:

*a*) $\overrightarrow{A}(1,-3)$ i $\overrightarrow{B}(5,-6)$

*b*) $\overrightarrow{C}(3,-1)$ i $\overrightarrow{D}(-6,2)$

*c*) $\overrightarrow{E}(3,0)$ i $\overrightarrow{F}(5,0)$

### Producte escalar de dos vectors

Definició 52 (producte escalar de dos vectors). El *producte escalar de dos vectors*, $\overrightarrow{A}(a,b)$ i $\overrightarrow{B}(c,d)$, que es denota per $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$, en una base ortonormal, es defineix de la manera següent:
$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(a,b)\cdot(c,d)=a\cdot c+b\cdot d \tag{5.1}$$

Com es veu, el producte escalar de dos vectors és un nombre.

Exemple 72. El producte escalar dels vectors $\overrightarrow{A}(2,0)$ i $\overrightarrow{B}(-3,1)$ és igual a:
$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(2,0)\cdot(-3,1)=2\cdot(-3)+0\cdot 1=-6$$

Exercici 132. Calculeu $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$, amb $\overrightarrow{A}(-3,4)$ i $\overrightarrow{B}(-2,-8)$.

### Angle entre dos vectors

**Proposició 11** (Relació entre producte escalar i angle entre dos vectors). *Es pot provar que es cumpleix que la relació:*
$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=\left|\overrightarrow{A}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B}\right|\cdot\cos\alpha, \tag{5.2}$$
*on $\alpha$ és l'angle que formen entre si els vectors $\overrightarrow{A}$ i $\overrightarrow{B}$.*

*Això permet calcular l'angle $\alpha$ entre dos vectors, o qualsevol altre variables desconeguda d'aquesta fórmula* (5.2) *si es coneixen les altres. Recordeu que el producte escalar es pot calcular amb seva fórmula* (5.1). *Per tant, l'equació anterior és equivalent a:*
$$ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\cos\alpha \tag{5.3}$$

Observació 9. Recordeu que el cosinus d'un angle es defineix com la projecció del radi definit per l'angle sobre el diàmetre horitzontal de la circumferència de radi unitat.

Els valors del cosinus dels angles més usuals es mostren a continuació (taula Taula 5.1):

| | 0 rad | $\pi/6$ rad | $\pi/4$ rad | $\pi/3$ rad | $\pi/2$ rad | $\pi$ rad | $3\pi/2$ rad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $180°$ | $270°$ |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | $-1$ | 0 |

Taula 5.1: Valors dels cosinus pels angles més usuals

Exemple 73. Què val l'angle format pels vectors $\overrightarrow{A}(2,0)$ i $\overrightarrow{B}(-3,1)$?

Si aplicam la darrera fórmula i denotam l'angle per $\alpha$, es té que

$$\begin{aligned}
2\cdot(-3)+0\cdot 1 &= \sqrt{2^2+0^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2}\cdot\cos\alpha \\
-6 &= 2\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{-6}{2\sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \\
\alpha &= \arccos\frac{-3}{\sqrt{10}} \simeq 161,565°
\end{aligned}$$

Exercici 133. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\overrightarrow{A}(-2,-5)$ i $\overrightarrow{B}(-3,2)$.

Vegem a continuació les propietats del producte escalar.

**Teorema 12** (Propietats del producte escalar)**.** *Donats vectors $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ i $\overrightarrow{C}$ i un nombre $k$ qualssevol, el producte escalar té les propietats següents:*

a) $\left|\overrightarrow{A}\right| = \sqrt{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}}$. *És a dir, el mòdul d'un vector es pot calcular amb l'arrel quadrada del producte escalar per si mateix.*

b) $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}$ *(propietat conmutativa)*

c) $\left(k\overrightarrow{A}\right)\cdot\overrightarrow{B} = k\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)$ *(propietat associativa)*

d) $\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$ *(propietat distributiva)*

e) Condició de perpendicularitat entre dos vectors: *si el producte escalar de dos vectors és 0, aleshores aquests dos vectors són perpendiculars entre si, i viceversa, és a dir, que si dos vectors són perpendiculars entre si, aleshores el seu producte escalar és 0. Matemàticament,*

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = 0 \iff \overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$$

Exemple 74. Per exemple, els vectors $\overrightarrow{A}(30,-9)$ i $\overrightarrow{B}(3,10)$ són perpendiculars, ja que $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = 30\cdot 3 + (-9)\cdot 10 = 0$.

Exercici 134. En cada cas, calculeu $x$ per a què els vectors $\overrightarrow{A}(8,-15)$ i $\overrightarrow{B}(2,x)$ siguin:

*a*) paral · lels,

*b*) perpendiculars,

*c*) formin un angle de 60°.

Exercici 135. Donat el vector $\overrightarrow{A}(5,12)$, trobeu:

*a*) un vector paral · lel,

*b*) un vector perpendicular.

## 5.3 La recta en el pla

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de dues dimensions.

Una recta, en particular, és una col · lecció de punts. Per tant, un objectiu principal serà trobar les coordenades de tots els seus punts. La manera més senzilla de trobar-la és usar vectors.

Donada una recta $r$, sempre podem obtenir un punt qualsevol $P$ i un vector $v$ sobre aquesta — per exemple, si sabéssim dos punts $A$ i $B$ sobre la recta, aleshores tendríem un punt, $A$ o $B$, i un vector amb aquestes condicions, $A - B$ o qualsevol múltiple seu. Per tant, qer a qualsevol punt $X$ sobre la recta, aquest forma el vector $\overrightarrow{OX}$, que té com a origen l'origen de coordenades i com a destí $X$. Aquest vector es pot posar com a suma del vector $OP$ i un múltiple del vector $v$ (figura Figura 5.7), és a dir, existeix un nombre $\lambda$ tal que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}. \tag{5.4}$$

Aquest equació (5.4) s'anomena *equació vectorial de la recta* i al vector $v$ se li diu *vector director* de $r$.

Observació 10. Noteu que realment no fa falta que el vector director $v$ estigui sobre la recta. Basta qualsevol que tengui la mateixa direcció, ja que suposem que feim feina amb vectors lliures. En aquest sentit parlarem de *el* vector director de la recta $r$ i no d'*un* vector director, per a qualsevol d'aquests vectors, ja que els haurem identificat.

Exemple 75. Trobeu l'equació vectorial de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(4,5)$.

Hem de prendre un punt de la recta i un vector director. Ja tenim el punt: podem prendre $A$ o $B$. Agafarem $A(2,3)$.

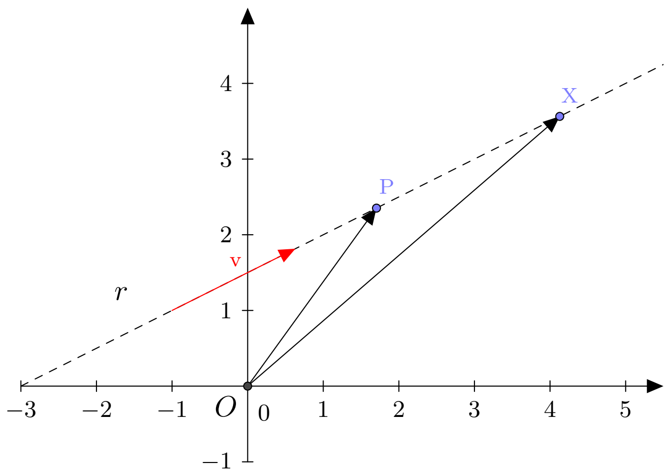



Figura 5.7: Visualització de l'equació vectorial d'una recta

Per trobar el vector director, calcularem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(4-2, 5-3)} = \overrightarrow{(2,2)}$. Per tant, l'equació vectorial de la recta en qüestió és:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{(2,2)}$$

Si denotam $X = (x, y)$ les coordenades del punt $X$, tenim que aquesta equació es transforma en:

$$\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(2,3)} + \lambda\overrightarrow{(2,2)}.$$

Observació 11. A part d'aquesta equació, n'hi ha d'altres però totes provénen d'aquesta. L'ús d'una o de l'altra dependrà de l'exercici concret que volguem resoldre i de la nostra comoditat.

### 5.3.1 Equació paramètrica de la recta

Sigui $r$ una recta donada pel punt $P(x_1, y_1)$ i el vector director $\overrightarrow{v_r}(v_x, v_y)$, aleshores l'equació vectorial de la recta $r$ ve donada per

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{v},$$

on $X(x, y)$ és un punt qualsevol de la recta. Si desenvolupem aquesta equació obtenim que

$$\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(x_1, y_1)} + \lambda \cdot \overrightarrow{(v_x, v_y)},$$

és a dir,

$$\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)}.$$

Dos vectors són iguals si, i només si, les seves components són iguals. Per tant, $(x, y) = (x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)$, és a dir, s'han de complir simultàniament les equacions següents:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot v_x, \\ y = y_1 + \lambda \cdot v_y. \end{cases}$$

Hem obtingut l'*equació paramètrica*. L'equació paramètrica d'una recta dóna les coordenades de tots els punts d'una recta depenent d'un paràmetre $\lambda$ (d'aquí el seu nom). Per a cada valor de $\lambda$ obtenim un punt de la recta.

Recapitulant, si $r$ és una recta que passa pel punt $P(x_1, y_1)$ i té com a vector director $\overrightarrow{v_r}(v_x, v_y)$, aleshores l'equació paramètrica de $r$ ve donada per:

$$r : \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_x \\ y = y_1 + \lambda v_y \end{cases}, \tag{5.5}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 76. Si una recta passa pel punt $(0, -1)$ i el seu vector director és $\overrightarrow{v}(-3, 2)$, aleshores la seva equació paramètrica és la següent:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + \lambda\,(-3) \\ y = -1 + \lambda \cdot 2 \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir $\lambda$ per un nombre qualsevol a les expressions anteriors.

Exemple 77. Si a la recta anterior feim $\lambda = 2$, tenim que

$$\left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \end{array}\right\},$$

i, per tant, que $(-6, 3)$ és un altre punt de la recta.

Exercici 136. Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per $A(-3, 0)$ i segueix la direcció $\overrightarrow{v}(5, -1)$. Trobeu tres punts més d'aquesta recta.

Observació 12. Per saber si un punt pertany a una recta donada, només hem de veure si aquest punt verifica les equacions de la recta. Per exemple, si volem saber si $P = (5, 3)$ pertany o no a la recta de l'exemple 76, només hem de substituir a les equacions:

$$\begin{cases} 5 = -3\lambda \\ 3 = -1 + 2\lambda \end{cases},$$

i hem de resoldre aquest sistema. Si aquest sistema té solució, és a dir, existeix $\lambda$, aleshores $P$ pertanyarà a la recta; sinó, no ho farà. En el nostre cas, $\lambda = -5/3$ de la primera equació i $\lambda = 2$ de la segona. Per tant, $P$ no és de la recta.

Aquest fet també ens servirà per a les altres equacions de la recta.

### 5.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllem $\lambda$ a cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (5.5), obtenim

$$\lambda = \frac{x - x_1}{v_x}, \ \lambda = \frac{y - y_1}{v_y}.$$

Si ara igualam les dues equacions, s'obté *l'equació contínua de la recta*

$$r : \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}, \tag{5.6}$$

on $P(x_1, y_1)$ és qualsevol punt de la recta i $\overrightarrow{v_r}(v_x, v_u)$ és el vector director de la recta.

Exemple 78. Seguint amb la recta de l'exemple anterior, exemple 76, la seva equació contínua és:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2}$$

Observació 13. Notem que si alguna component del vector director $\overrightarrow{v_r}$ és zero, aleshores no existeix la fracció corresponent a l'equació (5.6) (no es pot dividir per zero). Ara bé, en aquest cas es veu l'equació (5.6) com a *notació*.

Per exemple, la recta que passa pel punt $(2, 3)$ i té com a vector director $\overrightarrow{(5, 0)}$, té com a equació contínua:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{0}$$

### 5.3.3 Equació general de la recta

Si a les equacions de la recta en forma contínua llevam els denominadors i ho transposam tot al primer membre, l'equació de la recta s'escriu de la manera següent:

$$Ax + By + C = 0, \tag{5.7}$$

amb $A$, $B$ i $C$ nombres reals. Aquesta equació rep el nom d'*equació general de la recta* o *equació implícita de la recta*.

Exemple 79. Seguint amb la recta anterior, exemple 76, la seva equació general és:

$$r \equiv 2x = -3\,(y+1)\,,$$

que simplificada és:

$$r \equiv 2x + 3y + 3 = 0.$$

Observació 14. Notem que, si a l'exemple anterior, feim $x = \lambda$, llavors

$$y = (-3 - 2x)\,/3 = -1 + 2/3\lambda,$$

per la qual cosa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \cdot \lambda.$$

Això implica que $r$ passa pel punt $(0, -1)$ i té com a vector director $\overrightarrow{(1, -2/3)}$. Noteu que aquest darrer vector director és equivalent a $(-3, 2)$ (aquest darrer és el primer multiplicat per 3), el qual és el que teníem a l'exemple exemple 76.

Exercici 137. Trobeu les equacions contínua i general de la recta que passa per $P(2, -5)$ i segueix la direcció del vector director $\vec{v}\,(-2, 7)$.

Exercici 138. Donada la recta d'equació $5x - y + 6 = 0$, trobeu les cooordenades de dos dels seus punts. A partir d'aquests, calculeu el seu vector director.

#### 5.3.3.1 Vector director a partir de l'equació general

**Proposició 13.** *Donada una recta en forma general, és a dir, $Ax + By + C = 0$, el seu vector director és $\vec{v} = (-B, A)$.*

*Demostració.* Una recta genèrica $r$ que passa pel punt $P(x_1, y_1)$ i que té com a vector director $\vec{v_r}(v_x, v_y)$ té l'equació contínua

$$r \equiv \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

Per tant, $v_y \cdot (x - x_1) = v_x \cdot (y - y_1)$. Aleshores, $v_y x - v_x y + (-v_y x1 + v_x y_1) = 0$. Per la qual cosa, $A = v_y$, $B = -v_x$ i $C = -v_y x_1 + v_x y_1$. Per tant, el vector director és $(v_x, v_y) = (-B, A)$. ■

**Proposició 14.** *Donada una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ en forma implícita, tenim que el vector $(A, B)$ és perpendicular a la recta.*

*Demostració.* El vector $(A, B)$ és perpendicular al vector $(-B, A)$ — ja que el seu producte escalar és 0. Per tant, el vector $(A, B)$ és un vector perpendicular a la recta d'equació $Ax + By + D = 0$. ■

Exemple 80. El vector director de la recta $5x - 2y + 1 = 0$ és $\vec{v} = (2, 5)$.

Exercici 139. Calculeu el vector director de les rectes següents:

*a*) $4x - 3y + 1 = 0$

*b*) $-y + 5 = 0$

Exercici 140. Donada la recta $x - 5y + 8 = 0$, trobeu:

*a*) l'equació de la recta paral · lela que passa pel punt $(2, -7)$,

*b*) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt $(2, -7)$.

Observació 15. La proposició 13, serveix per a passar de l'equació general a l'equació contínua o bé a l'equació paramètrica: directament es pot obtenir el seu vector director $v_r$. I després subtituïnt $x$ o $y$, podem trobar un punt seu.

Exemple 81. Obteniu l'equació contínua de la recta $s$ que té equació general $s \equiv 5x - 9y - 2 = 0$.

Per la proposició 13, tenim que el vector director de $s$ és $v_s = (9, 5)$.

D'altra banda, trobarem un punt de $s$. Prendre'm $x = 0$, per exemple, amb el que obtenim $y = -2/9$. Per tant $(0, -2/9) \in s$.

Amb tot, tenim que l'equació contínua de $s$ serà:

$$s \equiv \frac{x}{9} = \frac{y + \frac{2}{9}}{5}$$

Exercici 141. Donada la recta $r \equiv 2x - 9y + 5 = 0$, trobeu les equacions contínua, paramètrica i vectorial.

Exemple 82. Trobeu el punt de tall de les rectes $r \equiv 2x - 5y + 10 = 0$ i $s \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{8}$.

Diem $P(a, b)$ al punt de tall de $r$ i $s$. Si $P \in r \cap s$, aleshores $P$ verifica les equacions de $r$ i $s$ simultàniament. Per tant, s'ha de verificar el sistema:

$$\begin{cases} 2a - 5b + 10 = 0 \\ \dfrac{a-2}{5} = \dfrac{b-3}{8} \end{cases}$$

Aplicant el mètode de reducció (multiplicant la segona equació per 40), tenim que

$$\begin{cases} 2a - 5b = -10 \\ 8a - 5b = 1 \end{cases}$$

Per tant, $a = 3/2$ i $b = 13/5$. Llavors el punt de tall és $P(\frac{3}{2}, \frac{13}{5})$.

Noteu que no sempre dues rectes tendran punt de tall: quan aquestes siguin paral·leles, aleshores no existiran punts de tall. En aquest cas, el sistema no tendria solució. Vegeu l'apartat referent a la posició relativa de dues rectes (Subsecció 5.3.6).

Exercici 142. Donades les rectes $r \equiv 5x - 2y + 8 = 0$ i $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{5}$, trobeu:

*a*) dues rectes paral·leles a $r$

*b*) dues rectes paral·leles a $s$

*c*) una recta perpendicular a $s$ que passi per $(10, 10)$

*d*) una recta perpendicular a $r$ que passi per $(0, 0)$

*e*) el punt de tall de $r$ i $s$

*f*) el punt de tall de $r$ i la recta perpendicular a $s$ que passa per $(5, 20)$

### 5.3.4 Equació explícita de la recta

Si de l'equació general d'una recta (5.7) aillam la $y$ ens queda una equació de la forma:

$$y = mx + b, \tag{5.8}$$

amb $m$ i $b$ nombres reals. Aquesta equació es coneix amb el nom de *equació explícita de la recta*. S'anomena *pendent* al coeficient $m$ i *ordenada a l'origen* al nombre $b$. La interpretació gràfica d'aquests dos paràmetres és la següent:

- La pendent de la recta és la inclinació d'aquesta:
  - Si $m > 0$, aleshores la recta és *creixent* (quan els valors de $x$ creixen, els valors de $y$ creixen)
  - Si $m < 0$, aleshores la recta és *decreixent* (quan les valors de $x$ creixen, els valors de $y$ decreixen)
  - Si $m = 0$, aleshores la recta és *constant*. Té una forma completament horitzontal.

  D'altra banda, quan $|m|$ és major, la inclinació de la recta és major en el sentit que és més vertical. Per exemple, $y = 3x + 2$ tendrà més inclinació que $y = x + 2$, i $y = -5x + 10$ tendrà més inclinació que $y = -2x + 10$.

- L'ordenada a l'origen $b$ és el valor que de l'eix de les $Y$ quan $x = 0$. És a dir, l'ordenada a l'origen ens diu en quin punt talla la recta a l'eix $OY$. En altres paraules, $(0, b)$ és el punt de tall de la recta amb l'eix $OY$.

Exemple 83. Representeu gràficament la recta $r \equiv y = -2x + 3$ i trobeu els seus punts de tall amb els eixos.

Sabem que $r$ és decreixent perquè $-2 < 0$. I que passa per $(0, 3)$. Per representar-la només ens fa falta un altre punt (una recta ve determinada per dos punts). Substituïm, per exemple, per $x = 2$: $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$. Per tant, $(2, -1) \in r$. Aleshores, $r$ té la representació següent (Figura 5.8):

Només fa falta trobar el punt de tall amb l'eix de les abscises. En aquest cas, $y = 0$. Per tant, $0 = -2x + 3$, el que implica que $x = 3/2$. Per tant, el punt $(\frac{3}{2}, 0)$ és el punt de la recta que està sobre l'eix $OX$.

#### 5.3.4.1 Càlcul de la pendent mitjançant dos punts

Donats dos punts $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, per calcular la pendent de la recta $r\colon y = mx + b$ que els conté, podem substituir ambdós punts a l'equació de la recta i trobar $m$ i $b$. O bé, podem emprar la fórmula següent per a calcular la pendent de $r$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

i després substituir un dels punts a l'equació de la recta per a trobar $b$.

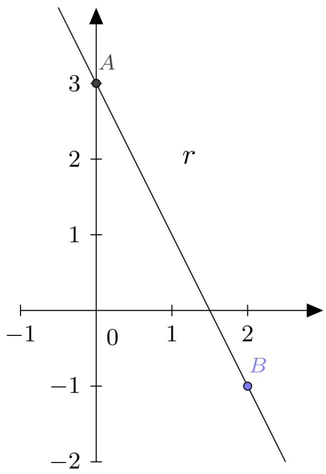



Figura 5.8: Visualització de l'equació explícita d'una recta

Exemple 84. Trobeu l'equació explícita de la recta $r$ que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(10,15)$.

Sigui $r\colon y = mx + n$ l'equació explícita de la recta $r$. Hem de determinar $m$ i $n$. Facem-ho de dues maneres:

- Substituïnt els dos punts a l'equació explícita.

  Com que $A$ i $B$ són punts de la recta $r$, verifiquen la seva equació. Per tant,

  $$\begin{cases} 3 = m \cdot 2 + n \\ 15 = m \cdot 10 + n \end{cases}$$

  Si resolem aquest sistema per $m$ i $n$, obtenim $m = 3/2$ i $n = 0$.

- Emprant la fórmula de la pendent

  Podem calcular la pendent amb la fórmula:

  $$m = \frac{15 - 3}{10 - 2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

  Per tant, $r\colon y = \frac{3}{2}x + n$. Prenem un punt qualsevol de la recta, per exemple $A$, i substituïm-lo a aquesta equació: $3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + n$. D'aquí tenim que $n = 0$.

#### 5.3.4.2 Pendents de rectes paral · leles i perpendiculars

Existeix una relació entre les pendents de rectes paral · leles o perpendiculars:

**Proposició 15** (relació entre les pendents de rectes paral · leles o perpendiculars). *Siguin $r\colon y = m_r x + n_r$ i $s\colon y = m_s x + n_s$ dues rectes en el pla. Aleshores:*

- $r \parallel s \iff$ *r, s tenen la mateix pendent* $\iff m_r = m_s$
- $r \perp s \iff m_r = -\frac{1}{m_s}$

Aquest teorema no es podrà generalitzar a la geometria a l'espai.

Exemple 85. Si el pendent d'una recta donada val $-5$, la pendent de qualsevol recta paral · lela val també $-5$, i la de qualsevol recta perpendicular val $1/5$.

Exercici 143. Donada la recta $x + 5y - 3 = 0$, calculeu la seva pendent, la de una recta paral · lela i la de una recta perpendicular.

### 5.3.5 Equació de la recta determinada per dos punts

**Proposició 16** (equació de la recta determinada per dos punts donats). *Donats dos punts coneguts $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, si volem conèixer la recta que determinen, podem emprar la fórmula següent:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

*que ens dóna l'equació contínua de la recta.*

Amb aquesta proposició, ens evitam haver de cercar el vector director i plantejar una equació.

Exemple 86. L'equació de la recta que passa pels punts $A(0, -2)$ i $B(-4, 1)$ es la següent:

$$\frac{x}{-4} = \frac{y+2}{3}$$

Exercici 144. Calculeu l'equació de la recta que passa pels punts $A(3, -5)$ i $B(-1, 7)$.

### 5.3.6 Posició relativa entre dues rectes

**Proposició 17** (posició relativa entre dues rectes). *Dues rectes al pla cartesià poden ser (vegi's Figura 5.9):*

- secants, *és a dir, que es tallen a un punt*
- paral · leles. *Per tant, no es tallen a cap punt.*
- coincidents, *és a dir, són la mateixa recta.*

*Cadascuna d'aquestes posicions s'anomenen la* posició relativa *entre les dues rectes.*

La proposició següent ens diu quan dues rectes són secants, paral · leles o coincidents.

**Proposició 18** (criteri de posició relativa). *Per a dues rectes r i s en el pla es compleix:*

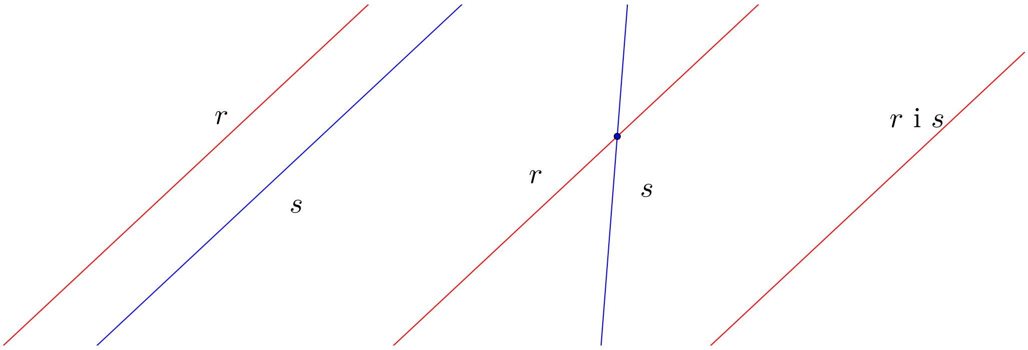



Figura 5.9: Les diferents posicions relatives possibles entre dues rectes

- *Si r i s tenen diferent pendent, aleshores són secants*
- *Si r i s tenen la mateixa pendent, aleshores són paral · leles o coincidents. En aquest cas:*
  - *Si r i m tenen diferents ordenades a l'origen, llavors són paral · leles*
  - *Si r i m tenen la mateixa ordenada a l'origen, llavors són coincidents*

Aquest criteri usant vectors directors és el següent:

**Proposició 19** (criteri de posició relativa). *Per a dues rectes r i s en el pla es compleix:*

- *Si r i s tenen diferent vector director, aleshores són secants*
- *Si r i s tenen el mateix vector director, aleshores són paral · leles o coincidents. En aquest cas, si r i m passen per un punt en comú, aleshores són coincidents. Altrament, són paral · leles*

#### 5.3.6.1 Càlcul dels punts de tall

Fins ara hem vist quina és la posició relativa entre dues rectes. Això vol dir que podem saber si dues rectes es tallen però *encara* no sabem com trobar el seu punt de tall.

Per a trobar el punt de tall entre dues rectes, només hem de notar que si $P$ pertany a les dues rectes, aleshores ha de complir ambdues equacions. D'aquesya manera obtindrem un sistema d'equacions de dues incògnites i dues equacions, que podem resoldre fàcilment per reducció, igualació o substitució.

Exemple 87. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : x - 3y + 1 = 0$ i $s : -4x + 7y = 0$.

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ -4x + 7y = 0 \end{cases}$$

Si aplicam el mètode de substitució, aïllant la $x$ de la primera equació: $x = 3y - 1$, tenim que $-4\,(3y-1) + 7y = 0$, és a dir, $y = \frac{4}{5}$. Per tant, si substituïm a la primera equació: $x - 3 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 0$, és a dir, $x = \frac{7}{5}$.

Aleshores, el punt de tall entre ambdues rectes és el punt $\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Exercici 145. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : 2x - 3y + 1 = 0$ i $s : -4x + 7y = 0$.

Exercici 146. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes $r : 2x - 3y + 1 = 0$ i $s : -4x + \alpha y = 0$ en funció del paràmetre $\alpha$.

## 5.4 Exercicis proposats

### Punts i vectors

Exercici 147. Els punts $A\,(3,-2)$ , $B\,(5,0)$ i $C\,(-1,-3)$ són vèrtexs d'un paral · lelogram. Calculeu la posició de l'altre vèrtex. I trobeu el seu perímetre.

Exercici 148. Donats els punts $A(3,1)$, $B(-5,1)$, $C(-4,-2)$, $D(0,-3)$, calculeu, analíticament, les components i el mòdul dels vectors:

*a*) $\overrightarrow{AB}$
*b*) $\overrightarrow{BA}$
*c*) $\overrightarrow{BC}$
*d*) $\overrightarrow{CB}$
*e*) $\overrightarrow{CD}$
*f*) $\overrightarrow{AD}$
*g*) $\overrightarrow{BD}$
*h*) $\overrightarrow{CA}$

Exercici 149. Calculeu l'extrem del vector $\overrightarrow{AB} = (3,-4)$ si sabem que el seu origen es troba al punt $A(2,-5)$; trobeu l'origen del vector $\overrightarrow{CD} = (-5,1)$ si sabem que el seu extrem final es troba al punt $D(-5,2)$.

Exercici 150. Donats els punts $A(3,0)$, $B(2,3)$, $C(-2,1)$ i $D(7,2)$, esbrineu si els vectors següents són equipolents:

*a*) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$
*b*) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$
*c*) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}$

Exercici 151. Les coordenades del punt $A$ són el doble de les del punt $B$. Sabent que $\overrightarrow{AB} = (-2,5)$, calculeu les coordenades dels punts $A$ i $B$.

Exercici 152. Donats els vectors $\overrightarrow{u} = (7,-4)$, $\overrightarrow{v} = (-5,-2)$ i $\overrightarrow{w} = (-6,0)$, calculeu:

*a*) $5\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$
*b*) $3\overrightarrow{u} - \frac{2}{3}\overrightarrow{w}$
*c*) $-\overrightarrow{w} - 3(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$
*d*) $-3\overrightarrow{v} + 5\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$

i calculeu-ne els seus mòduls.

Exercici 153. Trobeu quatre vectors paral · lels i tres perpendiculars al vector $\overrightarrow{u}(-5,4)$. En podeu trobar d'unitaris?

Exercici 154. Calculeu l'angle que formen els vectors següents i extreis conclusions sobre la seva direcció i sentit:

*a)* $\overrightarrow{u}(5,2)$ i $\overrightarrow{v}(10,4)$

*b)* $\overrightarrow{u}(-3,15)$ i $\overrightarrow{v}(2,-10)$

*c)* $\overrightarrow{u}(3,4)$ i $\overrightarrow{v}(-50,40)$

*d)* $\overrightarrow{u}(-3,4)$ i $\overrightarrow{v}(-2,10)$

Exercici 155. Donats els punts $A(2,3)$ i $B(-5,4)$, trobeu els punts que divideixen el segment $AB$ en dues parts iguals, en tres parts iguals i en quatre parts iguals.

## Rectes

Exemple 88. Trobeu la recta que passa pels punts $A(5,9)$ i $B(-10,8)$.
Ho farem de diverses maneres:

- Calculant el vector director i amb un punt:

  El vector director pot ser $\overrightarrow{v}=(-10-5,8-9)=(-15,-1)$. Qualsevol múltiple seu també és vector diretor de la recta. Per tant, triarem $\overrightarrow{v}(15,1)$ per evitar els signes.

  D'aquí podem obtenir diverses equacions de la recta fàcilment:

  - L'equació vectorial: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{(5,9)}+\lambda\cdot\overrightarrow{(15,1)}$
  - L'equació paramètrica: $r\colon \begin{cases} x=5+15\lambda \\ y=9+\lambda \end{cases}$
  - L'equació contínua: $r\colon \frac{x-5}{15}=y-9$

- Trobant la pendent:

  Amb la fórmula, $m=\frac{8-9}{-10-5}=1/15$. Per tant $r\colon y=1/15x+n$. Substituïnt, per exemple, $A$ a l'equació de la recta, tenim que $9=1/15\cdot 5+n$. Pel que $n=26/3$. Per tant, $r\colon y=1/15x+26/3$.

- A partir de la contínua o a partir de la explícita, podem trobar l'equació general[1].

Exemple 89. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $P\,(3,-2)$ i que té per vector director $\overrightarrow{v}\,(1,-4)$.

- L'equació paramètrica és: $r:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-2-4\lambda \end{cases}$

[1] No és recomanable fer-ho amb un sistema d'equacions substituïnt els punts.

- L'equació contínua és $r : x - 3 = \frac{y+2}{-4}$
- L'equació general és $-4 \cdot (x - 3) = y + 2$, és a dir, $-4x - y + 10 = 0$
- Si aïllam la $y$ tenim: $y = -4x + 10$. Aleshores, la pendent d'aquesta recta és $-4$.

Exercici 156. Trobeu la recta determinada per:

*a*) Els punts $A(-2, -1)$ i $B(2, 4)$

*b*) El punt $P(1, -4)$ i el vector director $\overrightarrow{v}(5, -3)$

*c*) El punt $P(1, -2)$ i angle que forma amb l'eix $OX$ és $\alpha = 135°$

*d*) El punt $P(1, -1)$ i la pendent $m = 2$

*e*) La pendent $m = 2$ i l'ordenada a l'origen $-5$

Exercici 157. Donada la recta $r$ que passa pel punt $P(-5, -3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(12, 8)$:

*a*) Trobeu les equacions vectorial i paramètrica de la recta

*b*) Trobeu tres punts que pertanyin a $r$

*c*) Esbrina si els punts $(-11, -7)$ i $(2, -1)$ pertanyen a la recta.

Exercici 158. Donada la recta $s$ que passa pel punt $P(4, -3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(2, -7)$:

*a*) Trobeu l'equació contínua de la recta

*b*) Trobeu tres punts que pertanyin a $r$

*c*) Esbrina si els punts $(8, -7)$ i $(0, 11)$ pertanyen a la recta.

Exercici 159. Donada la recta $s$ que passa pel punt $P(-2, 3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(-1, 4)$:

*a*) Trobeu l'equació general de la recta

*b*) Trobeu tres punts que pertanyin a $r$

*c*) Esbrina si els punts $(-5, 15)$ i $(4, 3)$ pertanyen a la recta.

Exercici 160. Troba l'equació general de la recta que passa pels punts $A(2, 3)$ i $B(-3, -2)$.

Exercici 161. Troba l'equació explícita de la recta que:

*a*) passa pel punt $A(-3, -1)$ i té pendent $m = -2$

*b*) passa pels punts $A(-4, -2)$ i $B(-3, -1)$

*c*) passa pel punt $A(-5, 2)$ i té ordenada a l'origen $-4$.

Exercici 162. Trobeu un punt i el vector director de cadascuna d'aquestes rectes:

a) $\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(-10,-4)} + k\overrightarrow{(-9,7)}$

b) $\frac{x-15}{-1} = \frac{y+2}{6}$

c) $2x - 5y + 3 = 0$

d) $y = -5x + 10$

e) $\begin{cases} x = 2 - 8k \\ y = 3 + 6k \end{cases}$

f) $x - 5 = \frac{y+4}{12}$

g) $x + 3y + 1 = 0$

h) $y = -\frac{3}{2}x - 2$

i) $\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 11 + k \end{cases}$

j) $\frac{-x-5}{-1} = \frac{4y+4}{8}$

k) $-2x - y - 12 = 0$

l) $y = x + 4$

Exercici 163. Indiqueu si els punts següents estan alinets:

a) $A(-1,1)$, $B(2,1)$ i $C(8,5)$

b) $D(-1,2)$, $E(0,0)$ i $F(2,-2)$

En cas negatiu, obteniu-ne un que hi estigui.

Exercici 164. Esbrineu la posició relativa de les rectes següents:

a) $r\colon 6x-15y+1=0$ i $s\colon -10x+25y+1=0$

b) $r\colon 2x-10y+8=0$ i $s\colon x+5y+4=0$

c) $r\colon y = 2x+3$ i $s\colon y = 2x+1$

d) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon \frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{-12}$

e) $r\colon 2x+6y+4=0$ i $s\colon -3x-9y-6=0$

f) $r\colon y = x+1$ i $s\colon y = -x+1$

g) $r\colon y = 3x+\frac{1}{2}$ i $s\colon 6x-2y+1=0$

h) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon \begin{cases} x = -10 - k \\ y = 2 + k \end{cases}$

i) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s\colon 2x-y+5=0$

Exercici 165. Trobeu el punt d'intersecció de les rectes secants de l'exercici anterior.

Exercici 166. Trobeu la recta paral·lela a la recta $r$ que passa pel punt $P$ en els casos següents:

a) $r\colon 4x-5y+3=0$, $P(-3,5)$

b) $r\colon \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3}$, $P(4,-10)$

c) $r\colon y = -5x+3$, $P(-1,1)$

Exercici 167. Indiqueu si els parells de rectes següents són perpendiculars:

a) $r\colon x-5y+1=0$, $s\colon 10x+2y-3=0$

b) $r\colon y = 2x+4$, $s\colon y = -\frac{1}{2}x+8$

c) $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$, $s\colon \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-1}$

*d*) $r\colon x+y+4=0$, $s\colon -x-y-1=0$

*e*) $r\colon y=x+1$, $s\colon y=-x-2$

*f*) $r\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{7}$, $s\colon 7x+3y+5=0$

Exercici 168. Trobeu l'equació de la recta perpendicular a la recta $r$ que passa pel punt $P$:

*a*) $r\colon 4x-5y+3=0$, $P(-3,5)$

*b*) $r\colon \frac{x+5}{-2}=\frac{y+1}{-3}$, $P(4,-10)$

*c*) $r\colon y=-5x+3$, $P(-1,1)$

*d*) $r\colon \begin{cases} x=3+5\lambda \\ y=-2-6\lambda \end{cases}$, $P(1,1)$

Exercici 169. Calculeu el valor de $a$ per a què les rectes $r\equiv 3x+ay+4=0$ i $s\equiv 4x-2y-1=0$ siguin

*a*) Paral · leles

*b*) Perpendiculars

*c*) Formin un angle de 45 graus

*d*) Formin un angle de 60 graus

Exercici 170. Calculeu l'angle que formen les rectes següents:

*a*) $r\colon x-y+1=0$, $s\colon 7x+2y-3=0$

*b*) $r\colon y=-3x+4$, $s\colon y=-x+1$

*c*) $r\colon 2x+y+4=0$, $s\colon -3x+2y-1=0$

*d*) $r\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}$, $s\colon \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}$

Exercici 171. Donada la recta $r\colon 2x-3y+1=0$, calculeu:

*a*) el seu vector director i un vector perpendicular,

*b*) l'equació de la recta que passa pel punt $A\,(3,-5)$ i que és perpendicular a la recta $r$,

*c*) el punt simètric del punt $A$ respecte de la recta $r$.

Exercici 172. Calculeu la pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes següents:

*a*) $x+3y=4$

*b*) $4y+5=-x$

*c*) $2x-7y=0$

*d*) $-8y=8$

Exercici 173. Calculeu les equacions de la recta que passa pels punts $A\,(-1,0)$ i $B\,(-4,-1)$. Calculeu el seu vector director i altres dos punts més de la recta.

Exercici 174. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $A\,(3,-5)$ i que segueix la direcció $\vec{v}(-1,7)$. Calculeu la seva pendent.

Exercici 175. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-5,1)$.

Exercici 176. Donada la recta $y = 2x + 8$, calculeu:

*a*) el seu vector director,

*b*) l'equació de la recta paral · lela que passa pel punt $(0,-8)$,

*c*) un vector perpendicular a la recta,

*d*) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt $(0,-8)$.

Exercici 177. Calculeu els punts de tall dels parells de rectes següents:

*a*) $r\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$ i $s\colon 3x - 5y + 2 = 0$

*b*) $r\colon y = 6x - 10$ i $s\colon 9x - 3y + 27 = 0$

*c*) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon y = -x + 2$

*d*) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \end{cases}$

*e*) $r\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$ i $s\colon \frac{x}{10} = \frac{y+8}{-1}$

*f*) $r\colon 3x - 2y + 6 = 0$ i $s\colon 7y - 8x + 2 = 0$

*g*) $r\colon y = 4x - 2$ i $s\colon y = 10x - 8$

*h*) $r\colon y = 4x - 2$ i $s\colon y = 4x - 10$

*i*) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{3}$

*j*) $r\colon \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ i $s\colon 10x - 2y + 3 = 0$

*k*) $r\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+10}{-2}$ i $s\colon y = 10x - 12$

# 6

# Geometria de l'espai

## 6.1 Sistema de coordenades espacials

De forma anàloga al pla cartesià, a l'espai tridimensional tenim tres eixos de coordenades, $x$, $y$ i $z$, els quals són perpendiculars i parteixen d'un punt, anomenat *origen de coordenades*. La forma més usual de representar aquests eixos dibuixant l'eix $x$ en la direccció dreta-esquerra, l'eix $y$ en la direcció davant-darrera i l'eix $z$ en la direcció dalt-baix (Figura 6.1)

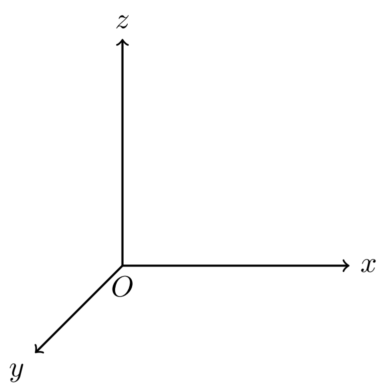



Figura 6.1: Representació usual del sistema de coordenades cartesianes

En aquest sistema de coordenades, un punt qualsevol $P$ ve localitzat per les projeccions als eixos de coordenades. De la mateixa manera que el cas bidimensional, direm que $P$ té *coordenades* $(x, y, z)$ i el podrem denotar com $P(x, y, z)$. Per exemple, el punt de coordenades $(1, 2, 3)$ correspon al punt $A$ de la figura següent (Figura 6.2).

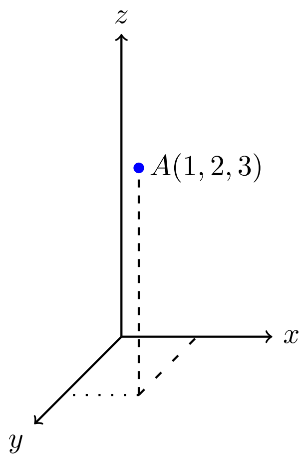



Figura 6.2: Representació del punt $A(1, 2, 3)$

Exercici 178. Representeu gràficament en els eixos de coordenades els punts $A\,(3, -2, 4)$ i $B\,(5, 0, -2)$.

## 6.2 Vectors

Les definicions relatives a vectors que hem estudiat a l'apartat de Geometria del pla (vector fix, vector lliure, extrems d'un vector, etc.; vegi's Capítol 5) poden adaptar-se fàcilment a l'espai només afegint una altra coordenada als vectors. A l'igual que al pla, suposarem que tots els vectors són lliures.

Exemple 90. Són vectors el següents:

$$\overrightarrow{B}(3, -2, 6),\ \overrightarrow{C}(-5, 1, -8)$$

Amb la convenció d'eixos del dibuix anterior (Figura 6.1), el vector $\overrightarrow{B}$ apunta cap a la dreta, s'allunya del lector, i cap a dalt, i el vector $\overrightarrow{C}$ apunta cap a l'esquerra, cap al lector, i cap a baix. Com que no se'ns diu quins són els seus origens, es consider que aquests vectors són lliures i que, per tant, els seus punts d'origen es poden situar on es desitgi.

### 6.2.1 Base estàndard de vectors

**Definició 53 (base estàndard de vectors).** A l'espai cartesià, existeixen tres vectors que formen el que s'anomena *base estàndard de vectors* la qual està formada per tres vectors $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, que tenen les coordenades següents:

$$\vec{i} = \overrightarrow{(1,0,0)},\ \vec{j} = \overrightarrow{(0,1,0)},\ \vec{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$$

Aquests vectors són unitaris, ortogonals (perpendiculars entre si) i formen un base: qualsevol vector es pot posar com a combinació lineal de $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$[1]. És a dir, si $\vec{v}$ és un vector, aleshores existeixen nombres $a$, $b$ i $c$ de manera que $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Per les definicions de $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ és clar que aquests $a$, $b$ i $c$ són els valors de les coordenades de $v$.

Exemple 91. El vector $\vec{v} = (3,2,2)$ compleix que $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Es pot veure la seva representació a la figura següent (Figura 6.3).

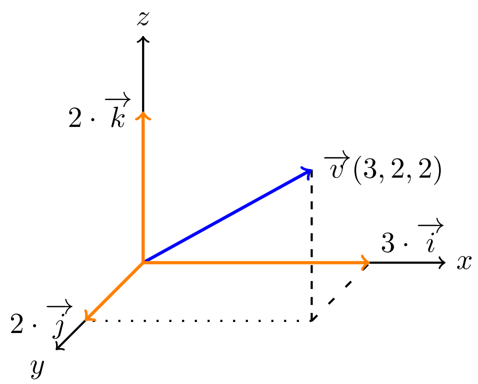



Figura 6.3: Descomposició lineal del vector $\vec{v}(3,2,2)$ respecte de la base estàndard

### 6.2.2 Operacions amb vectors anàlogues al pla

El mòdul d'un vector i les operacions de suma i resta de vectors, producte d'un escalar per un vector i producte escalar de dos vectors es defineixen de manera anàloga al pla:

- El mòdul d'un vector $\vec{u}(a,b,c)$ es calcula com

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

  Per exemple, $|\overrightarrow{(3,-2,6)}| = \sqrt{3^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$.

[1] Les definicions de base d'un espai vectorial escapen a l'abast d'aquest text.

- Donats dos vectors $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$, la seva suma es defineix com $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.

  Per exemple, si $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$ i $\overrightarrow{v} = (-2, -7, 0)$, aleshores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (0, -10, 4)$.

- La resta de dos vectors $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$ es defineix com $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$.

  Per exemple, si $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$ i $\overrightarrow{v} = (-2, -7, 0)$, aleshores $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (4, 4, 4)$.

- Si $k \in \mathbb{R}$ és un nombre qualsevol i $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ és un vector, llavors el producte $k \cdot \overrightarrow{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)$.

  Per exemple, si $\overrightarrow{u} = (2, -3, 4)$ i $k = -3$, aleshores $k \cdot \overrightarrow{u} = (-6, +9, -12)$.

- Dos vectors $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$ són paral · lels si, i només si, $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$ (vegi's proposició 10)

- Si $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$ són vectors, el seu producte escalar es defineix com

  $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

  Així per exemple, $\overrightarrow{(3, -2, 4)} \cdot \overrightarrow{(-1, 0, -5)} = -3 + 0 - 20 = -23$.

  Es verifica el resultat relatiu a l'angle entre dos vectors (proposició 11) i les propietats del producte escalar (teorema 12).

Exercici 179. Determineu si els vectors són paral · lels entre si:

*a*) $\overrightarrow{u}\,(2, -3, 1)$ i $\overrightarrow{v}\,(4, -6, 2)$

*b*) $\overrightarrow{u}\,(2, -3, 1)$ i $\overrightarrow{v}\,(4, -6, 3)$

Exercici 180. Què val l'angle format entre els vectors $\overrightarrow{u}(2, 0, -3)$ i $\overrightarrow{v}(-3, 1, 2)$?

### 6.2.3 Producte vectorial

Vegem tot seguit una operació nova: el producte vectorial entre vectors. Noteu la paraula *vectorial* (que no escalar) a aquesta expressió. La importància d'aquesta paraula és perquè el producte vectorial donarà com a resultat un vector mentre que el producte escalar dóna com a resultat un nombre.

Definició 54 (producte vectorial de vectors). El *producte vectorial de dos vectors*, $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{w}(w_1, w_2, w_3)$, que es denota per $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$ o $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, respecte de la base estàndard, es defineix com:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} &= (u_1, u_2, u_3) \wedge (w_1, w_2, w_3) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aquest determinant es pot fer aplicant la regla de Sarrus (algorisme 1). O bé es pot desenvolupar per la tercera filera, obtenint que

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{w} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right),\end{aligned}$$

que és útil per aquelles persones que volen memoritzar fórmules en comptes de realitzar càlculs.

Notem que el producte vectorial de dos vectors és, per tant, un altre vector.

Exemple 92. Siguin els vectors $\vec{u}(2,0,-3)$ i $\vec{v}(-3,1,2)$. Aleshores, el seu producte vectorial és:

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{k} + 0 + 9\vec{j} + 3\vec{i} + 0 - 4\vec{j} \\ &= 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \\ &= (3,5,2)\end{aligned}$$

Exercici 181. Calculeu $\vec{u} \wedge \vec{v}$, amb $\vec{u}(0,-2,3)$ i $\vec{v}(-3,-5,4)$.

**Proposició 20** (mòdul del producte vectorial)**.** *Donat dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, el mòdul del seu producte vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ compleix que*

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \widehat{uv},$$

*on $\widehat{uv}$ denota l'angle que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.*

Vegem ara les propietats del producte vectorial.

#### 6.2.3.1 Propietats del producte vectorial

Donats els vectors $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ i el nombre $k$ qualssevol, el producte vectorial verifica les propietats següents:

*a)* $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (anticommutativa)

*b)* $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

*c)* $k\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = (k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \left(k\vec{b}\right)$

*d)* $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

*e*) En general, $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$

*f*) El vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ és perpendicular tant al vector $\vec{a}$ com al vector $\vec{b}$.

*g*) El mòdul del producte vectorial de dos vectors ens dóna l'àrea del paralel · lògram definit per aquest dos vectors (Figura 6.4):

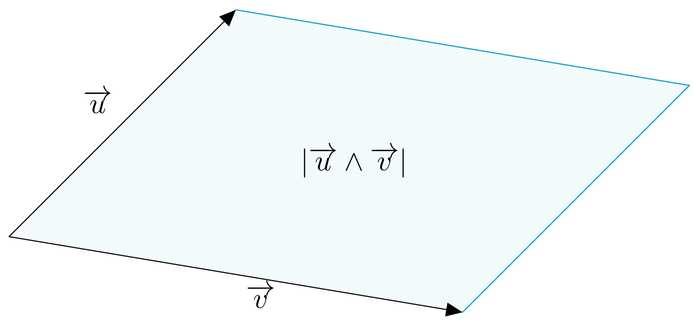



Figura 6.4: Àrea del paral · lelogram determinat pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

Observació 16. Com que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ i $\vec{b} \wedge \vec{a}$ són perpendiculars a $\vec{a}$ i $\vec{b}$, això vol dir que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ i $\vec{b} \wedge \vec{a}$ estan a la mateixa línia, un apuntant cap a baix i un apuntant cap a dalt. Per determinar l'orientació d'aquests dos vectors de forma gràfica existeix un procediment, anomenat *regla del llevataps*.

Exercici 182. Trobeu un vector que sigui perpendicular als vectors $\vec{a}(-4, 0, 3)$ i $\vec{b}(-3, -1, 0)$, simultàniament.

Exercici 183. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(4, -2, 5)$ i $\vec{v}(3, 0, -5)$. Trobeu un altre vector ortonormal.

Exercici 184. Trobeu l'àrea del paral · lelogram que formen els vectors $\vec{u}(-2, 0, 4)$ i $\vec{v}(1, 3, -1)$.

### 6.2.4 Producte mixt

Tot seguit veurem una nova operació, entre tres vectors, la qual tendrà la principal aplicació de calcular volums de determinats prismes i piràmides (proposició 21, proposició 22).

Definició 55 (producte mixt). Donats tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, el seu *producte mixt*, que es denota per $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, es defineix com

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Notem que el producte mixt no és, en general, una operació commutativa. És a dir, el valor numèric del producte mixt depèn fortament de l'ordre dels vectors involucrats.

Exemple 93. Donats els vectors $\vec{u}\,(0,-1,5)$ , $\vec{v}(2,0,-3)$ i $\vec{w}(-3,1,2)$, calculeu el producte mixt $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Tenim que

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \\ &= (0,-1,5) \cdot ((2,0,-3) \wedge (-3,1,2)) \\ &= (0,-1,5) \cdot (3,5,2) \\ &= 0 - 5 + 10 = 5.\end{aligned}$$

Observació 17. Per a qualssevol vectors $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el producte mixt $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ també es pot calcular amb la fórmula següent:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

és a dir, els vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ disposats per fileres al determinant.

Exemple 94. Donats els vectors $\vec{u}\,(0,-1,5)$, $\vec{v}(2,0,-3)$ i $\vec{w}(-3,1,2)$, calculeu $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 + 10 + 4 = 5.$$

Exercici 185. Calculeu $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, amb $\vec{u}\,(3,1,-2)$, $\vec{v}(-2,10,0)$ i $\vec{w}(0,-1,-5)$.

Definició 56 (paral · lelepípede). Un *paral · lelepípede* és un prisme la base del qual és un paral · lelogram (Figura 6.5).

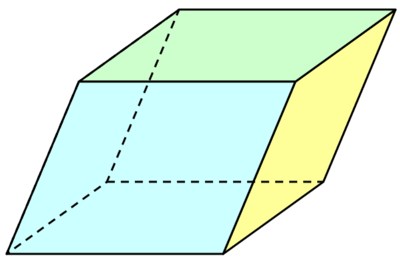


Figura 6.5: Un paral · lelepípede

**Proposició 21** (càlcul del volum d'un paral · lelepípede). *Donat el paral · lelepípede definit pels vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ (vegeu Figura 6.6), el seu volum $V_p$ és igual al valor absolut del producte mixt, és a dir,*

$$V_p = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$$

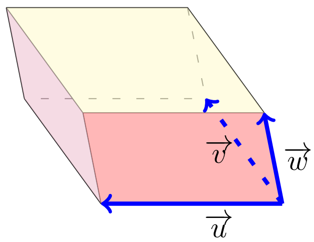



Figura 6.6: Volum del paral · lelepípede definit pels vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$

Definició 57 (tetraedre). Un *tetraedre* és una piràmide amb totes les cares iguals entre si i iguals a triangles equilàters.

**Proposició 22** (càlcul del volum d'un tetraedre). *Donat el tetraedre format pels vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$, el seu volum $V_t$ és igual a:*

$$V_t = \frac{1}{6}\,||[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]||\,.$$

## 6.3 La recta a l'espai

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de tres dimensions.

Si d'una recta coneixem un punt qualsevol d'aquesta i un vector tengui la mateixa direcció (és a dir, que estigui situat sobre ella o bé que estigui situat sobre una recta paral · lela), llavors tenim elements suficients per a determinar-la completament, és a dir, per a determinar les coordenades de qualsevol punt.

En altres paraules, basta que coneguem un punt de la recta $P_0$ i el seu *vector director* $\overrightarrow{v}$.

Definició 58 (equació vectorial de la recta). Una recta $r$ es pot determinar per un punt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la recta i un vector director $\overrightarrow{v}$, de manera que, per a qualsevol punt $P(x, y, z)$ pertanyent a la recta, es té que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{v}, \tag{6.1}$$

per qualque $\lambda \in \mathbb{R}$ (Figura 6.7). Aquesta equació (6.1) es coneix com a *equació vectorial de la recta*.

### 6.3.1 Equació paramètriques de la recta

Sigui $r$ una recta determinada per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punt qualsevol i $\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z)$ és el seu vector director. Aleshores un punt $P(x, y, z)$ de la recta compleix l'equació vectorial (Equació 6.1), és a dir, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{v}$,

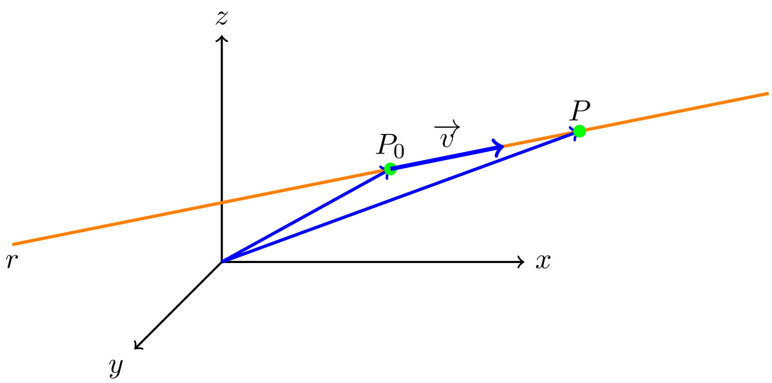



Figura 6.7: Representació de la recta que té vector director $\overrightarrow{v}$ i que passa per $P_0$.

per qualque $\lambda \in \mathbb{R}$, o sigui, $\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(x_0,y_0,z_0)} + \lambda\overrightarrow{(v_x,v_y,v_z)}$. Operant, tenim que s'ha de verificar que

$$\overrightarrow{(x,y,z)} = \overrightarrow{(x_0+\lambda v_x, y_0+\lambda v_y, z_0+\lambda v_z)}.$$

Si dos vectors són iguals, llavors component a component són iguals. El que implica que

$$r\colon \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{array} \right. , \tag{6.2}$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquesta equació (Equació 6.2), reb el nom de *equació paramètrica de la recta*.

Exemple 95. Si una recta passa pel punt $(0,-1,3)$ i el seu vector director és el $\overrightarrow{v}(-3,2,0)$, llavors la seva equació paramètrica és la següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 + \lambda\cdot(-3) \\ y = -1 + \lambda{\cdot}2 \\ z = 3 + \lambda{\cdot}0 \end{array} \right. , \text{ és a dir, } \left\{ \begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir $\lambda$ per qualsevol nombre a les expressions anteriors.

Exemple 96. Si a la recta anterior (exemple 95), feim $\lambda = 2$, tenim que

$$\left. \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \\ z = 3 \end{array} \right\},$$

i, per tant, $(-6,3,3)$ és un altre punt de la recta.

Exercici 186. Escriviu les equacions paramètriques de les rectes següents:

*a*) recta que passa pel punt $(-1, 0, 2)$ i que té la direcció donada pel vector director $\vec{v}(1, 3, -5)$

*b*) recta que passa per l'origen de coordenades i que té com a vector director $\overrightarrow{(1, -2, 0)}$

*c*) recta que passa pels punts $(3, -5, 2)$ i $(2, -7, -3)$

Trobeu dos punts més de cada recta.

### 6.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllam $\lambda$ en cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (Equació 6.2), tenim que

$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_x}, \ \lambda = \frac{y - y_0}{v_y}, \ \lambda = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Si igualam les expressions, obtenim el que s'anomena *equació en forma contínua de la recta* (o simplement *equació contínua*):

$$r\colon \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}, \tag{6.3}$$

on $P(x_0, y_0, z_0)$ és un punt qualsevol de la recta i $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ és el seu vector director.

Exemple 97. La recta $r$ que passa pel punt $(0, -1, 3)$ i té com a vector director $\vec{v}(-3, 2, 0)$ té com a equació contínua:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 3}{0}$$

Observació 18. Observem que en aquest exemple ha aparegut un denominador igual a 0. A pesar de què la divisió per 0 no és una operació que estigui definida, en el context de l'equació contínua d'una recta, aquesta expressió està permesa.

Exercici 187. Escriviu les equacions contínues de la rectes següents:

*a*) recta que passa per $(0, -5, 3)$ i que té vector director $\vec{v}(1, -2, 2)$

*b*) recta que passa pels punts $(6, -2, 0)$ i $(2, -1, -1)$

*c*) recta que passa pel punt $(-1, -1, 2)$ i que té com a vector director $\vec{v}(2, 0, -3)$.

### 6.3.3 Equació implícita de la recta

Si a les equacions de la recta en forma contínua (Equació 6.3) llevam els denominadors i transposem tots els termes al primer membre, obtindrem dues equacions de la forma:

$$\left\{\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right., \tag{6.4}$$

on $A$, $B$, $C$, $D$, $A'$, $B'$, $C'$ i $D'$ són nombres reals. Aquestes equacions reben el nom d'*equació implícita de la recta*.

Exemple 98. La recta $r$ que passa pel punt $(0,-1,3)$ i que té vector director $\overrightarrow{v}(-3,2,0)$ té l'equació contínua:

$$r\colon \frac{x}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{0}$$

(vegis' exemple 97). Per tant, fent els productes creuats de cada igualtat, obtenim que:

$$r\colon \left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & -3\,(y+1) \\ 0\,(y+1) & = & 2\,(z-3) \\ 0 & = & -3(z-3) \end{array}\right.$$

Així, operant, obtenim un sistema de tres equacions i tres incògnites:

$$r\colon \left\{\begin{array}{r} 2x+3y+3=0 \\ 2z-6=0 \\ -3z+9=0 \end{array}\right.$$

Per la naturalesa de la recta aquest sistema té rang 2, és a dir, té un grau de llibertat. Això vol dir que d'aquestes tres equacions, n'hem de triar dues que no siguin linealment dependents. En el nostre cas, es veu que la segona i la tercera són linealment independents. Per tant, l'equació implícita de la recta queda:

$$r\colon \left\{\begin{array}{r} 2x+3y+3=0 \\ 2z-6=0 \end{array}\right.$$

Observació 19. De vegades és necessari calcular tots els productes creuats per a passar de l'equació contínua a la implícita perquè els productes creuats de la primera i segona fracció i de la segona i tercera fracció poden ser linealment dependents. Vegeu per exemple l'exercici exercici 190 apartat *c*).

Observació 20. Noteu que en principi no podem obtenir l'equació implícita d'una recta directament amb el seu vector director i un punt d'aquesta. Hem de passar per l'equació contínua per obtenir l'equació implícita.

Exercici 188. Trobeu les equacions implícites de les rectes de l'exercici 187.

#### 6.3.3.1 Vector director a partir de l'equació implícita

La proposició següent dóna una manera per trobar el vector director d'una recta que ve donada mitjançant l'equació implítica.

**Proposició 23** (vector director a partir de l'equació implícita)**.** *Sigui $r$ una recta donada amb l'equació implícita:*

$$r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

*El seu vector director, $v_r$, es pot calcular amb la fórmula:*

$$\overrightarrow{v_r} = (A,B,C)\wedge(A',B',C') \tag{6.5}$$

Exemple 99. El vector director de la recta

$$r:\begin{cases} 2x+3y+3=0 \\ 2z-6=0 \end{cases}$$

és $\overrightarrow{v}=(2,3,0)\wedge(0,0,2)$, és a dir,

$$\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = (6,-4,0)\,.$$

Exercici 189. Calculeu el vector director de les rectes:

*a)* $\begin{cases} x-y-5=0 \\ 4x+y-5z-6=0 \end{cases}$

*b)* $\begin{cases} 2x-z-5=0 \\ 3x+y-z-2=0 \end{cases}$

*c)* $\begin{cases} 2x=0 \\ 2z+y=0 \end{cases}$

*d)* $\begin{cases} 2x+3y+5z-2=0 \\ 4x+6y+10z-4=0 \end{cases}$

#### 6.3.3.2 Pas de l'equació implícita a l'equació paramètrica

Per passar de l'equació implícita a l'equació paramètrica ho farem indirectament: calcularem el vector director de la recta i un punt[2].

Exemple 100. Trobeu les equacions paramètriques de la recta

$$r:\begin{cases} 2x+y+2z+4=0 \\ x-y+4z+12=0 \end{cases}$$

[2]Es podria fer directament, parametritzant una variable en les equacions de l'equació implícita i resolent el sistema corresponent, però és massa farragós.

- Per l'apartat anterior (Subsubsecció 6.3.3.1), tenim que el seu vector director és

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= -2\vec{k} + 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{i} - \vec{k} - 8\vec{j} \\ &= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} = \overrightarrow{(6,-6,-3)}.\end{aligned}$$

- Per trobar un punt, substituïm una variable qualsevol, o $x$ o $y$ o $z$[3]. Triem $x$. Substituïm, $x = 0$. Llavors hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} y + 2z + 4 = 0 \\ -y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

  Si apliquem la tècnica de reducció de sistemes d'equacions lineals de dues equacions[4], restant les equacions obtenim: $6z + 16 = 0$, el que implica que $z = \frac{-8}{3}$. Substituïnt el valor de $z$ a la primera equació i realitzant els càlculs, obtenim $y = \frac{4}{3}$. Per tant, un punt de la recta és $(0, \frac{4}{3}, \frac{-8}{3})$.

- Amb tota la informació anterior, l'equació paramètrica de la recta és:

$$r\colon \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = \frac{4}{3} - 6\lambda \\ z = \frac{-8}{3} - 3\lambda \end{cases} .$$

#### 6.3.3.3 Exercicis d'equacions de rectes

Tenim diverses equacions per a expressar una recta (Figura 6.8). Practiquem el pas d'unes a les altres.

Exemple 101. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt $P(3,-2,0)$ i que té per vector director $\vec{v}(1,0,-1)$.

Tenim que:

- L'equació vectorial és

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{(3,-2,0)} + \lambda\overrightarrow{(1,0,-1)}$$

[3]Penseu que una recta té 2 equacions i 3 incògnites. Per tant, hi ha un grau de llibertat. D'aquesta manera només hem de substituir una sola variable.

[4]Podríem resoldre aquest sistema usant la regla de Cràmer. També podríem usar la tècnica de substitució i igualació.

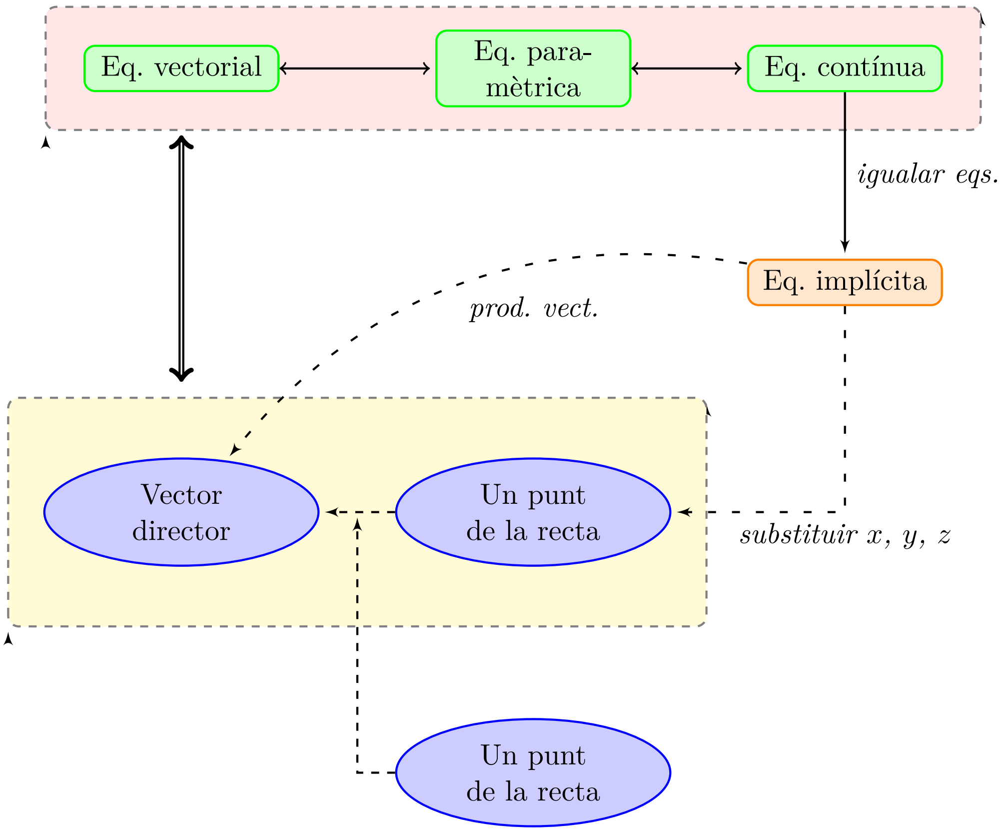



Figura 6.8: Relacions entre les equacions d'una recta

- Les equacions paramètriques són

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

- L'equació contínua és

$$r : x - 3 = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{-1}$$

- I les equacions implícites són

$$r : \begin{cases} 0 \cdot (x-3) & = & y+2 \\ -1 \cdot (x-3) & = & z \end{cases}, \text{ és a dir, } r : \begin{cases} y+2 & = & 0 \\ -x-z+3 & = & 0 \end{cases}$$

Exercici 190. Trobeu totes les equacions de les rectes següents:

*a*) Recta que té vector director $\overrightarrow{(2, -3, -1)}$ i passa per $(0, 2, -10)$

*b*) Recta que passa pels punts $(7, -4, 0)$ i $(3, 0, -5)$

*c*) Recta donada per l'equació $\overrightarrow{(x, y, z)} = \overrightarrow{(3, 2, 1)} + \lambda\overrightarrow{(-1, 0, 1)}$, amb $(x, y, z)$ un punt qualsevol de la recta.

*d*) Recta donada per $r\colon \frac{x-3}{5} = y + 3 = \frac{z+2}{-2}$

*e*) La recta $s\colon \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 4x + 7z = 0 \end{cases}$

#### 6.3.3.4 Rectes paral · leles

Donada una recta $r$ que té vector director $\vec{v}$ i passa per $P$, si volem trobar una recta paral · lela $s$ que passi per $Q$, només hem de notar que $s$ tendrà $\vec{v}$ com a vector director i passarà per $Q$.

Exemple 102. Calculeu l'equació de la recta paral · lela a $r\colon \frac{x}{-4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2}$ que passa pel punt $A(2, 5, -1)$.

Donat que la recta que cercan és paral · lela a la recta $r$, ambdues tenen el mateix vector director: $\vec{v}(-4, 3, 2)$. A més, sabem que la recta ha de passar pel punt $A(2, 5, -1)$. Llavors, si subtituïm aquestes dues dades, per exemple, a l'equació contínua de la recta, obtindrem:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{2}$$

Exercici 191. Donada la recta $r : \{x = 3 + \lambda,\ y = -2,\ z = -\lambda\}$ en forma paramètrica, trobeu l'equació contínua de la recta paral · lela a $r$ que passa pel punt $A(0, -8, 6)$.

Exercici 192. Trobeu l'equació paramètrica de la recta $s$ que passa per $(0, 4, 4)$ i és paral · lela a $r\colon \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ 8x - 7z = 0 \end{cases}$.

## 6.4 El pla a l'espai

Per definir un pla a l'espai necessitam tres punts $A$, $B$ i $C$ no alineats, o equivalentment, un punt $A$, per on passa el pla, i dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ linealment independents[5] (la definició de vectors linealment dependents és anàloga a la de línies d'una matriu. Vegi's definició 39) — en el cas de només tenir dos vectors, tendríem infinits plans paral · lels. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ s'anomenen *vectors directors* del pla.

D'aquesta manera, si $\pi$ és el pla determinat per $A$, i els vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, aleshores un punt $P$ que pertanyi a $\pi$ compleix que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

[5] L'equivalència, resulta prenent $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.

Però $\overrightarrow{AP}$ és suma dels vectors $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{AN}$, que són múltiples de $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. És a dir,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},\end{aligned}$$

per qualques $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ (Figura 6.9). En resum,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \tag{6.6}$$

amb $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$. Aquesta equació (Equació 6.6), s'anomena *l'equació vectorial del pla*.

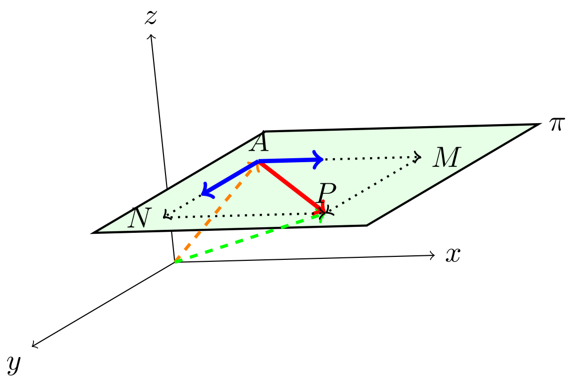



Figura 6.9: Representació de les equacions vectorials d'un pla

### 6.4.1 Equacions paramètriques del pla

A partir de l'equació vectorial del pla (Equació 6.6), igualant coordenades s'obtenen les *equacions paramètriques del pla*: si $\pi$ és un pla determinat pel punt $A(x_1, y_1, z_1)$ i els vectors directors $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$, aleshores les equacions paramètriques de $\pi$ són:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_1 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_1 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\}, \tag{6.7}$$

on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Recordeu que $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ són vectors no proporcionals entre si.

Observació 21. Si donam valors qualssevol als paràmetres $\lambda$ i $\mu$ i els substituim a l'expressió anterior, aleshores trobarem punts del pla en qüestió.

Exemple 103. Sigui $\pi$ el pla que conté el punt $(2, 0, -3)$ i que els vectors $(0, 3, -1)$ i $(2, 5, 0)$ (els quals no són proporcionals entre si). Volem trobar dos punts de $\pi$ a més del que ja sabem.

L'equació paramètrica de $\pi$ és

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2 \\ y = 0 + \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 5 \\ z = -3 + \lambda \cdot (-1) + \mu \cdot 0 \end{array}\right\} \text{ i.e., } \left.\begin{array}{l} x = 2 + 2\mu \\ y = 3\lambda + 5\mu \\ z = -3 - \lambda \end{array}\right\}$$

Si donam valors a $\lambda$ i $\mu$ obtenim altres punts del pla:

- Fent $\lambda = 0$ i $\mu = 1$, obtenim que $x = 4$, $y = 5$ i $z = -3$. Per tant, $(4, 5, -3)$ pertany a $\pi$.
- Fent $\lambda = 1$ i $\mu = 0$, obtenim que $x = 2$, $y = 3$ i $z = -4$. Per tant, $(2, 3, -4) \in \pi$.

Exercici 193. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $(0, 0, -8)$ i que és paral · lel als vectors $\vec{u}(2, 0, -5)$ i $\vec{v}(1, 1, 9)$. Trobeu tres punts més del pla. Trobeu un vector més que pertanyi al pla (a partir dels punts que heu trobat o bé a partir de combinació lineal de $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$).

### 6.4.2 Equació general del pla

El darrer tipus d'equació del pla és l'*equació general*. L'equació general té la forma

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0,$$

on $A$, $B$, $C$ i $D$ són nombres qualssevol. Per trobar l'equació general d'un pla $\pi$ determinat pels vectors $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ i que passa pel punt $P = (a, b, c)$, es pot emprar la fórmula següent (Equació 6.8):

$$\begin{vmatrix} x-a & u_1 & v_1 \\ y-b & u_2 & v_2 \\ z-c & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{6.8}$$

Exemple 104. Seguint amb el pla de l'exemple anterior (exemple 103), tenim que tots els seus punts compleixen l'equació

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ y-0 & 3 & 5 \\ z-(-3) & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calculant el determinant,

$$\pi \equiv -2y - 6\,(z+3) + 5\,(x-2) = 0,$$

és a dir,

$$\pi \equiv 5x - 2y - 6z - 28 = 0$$

Exercici 194. Trobeu l'equació general del plans:

a) El pla $\pi_1$ que té com a vectors directors $\overrightarrow{(3,-2,3)}$ i $\overrightarrow{(1,1,1)}$ i passa pel punt $(2,2,4)$

b) El pla $\pi_2$ que passa pel punt $(0,1,-2)$ i és paral · lel als vectors $\vec{u} = (0,2,4)$ i $\vec{v} = (4,4,2)$

c) El pla que té vectors directors $\vec{u}(1,0,0)$ i $\vec{v}(0,0,1)$ i passa per $(0,2,2)$.

#### 6.4.2.1 Pas de l'equació general a la paramètrica

Notem que, si tenim un pla $\pi$ expressat mitjançant una equació paramètrica, aleshores és relativament senzill expressar $\pi$ mitjançant l'equació general. El motiu és que en l'equació paramètrica del pla tenim els vectors directors i un punt de $\pi$. Per tant, simplement aplicarem la fórmula Equació 6.8.

Exemple 105. Suposem que $\pi$ té l'equació paramètrica:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -\lambda - 2\mu \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Volem expressar $\pi$ amb l'equació general.

Llavors de l'equació paramètrica, tenim que $\pi$ té com a vectors directors $\vec{u}(0,1,-1)$ i $\vec{v}(1,-2,0)$ i que passa pel punt $P(1,0,-2)$. Per tant, aplicant la fórmula de l'equació general (Equació 6.8) tenim que:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z+2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

és a dir,

$$\pi \equiv -2x - y - z = 0$$

Si volem fer le procés invers, és a dir, passar de l'equació general a l'equació paramètrica, llavors el procés és més llarg, ja que no *veiem* els vectors directors ni els punts per on passa $\pi$ de l'equació general. Donat $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un pla qualsevol, si volem trobar la seva equació paramètrica el que hauríem de fer seria:

a) Trobar tres punts del pla $P$, $Q$ i $R$

b) Amb aquests punts trobar dos vectors del pla: per exemple $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$.

c) Calcular l'equació paramètric amb els vectors anteriors i un punt del pla (per exemple $P$).

Exemple 106. Suposem que tenim el pla $\pi: 2x - 5y - z + 3 = 0$ i volem trobar la seva equació paramètrica.

*a*) Trobem tres punts de $\pi$:

- Si prenem $y = 0$ i $z = 1$, tenim que $x = -1$. Per tant, el punt $P(-1, 0, 1)$ pertany a $\pi$
- Si prenem $x = 0$ i $y = 0$, tenim que $z = 3$. Per tant, el punt $Q(0, 0, 3)$ pertany a $\pi$
- Si prenem $x = 5$ i $z = 3$, tenim que $y = 2$. Per tant, $R(5, 2, 3) \in \pi$

*b*) Trobem dos vectors que pertanyen a $\pi$:

- $\vec{u} = (1, 0, 2)$ prenent $P$ i $Q$ com a extrems
- $\vec{v} = (6, 2, 2)$ prenent $P$ i $R$ com a extrems. En comptes de $\vec{v}$ prenem $\vec{w}(3, 1, 1)$ com a vector director de $\pi$, ja que té nombres menors (si $\vec{v}$ pertany a $\pi$, aleshores $\vec{w}$ també hi pertany, ja que són proporcionals)

*c*) Calculem l'equació general de $\pi$ (prenent $Q$ com a punt de $\pi$):

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 0 & 1 \\ z-3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

és a dir, $\pi \equiv -2x + 5y + z - 3 = 0$.

#### 6.4.2.2 Vector normal al pla a partir de l'equació general

Donat un pla $\pi$, en aquesta secció trobarem un vector perpendicular a $\pi$ a partir de la seva equació general, el qual anomenarem *vector normal*.

Definició 59 (vector normal d'un pla). Donat el pla $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, definirem el seu *vector normal*, que denotarem habitualment per $\vec{n}_\pi$ (o simplement $\vec{n}$), com

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

**Proposició 24** (perpendicularitat del vector normal). *Donat un pla qualsevol $\pi$, $\vec{n}$ és perpendicular a $\pi$, és a dir, el vector normal sempre és perpendicular al seu pla (Figura 6.10).*

Exemple 107. Un vector perpendicular al pla $\pi\colon 5x - 2y - 6z - 28 = 0$ és el vector $\vec{n}\,(5, -2, -6)$.

Exercici 195. Trobeu el vector normal al pla $x - 5y + 8z + 4 = 0$.

L'aplicació inversa del vector normal d'un pla és trobar un pla que és perpendicular a un vector donat. És a dir, donat $\vec{u}$ un vector, trobar un pla $\pi$ tal que $\pi$ és perpendicular a $\vec{u}$. Sabem que un pla perpendicular a $\vec{u}$ serà aquell que tengui $\vec{u}$ com al seu vector normal. Tot seguit, veurem un exemple.

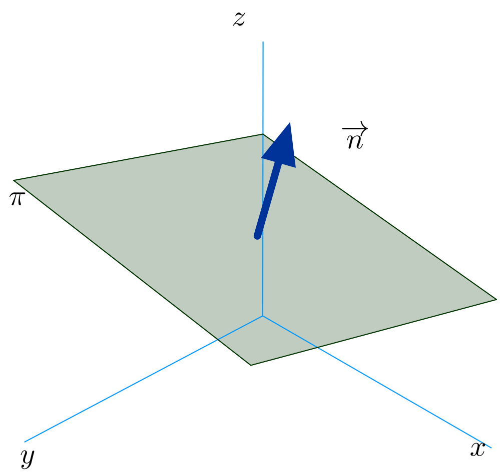



Figura 6.10: Vector normal a un pla

Exemple 108. Volem trobar un pla $\pi$ perpendicular al vector $\vec{v}\,(3,-1,7)$ i que passi pel punt $A(2,-4,0)$.

Un pla perpendicular al vector $\vec{v}\,(3,-1,7)$, és aquell que té l'equació general de la forma

$$\pi \equiv 3x - y + 7z + D = 0,$$

ja que tendria $\vec{u}$ com al seu vector normal (vegi's proposició 24).

D'altra banda, sabem que el punt $A$ és de $\pi$, per tant, compleix les equacions del pla. Llavors:

$$3 \cdot 2 - (-4) + 7 \cdot 0 + D = 0$$

D'aquí es té que $D = -10$, i l'equació del pla és

$$\pi \equiv 3x - y + 7z - 10 = 0$$

Observació 22. Hem vist abans una fórmula per a calcular el vector director d'una recta a partir de les seves equacions implícites (proposició 23). És el moment de justificar aquest resultat amb l'ús dels vectors normals: notem que si $r$ és una recta donada per les seves equacions implícites

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases},$$

amb $A$, $B$, $C$, $D$, $A'$, $B'$, $C'$ i $D' \in \mathbb{R}$, aleshores el seu vector director $\vec{v_r}$ és el vector ortogonal als vectors normals dels plans que defineixen la recta $r$.

És a dir, podem veure la recta $r$ com la intersecció de dos plans $\pi$ i $\rho$ d'equacions $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ i $\rho\colon A'x + B'y + C'z + D' = 0$. En aquest sentit, $\vec{v_r}$ tendrà la mateixa direcció que $\vec{n_\pi} \wedge \vec{n_\rho}$, on $\vec{n_\pi}$ i $\vec{n_\rho}$ són els vectors normals dels plans $\pi$ i $\rho$ respectivament (Figura 6.11).

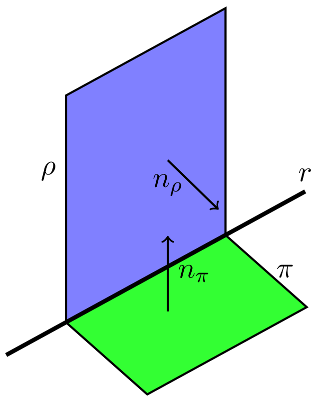



Figura 6.11: Vector director d'una recta com a producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen

### 6.4.3 Plans paral · lels

Donat un pla $\pi_0$, un pla *paral · lel* $\pi_1$ és un pla tal que té els *mateixos* vectors directors[6] i passa per un punt que no pertany a $\pi_0$ (en el cas que passàs per un punt de $\pi_0$, els plans serien *coincidents*, és a dir, el mateix; vegi's Secció 6.5). Per tant, podem trobar les equacions paramètriques o generals de $\pi_1$, segons convengui, amb la informació proporcionada.

Exemple 109. Trobeu l'equació del pla paral · lel a $\pi : 3x - y + z - 8 = 0$ que passa pel punt $A(-2, -2, 6)$.

Si el pla que cercam és papal · lel al pla $\pi$, ambdós tendran el mateix vector normal. Per tant, la seva equació serà de la forma

$$3x - y + z + D = 0,$$

amb $D$ un nombre. Com que el pla que volem trobar passa pel punt $A$, llavors $A$ complirà l'equació del pla anterior:

$$3 \cdot (-2) - (-2) + 6 + D = 0;$$

Per tant, $D = -2$. Llavors el pla que cercam és $3x - y + z - 2 = 0$.

Exercici 196. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt $A(5, -1, 0)$ i és paral · lel al pla $-x + 3y - 8 = 0$.

## 6.5 Posició relativa entre rectes i plans

[6] Realment, no tenen perquè ser els mateixos vectors directors. En general, dos plans són paral · lels quan els vectors directors de primer són combinació lineal dels vectors directors de segon i inversament. Ara bé, sempre podríem triar els mateixos vectors directors per als dos plans.

### 6.5.1 Posició relativa entre dues rectes

Podem suposar que tenim dues rectes $r$ i $s$ i que d'aquestes coneixem els seus vectors directors i un punt pel qual passen. Aquestes dades són bones d'obtenir si les rectes estan en forma de l'equació vectorial, paramètrica o contínua. Si alguna de les rectes es dóna en forma implícita, podem passar-la a forma paramètrica (Subsubsecció 6.3.3.2) o bé trobar el seu vector director i un punt usant el producte vectorial (Subsubsecció 6.3.3.1).

Per tant, suposarem que $r$ té com vector director $\vec{v}$ i passa per $A$, mentre que $s$ té com a vector director $\vec{w}$ i passa per $B$.

- Si $rg(\vec{u}, \vec{w}) = 1$, aleshores $\vec{u}$ i $\vec{w}$ són linealment dependents. Per tant, tenen la mateixa direcció. Llavors $r$ i $s$ poden ser *coincidents* (si tenen una infinitat de punts en comú) o *paral · leles* (si no tenen cap punt en comú).
  - Si són coincidents, llavors el vector $\overrightarrow{AB}$ té la mateixa direcció que $\vec{u}$ i $\vec{w}$, és a dir, $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 1$.
  - Si són paral · leles, llavors el vector $\overrightarrow{AB}$ no té la mateixa direcció que $\vec{u}$ i $\vec{w}$ i, per tant, $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 2$.
- Si $rg(\vec{u}, \vec{w}) = 2$, llavors $\vec{u}$ i $\vec{w}$ són linealment independents, Per tant, tenen diferent direcció. Llavors les rectes poden ser *secants* (es tallen en un punt) o bé es *creuen* (no tenen cap punt en comú)

  Raonant de manera anàloga al cas anterior,
  - Si són secants, llavors $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 2$.
  - Si es creuen, llavors $rg(\vec{u}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 3$.

Tot això queda reflexat en les proposicions següents:

**Proposició 25** (posició relativa de dues rectes usant proporcionalitat de vectors)**.** *Donades dues rectes $r$ i $s$ amb vectors directors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ i que passen pels punts $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ respectivament, tenim que la seva posició relativa es pot determinar amb l'arbre de decisió següent:*

- *Si $\vec{u}$ és proporcional a $\vec{w}$ (vegeu proposició 10), aleshores les rectes poden ser coincidents o paral · leles.*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ és proporcional a $\vec{u}$ (i per tant a $\vec{w}$), llavors $r$ i $s$ són coincidents*
  - *Si $\overrightarrow{AB}$ no és proporcional a $\vec{u}$ (i per tant tampoc a $\vec{w}$), llavors $r$ i $s$ són paral · leles*
- *Sinó, llavors les rectes són secants o bé es creuen.*

– *Si* $\overrightarrow{AB}$ *és propocional a* $\vec{u}$*, llavors* $r$ *i* $s$ *són secants*

– *Sinó, si* $\overrightarrow{AB}$ *és proporcional a* $\vec{w}$*, llavors* $r$ *i* $s$ *són secants*

– *Si* $\overrightarrow{AB}$ *no és proporcional ni a* $\vec{u}$ *ni a* $\vec{w}$*, llavors* $r$ *i* $s$ *es creuen*

**Proposició 26** (posició relativa de dues rectes usant matrius)**.** *Donades dues rectes* $r$ *i* $s$ *amb vectors directors* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *i* $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *i que passen pels punts* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *i* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *respectivament, tenim que la seva posició relativa ve donada pels rangs següents:*

- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1$ *i* $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1$, *r i s són coincidents*

- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1$ *i* $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$, *r i s són paral·leles*

- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$ *i* $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$, *r i s es tallen*

- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$ *i* $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 3$, *r i s es creuen*

Exercici 197. Determineu la posició relativa d'aquestes rectes:

*a*) $r\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$

*b*) $r\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ i $s\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{5}$

*c*) $r\colon x = y - 1 = \frac{z+2}{3}$ i $s\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{6}$

*d*) $r\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x - 2y + z = 10 \end{cases}$

*e*) $r\colon \begin{cases} -y - z = 3 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$ i $s\colon \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases}$

### 6.5.2 Posició relativa d'una recta i un pla

Per a determinar la posició relativa entre un pla i una recta tenim dues opcions: estudiar la posició a partir de les equacions implícita de pla i recta o bé estudiar-la a partir de les posicions relatives entre el vector normal del pla i el vector director de la recta. Els dos estudis es resumeixen a les proposicions següents.

**Proposició 27** (posició relativa entre pla i recta (versió eq. implítica))**.** *Siguin* $\pi \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *i* $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{array} \right.$ *un pla i una recta de l'espai qualssevol. Podem construir les matrius de* $A$ *i* $M$*:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

*Aleshores:*

- *Si* $rgA = 3$ *i* $rgM = 3$*, llavors el sistema és compatible determinat. Per tant, la recta talla al pla*
- *Si* $rgA = 2$ *i* $rgM = 2$*, llavors el sistema és compatible indeterminat. Per tant, la recta està continguda en el pla*
- *Si* $rgA = 2$ *i* $rgM = 3$*, llavors el sistema és incompatible. Per tant, la recta i el pla són paral · lels*

**Proposició 28** (posició relativa entre pla i recta (versió vector normal))**.** *Siguin* $\pi$ *un pla i* $r$ *una recta del pla. I sigui* $\vec{v}$ *el vector director de* $r$ *i* $A$ *un punt de la recta. Aleshores:*

- *Si* $\vec{v}$ *és perpendicular al vector normal del pla* $\vec{n}$ *i* $A \in \pi$*, llavors* $r$ *està continguda a* $\pi$
- *Si* $\vec{v}$ *és perpendicular al vector normal del pla* $\vec{n}$ *però* $A \notin \pi$*, llavors* $r$ *és paral · lela a* $\pi$
- *Si* $\vec{v}$ *no és perpendicular a* $\vec{n}$*, llavors la recta i el pla es tallen*

Exemple 110. Determineu la posició relativa de $r\colon \left\{ \begin{array}{l} 2x+y+2=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array} \right.$ i $\pi\colon x+y-z+3=0$.

- Primer trobam les matrius de coeficients i ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculem el rang de cada matriu. Després d'alguns càlculs tenim que $rgA = 3$ i $rgM = 3$. Per tant, el sistema és compatible determinat i, per tant, el pla i la recta són secants.

Exemple 111. Siguin $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{6}$ i $\pi\colon 2x - 4y + 5z = 0$. Determineu la seva posició relativa.

- Tenim que el vector director de $r$, $\vec{v}(3, 9, 6)$, i el vector normal del pla, $\vec{n}(2, -4, 5)$, són perpendiculars: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Per tant, la regla pot ser continguda al pla o bé paral · lela.

- Per discriminar, vegem si el pla conté o no un punt de la recta: sabem que $A(1, 2, 0) \in r$. Però si substituïm a les equacions de $\pi$, tenim que: $2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = -6 \neq 0$. Per tant, $r$ és paral · lela a $\pi$.

Exercici 198. Determineu les posicions relatives entre aquests plans i aquestes rectes:

*a)* $r\colon \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ i $\pi \equiv 4x - 3y + 7z - 7 = 0$

*b)* $r\colon \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ -x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ i $\pi \equiv x + z + 1 = 0$

*c)* $r\colon x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$ i $\pi \equiv 2x - 5y + 3z + 3 = 0$

*d)* $r\colon \begin{cases} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ -x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ i $\pi \equiv x + 4y - 3z + 3 = 0$

Exercici 199. Trobeu el valor de $\alpha$ per a què la recta $r \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{\alpha} = \frac{z}{12}$ no talli al pla $\pi\colon 2x - 4y + 5z = 0$.

Exercici 200. Donats el pla $\pi\colon x + y + mz = 1$ i la recta $r\colon \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$, discutiu quina és la posició relativa de $r$ i $\pi$ segons els valors de $m$.

### 6.5.3 Posició relativa entre dos plans

Finalment estudiarem la posició relativa entre dos plans. Suposarem que els plans sempre vénen donats mitjançant les seves equacions generals.

**Proposició 29** (posició relativa entre dos plans (versió rangs de matrius)). *Siguin $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ dos plans qualssevol. Considerem les matrius de coeficients i ampliada, $A$ i $M$ respectivament:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

*Llavors:*

- *Si* $rgA = 2$*, llavors* $rgM = 2$ *i, per tant, el sistema és compatible simplement indeterminat (2 equacions i 3 incògnites). Això significa que els plans es tallen*
- *Si* $rgA = 1$*:*
  - *Si* $rgM = 2$*, llavors el sistema és incompatible. Per tant, no tenen punts en comú. Llavors els plans són paral·lels*
  - *Si* $rgM = 1$*, llavors el sistema és compatible doblement indeterminat (1 equació i 3 incògnites). Això significa que els plans són coincidents.*

Disposem d'una proposició que estudia la posició relativa a partir de la proporcionalitat dels seus vectors normals.

**Proposició 30** (posició relativa entre dos plans (versió vectors normals))**.** *Siguin* $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *i* $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *dos plans qualssevol. Considerem* $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ *i* $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ *els seus vectors normals.*

- *Si* $\vec{n}_1$ *és proporcional a* $\vec{n}_2$*, llavors els plans són o bé coincidents o bé paral·lels.*

  *Com que aquests vectors són proporcionals, llavors* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ *és igual a un nombre. Diguem-li* $R$*.*
  - *Si* $\frac{D_1}{D_2} = R$*, llavors* $\pi_1$ *és coincident amb* $\pi_2$
  - *Sinó,* $\pi_1$ *és paral·lel a* $\pi_2$
- *En cas contrari, els plans es tallen*

Exercici 201. Determineu la posició relativa dels plans següents:

*a*) $\pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2$ i $\pi_2 = 2x + 3y - 5z = -8$

*b*) $\pi_1 = -x + 2y - z = 0$ i $\pi_2 = x - 2y + z = 0$

*c*) $\pi_1 = x - z = -11$ i $\pi_2 = -2y - z = -11$

*d*) $\pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2$ i $\pi_2 = \begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}$

## 6.6 Càlcul de la intersecció entre rectes i plans

En aquesta secció calcularem la intersecció entre rectes, plans i rectes i plans. No determinarem abans la seva posició relativa. Calcularem els punts (o rectes) d'intersecció *a pèl*.

### 6.6.1 Intersecció entre dos plans

Exemple 112. Trobeu l'equació de la recta determinada per la intersecció dels plans $\pi_1 \colon x - 2y + z + 3 = 0$ i $\pi_2 \colon 2x - y + z - 4 = 0$.

La recta que cercam (veure (Subsecció 6.3.3) és

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right. ,$$

que, com es veu, ve definida per la intersecció de dos plans (si volem es pot passar a la forma paramètrica (Subsubsecció 6.3.3.2).

Exercici 202. Trobeu la intersecció entre els plans següents:

*a)* $\pi_1 \colon x + 3y + z - 5 = 0$ i $\pi_2 \colon x - 2z - 2 = 0$

*b)* $\pi_1 \colon x + 2y + 3z - 5 = 0$ i $\pi_2 \colon x + 2y - 3z - 2 = 0$

*c)* $\pi_1 \colon 2x + y + 5z = 0$ i $\pi_2 \colon y - 2z - 10 = 0$

*d)* $\pi_1 \colon 2x + 4y + 8z - 10 = 0$ i $\pi_2 \colon 2x + 4y - 8z - 10 = 0$

### 6.6.2 Intersecció entre dues rectes

Exemple 113. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes $r \colon \ \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$ i $s \colon \ \{2x - 2y + 3z - 19 = 0, x - y + z - 4 = 0\}$.

Una de les maneres de trobar el punt d'intersecció entre ambdues rectes és resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{r} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 19 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right\} .$$

Com es veu, resoldre'l pels mètodes habituals pot ser bastant engorrós (només els utilitzarem quan el sistema presenti un aspecte senzill). Per aquest motiu, passarem una de les rectes a la seva forma paramètrica i substituirem les seves equacions a les equacions de l'altra recta.

- Passam en primer lloc la recta $r$ a la forma paramètrica:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{array} \right.$$

- Substituïm ara aquestes expressions a les equacions de $s$, i ens queda el sistema

$$\left. \begin{array}{r} 2(-\lambda) - 2(7 + \lambda) + 3(11 + 3\lambda) - 19 = 0 \\ -\lambda - (7 + \lambda) + (11 + 3\lambda) - 4 = 0 \end{array} \right\} ,$$

la solució del qual és, per a cadascuna de les dues equacions, $\lambda = 0$. Notem la importància de què la solució sigui la mateixa a les dues equacions. En cas contrari, el sistema seria incompatible i, per tant, no tendria solució.

- Substituïm ara aquest valor de $\lambda$ a les equacions de la recta $r$ i en queda

$$r : \begin{cases} x = -0 \\ y = 7 + 0 \\ z = 11 + 3\cdot 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \\ z = 11 \end{cases}$$

El punt d'intersecció és, aleshores, $A(0, 7, 11)$.

Exemple 114. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes $r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$ i $s\colon \{2x - 2y + 3z = 0, x - y + z - 4 = 0\}$.

- Passam la recta $r$ a la forma paramètrica:

$$r : \{x = -\lambda, y = 7 + \lambda, z = 11 + 3\lambda\}$$

- Substituïm aquestes expressions a les equacions de $s$, i ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2(-\lambda) - 2(7 + \lambda) + 3(11 + 3\lambda) = 0 \\ -\lambda - (7 + \lambda) + (11 + 3\lambda) - 4 = 0 \end{array}\right\},$$

la solució del qual és, per a la primera de les equacions, $\lambda = 19/5$, i $\lambda = 0$ per a la segona. Per tant, el sistema no té solució, del que deduïm que les dues rectes no tenen punts en comú: o bé es creuen o bé són paral · leles. Per saber quina de les dues possibilitats és la bona, mirarem si els seus vectors directors són paral · lels o no:

$$\overrightarrow{d_r} = (-1, 1, 3), \quad \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (1, 1, 0)$$

Aleshores:

$$\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{0} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \text{ i } \overrightarrow{d_s} \text{ no són paral · lels}$$

- Per tant, com les rectes no s'intersequen i no tenen la mateixa direcció. Llavors es creuen.

Exercici 203. Calculeu el punt d'intersecció entre aquestes rectes:

*a)* $r\colon \{x + 2y + 3z + 1 = 0, x - y + z = 0\}$ i $s\colon \{2x + y + 4z + 1 = 0, x - y + z + 3 = 0\}$

*b)* $r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$ i $s\colon \{3x - 3y + 2z - 1 = 0, x + y - 7 = 0\}$

*c)* $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ i $s\colon \{2x - 6y + z - 1 = 0, x - z + 3 = 0\}$

### 6.6.3 Punt d'intersecció entre una recta i un pla

Exemple 115. Calculeu el punt d'intersecció entre la recta

$$r\colon \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$$

i el pla $\pi : 3x - y + 2z - 1 = 0$.

- El punt d'intersecció que cercam és la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

  Una altra manera de trobar-lo és resoldre el sistema passant la recta a la forma paramètrica en primer lloc; queda, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

- Substituint:

$$3(-\lambda) - (7 + \lambda) + 2(11 + 3\lambda) - 1 = 0; \quad 2\lambda + 14 = 0; \quad \lambda = -7$$

  Llavors el punt d'intersecció és

$$\left.\begin{array}{l} x = -(-7) = 7 \\ y = 7 + (-7) = 0 \\ z = 11 + 3(-7) = -10 \end{array}\right\} = (7, 0, -10)$$

Exercici 204. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes i plans següents:

*a*) $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+2}{5}$ i $\pi\colon 3x - y + 2z - 1 = 0$

*b*) $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$ i $\pi\colon x - y + 2z - 1 = 0$

*c*) $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$ i $\pi\colon x + 2y + 3z + 3 = 0$

## 6.7 Exercicis proposats

### 6.7.1 Vectors

Exercici 205. Quins dels vectors següents tenen la mateixa direcció?

$$\vec{a}\,(1, -3, 2)\,, \quad \vec{b}\,(2, 0, 1)\,, \quad \vec{c}\,(-2, 6, -4)\,, \quad \vec{d}\,(5, -15, 10)\,, \quad \vec{e}\,(10, -30, 5)$$

Exercici 206. Donats els vectors $\vec{a}\,(1,-3,2)$ i $\vec{b}\,(2,0,1)$, calculeu:

*a*) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

*b*) $|\vec{a}|$ i $\left|\vec{b}\right|$

*c*) l'angle que formen entre si $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

Exercici 207. Donats $\vec{a} = \vec{i} + m\overrightarrow{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + m\overrightarrow{k}$, calculeu $m$ per a què els vectors siguin:

*a*) paral · lels,

*b*) ortogonals.

Exercici 208. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\vec{a}\,(1,2,3)$ i $\vec{b}\,(2,-2,1)$.

Exercici 209. Calculeu $m$ per a què el vector $\vec{a}\,(1,3,m)$ sigui ortogonal al vector $\vec{b}\,(1,-2,3)$.

Exercici 210. Calculeu l'àrea del paral · lelogram que formen els vectors $\vec{a}\,(1,-3,2)$ i $\vec{b}\,(2,0,1)$.

Exercici 211. Trobeu un vector perpendicular a $\vec{u}\,(2,3,1)$ i a $\vec{v}\,(-1,3,0)$ i que sigui unitari.

Exercici 212. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(1,-1,0)$ i $\vec{v}(2,0,1)$ i el mòdul del qual sigui $\sqrt{24}$.

Exercici 213. Calculeu $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$, amb $\vec{u}\,(1,-1,0)$, $\vec{v}\,(2,0,1)$ i $\vec{w}\,(2,0,-2)$.

Exercici 214. Calculeu el volum del paral · lelepípede determinat pels vectors $\vec{u}\,(1,-1,0)$ , $\vec{v}\,(2,0,1)$ i $\vec{w}\,(2,0,-2)$.

Exercici 215. Calculeu el valor de $m$ perquè $\vec{u}\,(2,-3,1)$, $\vec{v}\,(1,m,3)$ i $\vec{w}\,(-4,5,-1)$ siguin coplanaris.

Exercici 216. Donat el vector $\vec{v}\,(-2,2,-4)$, trobeu les coordenades dels vectors següents:

*a*) unitari i de la mateixa direcció que $\vec{v}$

*b*) paral · lel a $\vec{v}$ i de mòdul 6.

Exercici 217. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}\,(2,3,-1)$ i a $\vec{v}\,(1,4,2)$ la tercera component del qual sigui 1.

Exercici 218. Calculeu les coordenades d'un vector $\vec{u}$ que sigui ortogonal a $\vec{v}\,(1,2,3)$ i $\vec{w}\,(1,-1,1)$ i tal que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = 19$.

### 6.7.2 Punts

Exercici 219. Comproveu si els punts $A\,(1,-2,1)$, $B\,(2,3,0)$ i $C\,(-1,0,-4)$ estan alineats o no.

Exercici 220. Trobeu el punt simètric del punt $A\,(-2,3,0)$ respecte del punt $M\,(1,-1,2)$.

Exercici 221. Calculeu $a$ i $b$ per a què els punts $A\,(1,2,-1)$, $B\,(3,0,-2)$ i $C\,(4,a,b)$ estiguin alineats.

### 6.7.3 Rectes i plans

Exercici 222. Associeu els conceptes de punt, vector, recta i pla al pla o a l'espai amb qualcuna o qualcunes de les expresions següents:

*a*) $\overrightarrow{A}\,(2,-3,1)$

*b*) $\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=3 \end{array}\right.$

*c*) $\left\{\begin{array}{c} x=-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{array}\right.$

*d*) $A\,(2,-3,1)$

*e*) $x+y=2$

*f*) $\left\{\begin{array}{c} x=-2\lambda+\mu \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{array}\right.$

*g*) $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right.$

*h*) $\frac{x-1}{0}=y+3=\frac{z}{-6}$

Exercici 223. Escriviu les equacions de la recta $r$ que passa pels punts $A\,(-3,2,1)$ i $B\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

Exercici 224. Trobeu les equacions de la recta que passa pel punt $A\,(-4,2,5)$ i és paral · lela a l'eix $OZ$.

Exercici 225. Comproveu si els punts $A\,(1,-2,1)$, $B\,(2,3,0)$, $C\,(-1,0,-4)$ i $D\,(4,0,-5)$ es troben en un mateix pla o no.

Exercici 226. Trobeu les equacions paramètrica i contínua la recta

$$\left.\begin{array}{rcl} -x++3y-z+10 & = & 0 \\ 2x+y-z-6 & = & 0 \end{array}\right\}$$

### 6.7.4 Posició relativa de rectes

Exercici 227. Estudieu la posició relativa de les rectes següents, i trobeu el seu punt de tall quan sigui possible:

*a*) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$ i $s : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$

*b*) $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ i $s : \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$

*c*) $r : \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{3}$ i $s : \{x - 2y - 1 = 0, 3y - z + 1 = 0\}$

*d*) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ i $s : \{x = 3 + 4\lambda, y = 3 + 6\lambda, z = 4 + 8\lambda\}$

Exercici 228. Calculeu el valor de $a$ per a què les rectes $r$ i $s$ es tallin, i trobeu el seu punt de tall:

$$\begin{array}{rcl} r & : & x = y = z - a \\ s & : & \dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{0} \end{array}$$

Exercici 229. Calculeu els valors de $m$ i $n$ per a què les rectes $r$ i $s$ siguin paral · leles:

$$r : \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} , \quad s : \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

### 6.7.5 Plans

Exercici 230. Calculeu les equacions dels plans següents:

*a*) passa pel punt $P\,(2, -3, 1)$ i el vector normal del qual és $\vec{n}\,(5, -3, -4)$

*b*) perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ i que passa pel punt $(1, 0, 1)$

Exercici 231. Trobeu l'equació implícita dels plans següents:

- Pla que passa pels punts $P_1 = (1, 0, -1)$, $P_2 = (1, 3, 0)$ i $P_3 = (2, -1, 3)$
- Pla que passa pel punt $Q = (3, 0, 1)$ i és paral · lel al pla $3x - 2y + 5z + 1 = 0$

Exercici 232. Calculeu $m$ i $n$ per a què els plans $\alpha\colon mx + y - 3z - 1 = 0$ i $\beta\colon 2x + ny - z - 3 = 0$ siguin paral · lels. Poden ser coincidents?

Exercici 233. Determineu l'equació del pla que conté el punt $P\,(2, 1, 2)$ i la recta $x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$.

Exercici 234. Comproveu que les rectes $r : \frac{x-1}{2} = y = z - 2$ i

$$s : \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

són paral · leles, i troba l'equació del pla que les conté.

Exercici 235. Determineu el valor de $a$ per a què les rectes $r$ i $s$ siguin coplanàries:

$$r : x = y - a = \frac{z}{0},\ s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Trobeu l'equació del pla que les conté.

Exercici 236. Estudieu la posició relativa de la recta $r : \frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z}{-1}$ i el pla $\pi : x - y + z - 3 = 0$.

Exercici 237. Trobeu l'equació del pla que passa pels punts $A\,(1, 3, 2)$ i $B\,(-2, 5, 0)$ i és paral · lel a la recta

$$r : \{x = 3 - \lambda,\ y = 2 + \lambda,\ z = -2 - 3\lambda\}$$

Exercici 238. Trobeu l'equació del pla que conté la recta

$$r : \{x = 2 + 3\lambda,\ y = -1 - \lambda,\ z = \lambda\}$$

i és paral · lel a $s : \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$.

Exercici 239. Calculeu el valor de $m$ per a què els punts $A\,(m, 0, 1)$, $B\,(0, 1, 2)$, $C\,(1, 2, 3)$ i $D\,(7, 2, 1)$ estiguin en un mateix pla. Quina és l'equació d'aquest pla?

Exercici 240. Donat el pla $\pi\colon 2x - 3y + z = 0$ i la recta $r\colon x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, trobeu l'equació del pla que conté la recta $r$ i és perpendicular al pla $\pi$.

Exercici 241. Escriviu l'equació del pla que passa pels punts $A\,(1, -3, 2)$ i $B\,(0, 1, 1)$ i és paral · lel a la recta

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Exercici 242. Estudieu la posició relativa de la recta $r : \{x = 3, y = 2\}$ i el pla $z = 1$.

Exercici 243. Estudieu les posicions relatives del pla $\pi\colon x + ay - z = 1$ i la recta

$$r : \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

segons els valors de $a$.

Exercici 244. Trobeu la recta que passa pel punt $A = (1, 1, -1)$, és paral · lela al pla $\pi \equiv x - y + z = 5$ i talla a l'eix de coordenades $OZ$.

Exercici 245. Estudieu la posició relativa dels plans $\pi \equiv x + 3y - 2z = 7$, $\pi' \equiv x + 2t - az = 5$ i $\pi'' \equiv ax + z = b$, segons els valors d'$a$ i de $b$. Quan es tallen en una recta? Quina d'elles és la que passa pel punt $(-1, 4, 2)$?

Exercici 246. Donats el punt $P = (2, 1, 2)$ i la recta resultant de la intersecció dels plans $4x - y = 12$ i $z - x = 2$, trobeu l'àrea del triangle determinat pel punt $P$, el punt de la recta més proper a $P$ i el punt $Q = (1, 0, -1)$.

Exercici 247. Donada la recta de l'equació $\frac{x}{2} = 1 - y = \frac{2z+2}{6}$ i el pla $\pi$ d'equació $x + 3y - 3z = -3$, trobeu:

*a*) El pla que conté a $r$ i és perpendicular a $\pi$

*b*) El volum del tetraedre determinat per $\pi$ i els plans coordenats

Exercici 248. Sigui un pla qualsevol $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$. Proveu que el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ és un vector perpendicular al pla $\pi$.

Exercici 249. Sigui $\pi$ el pla d'equació $3x + 2y - z = 1$ i $r$ la recta d'equacions $\begin{cases} 3x + 2y & = 0 \\ y - z & = 1 \end{cases}$. Estudieu si els punts $P = (1, 0, 0)$, $Q = (2, -3, -4)$, $R = (0, 1, 1)$ i $S = (0, 0, -1)$ pertanyen al pla $\pi$ o a la recta $r$.

Exercici 250. Trobeu les posicions relatives entre aquests plans. En cas de que es tallin, trobeu l'equació contínua de la recta:

*a*) $\pi_1\colon 3x + 3y + z - 1 = 0$ i $\pi_2\colon x - -5y + 5z = 0$

*b*) $\pi_1\colon x + 2y + z = 0$ i $\pi_2\colon x + 2yz - 2 = 0$

*c*) $\pi_1\colon 2x + 4y + z = 0$ i $\pi_2\colon 10x + 20y + 5z + 2 = 0$

*d*) $\pi_1\colon 2x + 8z - 10 = 0$ i $\pi_2\colon 2x + 8y - 10 = 0$

### 6.7.6 Altres

Exercici 251. Estudieu la posició relativa de les rectes

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \quad \text{i } s : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

i trobeu l'angle que formen entre si.

Exercici 252. Trobeu, en cada cas, l'angle que formen la recta i el pla:

*a*) $r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}$, $\pi\colon x - 2y - z + 1 = 0$

*b*) $r : \{x = \lambda, y = 1 + 2\lambda, z = -2\}$, $\pi\colon 2x - y + z = 0$

*c*) $r : \frac{x-1}{2} = y - 3 = z$ $\pi\colon x + z = 17$

Exercici 253. Calculeu l'angle que formen els plans $\alpha\colon z = 3$ i $\beta\colon x - y + 2z + 4 = 0$.

## 6.8 Exercicis resolts de geometria de l'espai

Exemple 116. Trobeu un punt qualsevol de la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

i calculeu el seu vector director.

*Solució.* Qualsevol punt de la recta ha de complir les equacions que la defineixen. Per a trobar-ne un, donem un valor qualsevol a les variables. Per exemple $y = 0$ i substituiguem aquest valor en les equacions de la recta:

$$\left. \begin{array}{r} x - 2{\cdot}0 + z + 3 = 0 \\ 2x - 0 + z - 4 = 0 \end{array} \right\} ; \qquad \left. \begin{array}{r} x + z + 3 = 0 \\ 2x + z - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

Les solucions d'aquest sistema són $x = 7$, $z = -10$, per la qual cosa el punt que cercam és

$$(7, 0, -10)$$

El vector director de la recta és

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d} &= \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (1, -2, 1) \wedge (2, -1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1, 1, 3) \end{aligned}$$

■

Exemple 117. Trobeu un punt qualsevol del pla $\pi\colon -x + 5y + 2z - 1 = 0$ i un vector perpendicular a ell.

*Solució.* Un punt qualsevol del pla ha de satisfer la seva equació. Per tant, donem valors qualssevol a les variables, per exemple $y = 0$ i $z = 0$, i substituiguem aquests valors a l'equació del pla:

$$-x + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0; -x - 1 = 0; x = -1$$

Per tant, un punt del pla és

$$(-1, 0, 0)$$

Un vector perpendicular al pla és el seu vector normal: $\overrightarrow{n} = (-1, 5, 2)$. ■

Exemple 118. Passeu a forma paramètrica la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

*Solució.* Per poder escriure una recta en forma paramètrica necessitem un vector director d'ella i un punt qualsevol del seus punts.

Calculem el vector director de la recta:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d} &= \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = (1,-2,1) \wedge (2,-1,1) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1,1,3)\end{aligned}$$

Cerquem ara un punt de la recta. Aquest punt ha de complir les equacions $x - 2y + z + 3 = 0$ i $2x - y + z - 4 = 0$. Facem, per exemple, $x = 0$. Aleshores, substituint aquest valor a les dues equacions anteriors queda el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} -2y + z &= -3 \\ -y + z &= 4 \end{aligned}\right\},$$

la solució del qual és $y = 7, z = 11$. Així, un punt de la recta és $A(0,7,11)$.

L'equació en forma paramètrica és, aleshores

$$r : \left\{ \begin{aligned} x &= 0 + (-1)\lambda \\ y &= 7 + 1\lambda \\ z &= 11 + 3\lambda \end{aligned} \right. = \left\{ \begin{aligned} x &= -\lambda \\ y &= 7 + \lambda \\ z &= 11 + 3\lambda \end{aligned} \right.$$

■

## 6.9 Recull de fórmules de geometria de l'espai

1. La suma de dos vectors $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ i $\overrightarrow{w}(a',b',c')$:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = (a,b,c) + (a',b',c') = \big(a + a', b + b', c + c'\big)$$

2. La diferència de dos vectors, $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ i $\overrightarrow{w}(a',b',c')$:

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = (a,b,c) - (a',b',c') = \big(a - a', b - b', c - c'\big)$$

3. El producte d'un nombre $k$ per un vector $\overrightarrow{u}(a,b,c)$:

$$k \cdot \overrightarrow{u} = k \cdot (a,b,c) = (ka, kb, kc)$$

4. Els components del vector d'origen en el punt $P(x_1,y_1,z_1)$ i extrem en el punt $Q(x_2,y_2,z_2)$:

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

5. El mòdul del vector $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ :

$$|\overrightarrow{u}| = |(a, b, c)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

6. El producte escalar de dos vectors, $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ i $\overrightarrow{w}(a', b', c')$, en una base ortonormal:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = (a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + bb' + cc'$$

D'altra banda, es cumpleix que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \cos \alpha$$

on $\alpha$ és l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{w}$.

7. El producte vectorial de dos vectors, $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ i $\overrightarrow{w}(a', b', c')$, en una base ortonormal:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} &= (a, b, c) \wedge (a', b', c') \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

A més,

$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot \sin \alpha$$

on $\alpha$ és l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{w}$.

8. El producte mixt de tres vectors:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$$

També es pot calcular amb la fórmula

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

9. El valor absolut de $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ dóna el volum del paral · lelepípede definit pel vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, i $\overrightarrow{w}$, és a dir:

$$V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$$

10. El volum del tetraedre format pel vectors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ és igual a
$$V = \frac{1}{6} \, |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$$

11. El punt mitjà del segment definit pels punts $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$:
$$P_M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

12. L'equació paramètrica d'una recta:
$$r\colon \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda d_x \\ y = y_1 + \lambda d_y \\ z = z_1 + \lambda d_z \end{array} \right. ,$$
on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt de la recta i $\overrightarrow{d_r}(d_x, d_y, d_z)$ és el vector director de la recta.

13. L'equació en forma contínua d'una recta:
$$r\colon \frac{x - x_1}{d_x} = \frac{y - y_1}{d_y} = \frac{z - z_1}{d_z},$$
on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt de la recta i $\overrightarrow{d_r}(d_x, d_y, d_z)$ és el vector director de la recta.

14. L'equació paramètrica d'un pla:
$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_1 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_1 + \lambda u_z + \mu v_z \end{array} \right. ,$$
on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt del pla i $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ i $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ són vectors paral · lels al pla i que no són paral · lels entre si.

15. L'equació implícita d'un pla es pot trobar amb
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & u_x & v_x \\ y - y_1 & u_y & v_y \\ z - z_1 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0,$$
on $P(x_1, y_1, z_1)$ és qualsevol punt del pla i $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ són vectors paral · lels al pla i que no són paral · lels entre si.

16. L'equació implícita d'un pla és de la forma
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
on $\vec{n}(A, B, C)$ és un vector perpendicular al propi pla, que s'anomena vector normal del pla.

17. El vector director d'una recta expressada com la intersecció de dos plans, és a dir, expressada de la forma

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{array} \right.$$

és igual a

$$\overrightarrow{d_r} = (A, B, C) \wedge (A', B', C') =$$

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right)$$

18. Un vector perpendicular al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ és el vector

$$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$$

19. L'angle entre dues rectes, $r$ i $s$:

$$\alpha = \arccos \frac{\left| \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right| \cdot \left| \overrightarrow{d_s} \right|},$$

on $\overrightarrow{d_r}$ i $\overrightarrow{d_s}$ són els vectors directors de cadascuna de les rectes.

20. L'angle entre dos plans, $\pi_1$ i $\pi_2$:

$$\alpha = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{n_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{n_{\pi_1}}| \cdot |\overrightarrow{n_{\pi_2}}|},$$

on $\overrightarrow{n_{\pi_1}}$ i $\overrightarrow{n_{\pi_2}}$ són els vectors normals a cadascun dels plans.

21. L'angle entre una recta i un pla:

$$\alpha = \arcsin \frac{\left| \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} \right|}{\left| \overrightarrow{d_r} \right| \cdot |\overrightarrow{n_\pi}|},$$

on $\overrightarrow{d_r}$ és el vector director de la recta i $\overrightarrow{n_\pi}$ és el vector normal al pla.

22. Per calcular els productes escalars o l'angle que formen plans i rectes, convé tenir present la taula següent (Taula 6.1).

| | 0 rad | $\pi/6$ rad | $\pi/4$ rad | $\pi/3$ rad | $\pi/2$ rad | $\pi$ rad | $3\pi/2$ rad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $180°$ | $270°$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 | $-1$ |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | $-1$ | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\nexists$ | 0 | $\nexists$ |

Taula 6.1: Valors dels sinus, cosinus i tangent pels angles més usuals

# Part IV

# Apèndixs

# A

# Recordatori de matemàtica elemental

Aquí es fa un recordatori de qualcuns continguts de matemàtiques elementals.

## A.1 Operacions amb nombres

### A.1.1 Sumes i restes

Si en una expressió només hi apareixen sumes i restes de nombres sencers, el valor final d'aquesta expressió es calcula de la manera següent:

1. es sumen per separat el nombres positius i els nombres negatius
2. es resten els resultats de l'apartat anterior i es posa el signe del que tengui major valor absolut.

Exemple 119.

$$-2 + 8 - 15 - 3 + 7 = 15 - 20 = -5$$

### A.1.2 Producte i quocient de dos nombres

Per multiplicar o dividir *dos* nombres es segueix la regla següent: si els dos nombres tenen el mateix signe, el resultat del producte o de la divisió és positiu, i si els dos nombres tenen signes diferents, el resultat és negatiu.

Exemple 120.

$$-2 \cdot (-3) = 6$$

$$20 : (-4) = -5$$

### A.1.3 Jerarquia d'operacions

Per a calcular expressions aritmètiques que tenen diverses operacions, s'aplica un ordre en la que certes operacions es calculen abans que unes altres. S'anomena *jerarquia d'operacions* a l'ordre en el que s'efectuen les operacions. Aquesta és:

1. Parèntesis
2. Potències
3. Productes i divisions
4. Sumes i rectes

Exemple 121. Calculeu

$$3 + 4 \cdot 5$$

Per a calcular aquesta expressió, hem de calcular en primer lloc el producte, encara que l'operació no sigui la primera en aparèixer. En posterioritat, calcularíem la suma. Per tant,

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cdot 5 &= 3 + 20 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Exemple 122. Calculeu

$$(3+4) \cdot 5 + \frac{1}{2} - \left(3^2 - 5 \cdot 2\right)^2 + 2^2$$

En primer lloc, calcularem els parèntesis. S'ha de dir que com que el resultat d'un no influeix al resultat de l'altre, llavors es poden calcular de forma simultània. En general, podem fer això sempre que les subexpressions siguin sumands d'una expressió més general (tècnicament es diuen *termes*). Així, calcularíem l'expressió numèrica de la forma:

$$\begin{aligned}(3+4)\cdot 5+\frac{1}{2}-\left(3^2-5\cdot 2\right)^2+2^2 &= 7\cdot 5+\frac{1}{2}-(9-10)+4\\ &= 35+\frac{1}{2}-(-1)+4\\ &= 35+\frac{1}{2}+1+4\\ &= 40+\frac{1}{2}\\ &= \frac{81}{2}\end{aligned}$$

### A.1.4 Càlcul del mínim comú múltiple

Definició 60 (múltiple d'un nombre). Donat dos nombres $a$, $b$, direm que $b$ és un *múltiple* de $a$ si, i només si, existeix un altre nombre $r$ tal que $a\cdot r=b$ o dit d'altra manera si quan dividim $b$ entre $a$ el reste és 0.

Exemple 123. 60 és múltiple de 2 perquè $2\cdot 30=60$. També és múltiple de 3, 5, 10, 20, 30 i 60. Però 60 no és múltiple de 40 perquè 60 entre 40 no dóna reste 0.

Es pot fer una llista de *tots* els múltiples d'un nombre multiplicant aquest nombre consecutivament per 1, 2, etc. Per exemple, els múltiples de 60 són: $60\cdot 1=60$, $60\cdot 2=120$, $60\cdot 3=180$, etc.

Definició 61 (mínim comú múltiple). Donats els nombres $a_1, a_2, \ldots, a_r$ el seu *mínim comú múltiple* és el menor de tots els seus múltiples comuns. El mínim comú múltiple s'abreuja mcm.

Exemple 124. Els nombres 10 i 12 tenen com a mínim comú múltiple. La raó és que:

- Els múltiples de 10 són: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120, ...
- Els múltiples de 12 són: 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, ...

Per tant, els múltiples comuns són 60, 120, etc. Llavors 60 és el menor d'aquests múltiples i, per tant, és el mcm.

Existeixen diversos procediments per a calcular el mínim comú múltiple de diversos nombres:

**Algorisme 6** (càlcul del mcm amb la llista de múltiples). *Pel càlcul del mcm dels nombres $a_1$, $a_2$, ..., $a_r$ es procedeix de la manera següent:*

1. *Es llisten els múltiples de cada nombre*
2. *Es selecciona el múltiple més petit*

L'exemple anterior (exemple 124) exemplifica aquest procediment.

S'ha de dir que aquest procediment és molt lent, sobretot per nombres grans.

**Algorisme 7** (càlcul del mcm amb la factorització de nombres). *Pel càlcul del mcm dels nombres $a_1$, $a_2$, ..., $a_r$ es procedeix de la manera següent:*

1. *Es factoritzen els nombres en factors primers*[1]

2. *El mínim comú múltiple s'obté prenent tots els factors elevats al màxim exponent*

Aquest és el procediment *estàndard* per al càlcul del mínim comú múltiple.

Exemple 125. Calculeu el mcm de 20, 12 i 100:

1. Factoritzem els nombres

2. Per tant, $20 = 2^2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$ i $100 = 2^2 \cdot 5^2$

3. Llavors el mcm és igual a $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

**Algorisme 8** (càlcul del mcm de forma ràpida per nombres petits). *Aquest algorisme és ràpid sobretot per nombres petits. Si $a$, $b$, $c$ i $d$ són els nombres dels quals volem trobar el mínim comú múltiple, aleshores:*

1. *Es selecciona el nombre més gran. Suposem que és $a$*

2. *Es generen els seus múltiples*

3. *Per a cada múltiple es comprova si aquest és múltiple dels altres nombres, és a dir, si la seva divisió dóna exacte*

4. *Si és així, llavors aquest és el mínim comú múltiple. En cas contrari, es genera el múltiple següent de $a$.*

El més usual és que necessitem el mínim comú múltiple per resoldre equacions de primer grau que tenguin fraccions. En aquest cas però no és necessari calcular el mínim comú múltiple. Bastaria calcular un múltiple (vegi's Secció A.2).

Exercici 254. Calculeu el mínim comú múltiple per als conjunts de nombres següents:

*a*) 20 i 8

*b*) 12 i 42

*c*) 8 i 12

*d*) 12 i 21

*e*) 30 i 65

*f*) 10 i 12

*g*) 20 i 36

*h*) 15, 20 i 30

*i*) 6, 8 i 12

[1] La llista de primers és infinita, però els sis primers primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

*j*) 30, 45 i 60

*k*) 12, 18, 20 i 32

*l*) 17, 68 i 34

*m*) 10, 105 i 22

*n*) 25, 75 i 200

*Solució.* *a*) 40, *b*) 84, *c*) 24, *d*) 84, *e*) 390, *f*) 60, *g*) 180, *h*) 60, *i*) 24, *j*) 180, *k*) 1440, *l*) 68, *m*) 2310, *n*) 600 ■

## A.2 Equacions de primer grau

Per resoldre una *equació de primer grau* es segueixen les passes de l'exemple següent:

Exemple 126. Resol l'equació

$$5x - \frac{3x+1}{8} = x + \frac{5x-3}{4} - \frac{3}{2}$$

Resolució:

1. Primer:
$$\frac{5x}{1} - \frac{3x+1}{8} = \frac{x}{1} + \frac{5x-3}{4} - \frac{3}{2}$$

2. Segon (càlcul del mcm): $mcm\,(8,4,2) = 8$

3. Tercer (reducció a comú denominador):
$$\frac{40x}{8} - \frac{3x+1}{8} = \frac{8x}{8} + \frac{2\cdot(5x-3)}{8} - \frac{12}{8}$$

4. Quart (eliminem els denominadors):
$$40x - (3x+1) = 8x + 2\cdot(5x-3) - 12$$

5. Cinquè (eliminem els parèntesis):
$$40x - 3x - 1 = 8x + 10x - 6 - 12$$

6. Sisè (transposició de termes):
$$40x - 3x - 8x - 10x = -6 - 12 + 1$$

7. Setè (operar):
$$19x = -17$$

8. Vuitè (aïllar l'incògnita):
$$x = \frac{-17}{19}$$

Nota 1. Normalment es passa del segon al cinquè pas quan es té suficient soltura.

Nota 2. D'altra banda, es pot no calcular el mínim comú múltiple dels denominadors i només calcular-ne *un* múltiple. Per exemple es podria calcular el múltiple sorgit de la multiplicació dels denominadors, o sigui, $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$. I realitzar tots els càlculs amb 64 en comptes de 8. L'equació resultant tendria les mateixes solucions, encara que els nombres sorgits (dels passos tercer al vuitè) serien majors.

Exercici 255. Resoleu les equacions següents:

*a*) $x + 1 = 5$

*b*) $x - 10 = 50$

*c*) $3x - 10 = 30$

*d*) $5x - 2 = 13$

*e*) $\frac{x}{2} = 8$

*f*) $\frac{x}{2} + 1 = 8$

*g*) $\frac{x}{3} - 4 = 8$

*h*) $2x + 1 = 7 - x$

*i*) $3x + 10 = 22 + x$

*j*) $4x + 2 = 10 + 2x$

*k*) $5x - 2 = 13 + 3x$

*l*) $2x + 1 = 5$

*m*) $2x + 10 = 2(7 - x)$

*Solució.* *a*) 5, *b*) 60, *c*) $\frac{4}{3}$, *d*) 3, *e*) 16, *f*) 14, *g*) 36, *h*) 2, *i*) 6, *j*) 4, *k*) $\frac{15}{2}$, *l*) 2, *m*) 0 ■

Exercici 256. Resoleu les equacions següents:

*a*) $-(3x + 10) = 1 - (21 + x)$

*b*) $2(x + 2) = 24 - 2x$

*c*) $2(x - 2) = 3(1 - x) - 7$

*d*) $1 - (3x + 10) = 1 - (14 - x)$

*e*) $3 - 2(x - 2) = -5 - 3(1 - x)$

*Solució.* *a*) 5, *b*) 0, *c*) 1, *d*) 3 ■

Exercici 257. Resoleu les equacions següents:

*a*) $(x + 2) - (x + 3) = 2 - 3(1 - x)$

*b*) $2x + 1 + (2x - 3) = 2 + 3(1 - x)$

*c*) $x + 1 + (3 - x) = -3(1 - 2x) - 5$

*d*) $2(x + 2) - (x + 3) = 1 - 3x$

*e*) $-(2x + 1) + (2x - 3) = -2 - 3(1 - x)$

*f*) $3x - (x - 2) = -3(1 + x) + 20$

*Solució.* *a*) 0, *b*) 1, *c*) 2, *d*) 0, *e*) 1, *f*) 2 ■

## A.3 Extracció de factor comú

El factor comú d'una expressió pot ser un nombre, una lletra, o bé ambdues coses:

Exemple 127.

$$\begin{aligned}
-8+12-6+2 &= 2\cdot(-4+6-3+1)\\
-x^5+4x^3-x^2 &= x^2\cdot\left(-x^3+4x-1\right)\\
5x^6-10x^4-15x^3 &= 5x^3\cdot\left(x^3-2x-3\right)
\end{aligned}$$

## A.4 Equacions de segon grau

Les *equacions de segon grau* són aquelles que involucren una $x^2$. Formalment es formen igualant un polinomi de segon grau a zero (vegeu Secció A.5).

Les equacions de segon grau són de la forma

$$ax^2+bx+c=0,\ \text{amb } a\neq 0 \tag{A.1}$$

La solució d'aquestes equacions es calcula amb la fórmula següent:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{A.2}$$

Exemple 128. La solució de l'equació $x^2-5x+6=0$ és

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}\\
&= \frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3\\[2ex] \frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}
\end{aligned}$$

Les *equacions incompletes* de segon grau, és a dir, aquelles en les quals $b=0$ o $c=0$ (o tots dos valen zero) es poden resoldre d'una altra manera, encara que també es poden resoldre amb la fórmula de segon grau. Aquí en donem dos exemples (les equacions de segon grau que tenen tots els termes diferents de zero, s'anomenen *equacions completes*).

Exemple 129.

$$-3x^2+12=0;\ -3x^2=-12;\ x^2=\frac{-12}{-3}=4;\ x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Exemple 130.

$$2x^2-5x=0;\ x\,(2x-5)=0\ \begin{cases}x=0\\[2ex] 2x-5=0;\ x=\frac{5}{2}\end{cases}$$

En general, les equacions de segon grau poden no ser de la forma (A.1), encara que sempre es poden reduir a aquesta forma.

Exemple 131. Resoleu l'equació $-3x^2 - 2x + 15 = -15 + 2x + 2x^2 + x$.

Aquesta equació és equivalent a $-3x^2 - 2x + 15 + 15 - 2x - 2x^2 - x = 0$. Sumant els termes semblants, tenim que això és equivalent a $-5x^2 - 5x + 30 = 0$. Aplicant la fórmula de segon grau (A.2), obtenim que les solucions són 2 i $-3$.

Exercici 258. Resoleu les equacions de 2n grau següents:

*a*) $4x^2 + 2x - 4 = -2x + 4$
*b*) $9x^2 - 63x + 90 = 0$
*c*) $-x^2 - 3x + 10 = x^2 + 3x - 10$
*d*) $-2x^2 + 4x - 3 = -2x + x^2$
*e*) $2x^2 + 4x + 1 = -1$
*f*) $2x + 1 = -2 - x^2$

*Solució.* *a*) $-2$ i 1, *b*) 2 i 5, *c*) $-5$ i 2, *d*) 1, *e*) $-1$, *f*) no té solució ■

Exercici 259. Resoleu les equacions de 2n grau següents:

*a*) $3x^2 + 2x = 5x - 2$
*b*) $10x - 8x = x^2 - 5$
*c*) $9x - 8 = 7 - x^2$
*d*) $8x^2 - 2 = 10x^2 - 5x$
*e*) $(x-2)^2 - 5 = 10$
*f*) $3(x+4)^2 = 10$
*g*) $(x-2)^2 - 8 = 20x$
*h*) $5(x-1)^2 = 2$
*i*) $(x-1)^2 = -4$
*j*) $(x-5)^2 = 5x^2$

*Solució.* *a*) no té solucions, *b*) no té solucions, *c*) $-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{141}}{2}$, *d*) 2 i $\frac{1}{2}$, *e*) $2 \pm \sqrt{15}$, *f*) $-4 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$, *g*) $6 \pm 2\sqrt{37}$, *h*) $1 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$, *i*) no té solució, *j*) $-\frac{5}{4} \pm 5\frac{\sqrt{5}}{4}$ ■

Nota 3. Recordeu que $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$.

## A.5 Arrels de polinomis

Definició 62 (monomi). Un *monomi* és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre real i una o diverses lletres. Al nombre se l'anomena *coeficient* del monomi; a la part que conté les lletres de l'anomena *part literal*. Les diverses lletres s'anomenen *variables*.

Exemple 132. Les expressions següents són monomis:

- $5x^3$
- $2x^2y^5$

- $-4xy$
- $\frac{-6}{5}x^4$
- $6x$
- $8$

En canvi aquestes expressions no són monomis:

- $\frac{5}{x}$
- $5x^3\sqrt{y}$
- $3x^{-2}$

Definició 63 (polinomi). Un *polinomi* és una expressió algebraica formada per la suma de diversos monomis. Els monomis que formen part del polinomi s'anomenen *termes*.

Aquí només veurem polinomis d'una variable, usualment $x$, com per exemple $4x^2 - 5x + 2$ o $5x^4 + 2x^2$.

Definició 64 (grau d'un polinomi). El *grau* d'un polinomi d'un variable és el major exponent de la variable de cadascun dels seus termes

Exemple 133. El grau del polinomi $4x^5 - 2^3 - 5x + 8$ és 5 i el grau de $x^{10} - 2x^2 - 5x$ és 10.

Definició 65 (terme independent d'un polinomi). El *terme independent* d'un polinomi és el monomi de grau 0 del polinomi. Pot no tenir-ne.

Exemple 134. El terme independent del polinomi $4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ és $-7$; en canvi el polinomi $4x^3 - 2x^2 - 5x$ no en té.

Notació 4. Els polinomis en una variable $x$, es denoten per $p(x)$, $q(x)$, etc. que es llegeix "$p$ de $x$", "$q$ de $x$", etc. Així per exemple si $p(x) = 5x^2 - 2x$ i $q(x) = x^2 - 2x$, tenim que la seva suma és $p(x) + q(x) = 6x^2 - 4x$.

Les *operacions amb polinomis* bàsiques són:

*a*) Suma. Per sumar dos polinomis, es sumen els termes del mateix grau. Així per exemple si $p(x) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7$ i $q(x) = -7x^5 + 3x^4 + 6x^3 - x^2 - 4x - 15$, la seva suma és $p(x) + q(x) = -6x^5 + 3x^4 + 7x^2 - 14x - 8$. Aquesta suma es pot fer verticalment:

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^5 & & -6x^3 & +8x^2 & -10x & +7 \\
-7x^5 & +3x^4 & +6x^3 & -x^2 & -4x & -15 \\
\hline
-6x^5 & +3x^4 & & +7x^2 & -14x & -8
\end{array}$$

*b*) Resta. La resta $p(x) - q(x)$ es calcula sumant el polinomi $p(x)$ amb el polinomi $q(x)$ amb tots els coeficients canviats, és a dir, $p(x)+(-q(x))$. Si $p(x) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7$ i $q(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + x^2 - 6x$, llavors $p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x)) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7 - x^5 + 7x^4 - 9x^3 - x^2 + 6x = 7x^4 - 15x^3 + 7x^2 - 4x + 7$.

También es pot fer verticalment:

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^5 & & -6x^3 & +8x^2 & -10x & +7 \\
 & & & & & \\
-x^5 & +7x^4 & -9x^3 & -x^2 & +6x & \\
\hline
 & +7x^4 & -15x^3 & +7x^2 & -4x & +7
\end{array}$$

*c*) Producte de polinomis. Es calcula multiplicant cada terme del primer polinomi per cada terme del segon: si $p(x) = 7x^2 - 4x + 7$ i $q(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2$, llavors $p(x) \cdot q(x)$ és igual a:

$$\left(7x^2 - 4x + 7\right) \cdot \left(2x^4 - 5x^3 + x^2\right) =$$

$$14x^6 - 35x^5 + 7x^4 - 8x^5 + 20x^4 - 4x^3 + 14x^4 - 35x^3 + 7x^2 =$$

$$14x^6 - 43x^5 + 41x^4 - 39x^3 + 7x^2$$

*d*) No tractarem la divisió de polinomis en general. Només tractarem el *mètode de Ruffini*, que permet dividir un polinomi qualsevol $p(x)$ per un polinomi de la forma $x - a$, amb $a$ un nombre enter positiu. Veurem un exemple: volem dividir el polinomi $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$ per $x - 1$:

(a) En primer lloc, escrivim els coeficients del polinomi $p(x)$ de major a menor grau a una taula, posant-hi zeros allà on el polinomi no tengui termes:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
1 & & 1 & 2 & -2 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & -6
\end{array}$$

(b) El primer coeficient del polinomi $p(x)$ baixa sempre directament, tal com indica la fletxa,

(c) A continuació, el divisor (l'1), que l'hem escrit a l'esquerra de la línea vertical, multiplica el primer coeficient ($1 \cdot 1 = 1$) i el resultat es col · loca davall del segon coeficient del polinomi,

(d) Llavors es suma el resultat d'aquesta multiplicació amb el segon coeficient del polinomi ($1 + 1 = 2$)

(e) Ara, el divisor multiplica aquesta suma i el resultat es col · loca davall del tercer coeficient del polinomi $p(x)$

(f) Es repeteix aquest procés fins que no quedin coeficients.

(g) El darrer nombre és el reste de la divisió (en aquest cas $-6$); el quocient de la divisió l'hem d'extreure dels nombres del final de la taula $1\ 0\ \ -4 \rightarrow x^2 + 0x - 4$. El grau del polinomi quocient és sempre un menys que el grau de $p(x)$ (en aquest cas $3 - 1 = 2$).

(h) Per tant, la divisió de $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$ per $x - 1$ dóna com a quocient $x^2 - 4$ i reste $-6$; en altres paraules $(x^2 - 4)(x - 1) + (-6) = x^3 - x^2 - 4x - 4$.

El mètode de Ruffini serveix per a factoritzar un polinomi en polinomis irrecductibles i per a trobar les seves arrels enteres.

Definició 66 (arrel d'un polinomi). Donat un polinomi $p(x)$, un nombre $a$ és una *arrel* seva si substituïnt la $x$ pel valor de $a$, dóna 0.

**Teorema 31** (teorema fonamental de l'Àlgebra)**.** *Donat un polinomi, el nombre d'arrels reals d'aquest polinomi és com a màxim el seu grau*

Exemple 135. Són arrels de $p(x) = 2x^2 - 7x + 6$ són 2 i $\frac{3}{2}$, ja que l'equació de segon grau $2x^2 - 7x + 6 = 0$ té com a solucions aquests nombres (vegeu Secció A.4); en altres paraules $p(\frac{3}{2}) = 0$ i $p(2) = 0$.

En general trobar les arrels d'un polinomi és un problema irresoluble, però existeix una manera de trobar les seves arrels enteres.

**Algorisme 9** (procediment per trobar les arrels enteres d'un polinomi)**.** *Donat un polinomi $p(x)$, les arrels*

a) *Si té terme independent, calculam els seus divisors enters*

b) *Per a cada divisor $d$ del terme independent, dividim $p(x)$ per $x - d$. Si el reste de la divisió és 0, llavors $d$ és una arrel de $p(x)$. Si el reste de la divisió no és 0, llavors $d$ no és una arrel de $p(x)$.*

c) *En cas de no tenir terme independent, llavors 0 és una arrel i podem factoritzar $p(x)$ com un polinomi $q(x)$ multiplicat per $x^r$, per qualque $r > 0$. En aquest cas, apliquem l'anterior a $q(x)$: totes les arrels de $q(x)$ ho seran de $p(x)$.*

Exemple 136. Trobeu les arrels del polinomi $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

1. Els divisors enters de $-4$ són $1, -1, 2, -2, 4, -4$.

2. Provam de fer Ruffini amb $p(x)$ i $x - 1$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ \mathbf{1} & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -6 \end{array}$$

Com que el reste és $-6$ vol dir que 1 no és arrel de $p(x)$

3. Ara provem amb $-1$:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
\mathbf{-1} & & -1 & 0 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & 0
\end{array}
$$

Ara sí que hem obtingut un 0 al final. Per tant, $-1$ és arrel de $p(x)$.

4. Ara provem de fer Ruffini amb 2:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
\mathbf{2} & & 2 & 6 & 4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & 0
\end{array}
$$

Per tant, 2 és arrel de $p(x)$.

5. Igualment, si aplicam el mètode de Ruffini amb $-2$ també tendrem reste 0, pel que $-2$ també és una arrel.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
\mathbf{-2} & & -2 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0
\end{array}
$$

6. Com que ja tenim 3 arrels, ja no hem de intentar trobar-ne més (teorema 31).

Nota 4. En general, l'ordre en el que provem si els divisors senzers són o no arrels enteres és indistint

Nota 5. Pot ser que un polinomi no tengui arrels enteres però sí arrels reals: per exemple $x^2-2$ no té arrels enteres (proveu de fer Ruffini per als divisors de $-2$) però sí té arrels reals ($\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$).

També pot ser que no tengui arrels reals: per exemple $x^2+2$ no té arrels reals (es veu aplicant la fórmula de segon grau).

Exercici 260. Trobeu les arrels dels polinomis següents:

*a*) $x^4+3x^3-40x^2$

*b*) $2x^3-x^2-118x-315$

*c*) $x^5-2x^4-3x^2+6x$

*d*) $x^4+x^3-8x^2-2x+12$

*e*) $3x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 90x$

*f*) $x^4 + 28x^3 - 60x^2$

*Solució.* *a*) $-8$, 0 i 5, *b*) $-5$, $\frac{-7}{2}$ i 9, *c*) 0, 2 i
$sqrt[3]3$, *d*) $\pm\sqrt{2}$, 2 i $-3$, *e*) 2, $-3$, 0 i 5, *f*) 0 (doble), 2 i $-30$ ■

Exercici 261. Resoleu les equacions següents:

*a*) $x^4 + 3x^3 - 40x^2 = 0$

*b*) $2x^3 - x^2 - 118x = 315$

*c*) $x^3 - \frac{5x^2}{2} + x = 0$

*d*) $12x^4 - 39x^2 + 27 = 0$

*Solució.* *a*) $-8$, 0 i 5, *b*) 5, $\frac{-7}{2}$ i 9, *c*) $\frac{1}{2}$, 2 i 0, *d*) $\pm\frac{3}{2}$, $\pm 1$. ■

## A.6 Factorització de polinomis

Definició 67 (polinomi irreductible). Un polinomi és *irreductible* si no es pot escriure com a producte de polinomis de menor grau. En altre cas, s'anomena *reductible*

*a*) Els polinomis de primer grau són irreductibles. És a dir, tots els polinomis de l'estil $ax + b$ són irreductibles. Per exemple $2x - 4$ i $x + 4$ són irreductible.

*b*) Els polinomis de segon grau són irreductibles si, i només si, no tenen cap arrel real. És a dir $p(x) = ax^2+bx+c$ és irreductible si, i només si, l'equació $ax^2+bx+c = 0$ no té solució (vegeu Secció A.4). Per exemple, $x^2 + 9$ és irreductible, però $x^2 - 9$ i $x^2 - 2x + 1$ són reductibles.

*c*) Els polinomis de grau major o igual que 3 mai són irreductibles.

Definició 68 (factorització de polinomis). *Factoritzar* un polinomi $p(x)$ és descompondre $p(x)$ com a producte de polinomis irreductibles.

No existeix cap procediment per a factoritzar polinomis, ja que és equivalent a trobar arrels reals de polinomis de qualsevol grau. Encara que existeix un algorisme per factoritzar polinomis trobant arrels enteres.

**Algorisme 10** (procediment per factoritzar els polinomis). *Donat un polinomi $p(x)$, s'han de seguir les passes següents*

1. *Treure factor comú, si és possible (vegeu Secció A.3)*

2. *Trobarem els divisors del terme independent*

3. *Per a cada divisor d del terme independent, provarem si d és arrel del polinomi $p(x)$*

4. *Si d és arrel del polinomi, llavors $p(x)$ es pot expressar com a producte de $(x-d)$ i un polinomi $q(x)$ de grau $d-1$. En aquest cas, repetirem aquest algorisme des del primer pas amb el polinomi $q(x)$..*

   *Si d no és arrel, seguirem provant amb els altres divisors.*

5. *Si cap divisor del terme independent és arrel, llavors no podem factoritzar $p(x)$.*

6. *Al final, haurem de d'ajustar el coeficient de major grau per a què quedi el coeficient del terme de major grau de $p(x)$.*

Exemple 137. Factoritzem el polinomi $30x^4 + 35x^3 - 45x^2 + 10x$.

1. Podem treure factor comú perquè tots el termes són múltiples de 5 i de $x$:
$$5x(6x^3 + 7x^2 - 9x + 2)$$

2. Aplicam el mètode de Ruffini al polinomi que queda dins el parèntesi (després de provar els divisors, l'únic que va bé és el $-2$):

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ \mathbf{-2} & & -12 & 10 & -2 \\ \hline & 6 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

   Cap dels divisors permet factoritzar per Ruffini el polinomi $6x^2-5x+1$. Així, en aquest punt, la factorització és
$$5x(x+2)(6x^2 - 5x + 1)$$

3. Com que el polinomi $6x^2-5x+1$ és de segon grau, resoldrem l'equació corresponent (sempre farem això amb els polinomis de segon grau):
$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$
   Les solucions d'aquesta equació són:
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

4. Per tant, la factorització final obtinguda és
$$5x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2).$$

Ara bé, volem tenir 30 com a coeficient de major grau (30 és el coeficient de major grau del polinomi original) i no 5 (observa que $5x \cdot x \cdot x \cdot x = 5x^4$ és el terme de major grau).

Llavors, hem de muiltiplicar per 6. D'aquesta manera, la factorització final és $6 \cdot 5x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2)$, és a dir,

$$30x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2).$$

Exercici 262. Factoritzeu els polinomis següents:

*a*) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

*b*) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

*c*) $15x^3 + 25x^2 - 10x$

*d*) $3x^3 - 3x^2 - 6x$

*e*) $2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 8x + 12$

*f*) $-x^3 + x^2 + 4x - 4$

*g*) $-5x^4 + 20x^2 - 20$

*h*) $3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x$

*Solució. a*) $(x-1)(x+2)(x-3)$, *b*) $(x-1)(x^2+9)$, *c*) $15x(x-\frac{1}{3})(x+2)$, *d*) $3x(x-2)(x+1)$, *e*) $2(x-1)(x^2-2)(x+3)$, *f*) $-(x-1)(x+2)(x-2)$, *g*) $-5(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$ (resoleu l'equació biquadrada $-5t^2+20t-20=0$), *h*) $3(x-2)x(x-3)(x+3)$ ■

***B***

# Solucions

## B.1 Àlgebra lineal

### B.1.1 Determinants

71 *a*) 13, *b*) 73 *c*) $-12$ *d*) 18 *e*) $-256$

73 Aplicant la regla de Sarrus, obtenim que el determinant val $x - x^3 = x(1 - x^2)$. Per tant, el determinant val zero si, i només si, $x = 0$ o bé $x = \pm 1$.

74 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val $x^3 + 1$. Per tant, $x^3 + 1 = 0$ si, i només si $x = \sqrt[3]{-1} = -1$.

75 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val $3a + 1$.

76 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val $-3a^2+2a+5$. Resolent l'equació corresponent, $-3a^2 + 2a + 5 = 1$, tenim que el determinant val 0 si, i només si, $a = -1$ o $a = 5/3$ (aplicant la fórmula de segon grau - vegeu Secció A.4)

### B.1.2 Matrius

86 Tenim que $AB = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ en canvi $BA$ no es pot fer

87 $\begin{pmatrix} 33 & -12 & -15 \\ -12 & 12 & -9 \\ -15 & -9 & 29 \end{pmatrix}$

92 $m = -1$ i $n = 0$

94 $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

97 Les matrius són singulars per *a*) $\alpha = -1$ i $\alpha = -4$, *b*) $a = \pm\sqrt{3}$, *c*) $a = -3$, *d*) $\alpha = -1/3$ i $\alpha = 2$, *e*) $a = 0$, *f*) sempre, *g*) $m = 0$ i $m = 1$, *h*) $m = 0$, *i*) $a = 0$ i $a = 1$, *j*) mai, *k*) $a = 0$ i $a = \pm 1$, *l*) $k = 0$, *m*) $x = 1$ i $x = 2$, *n*) $a = 1$ i $a = \pm\sqrt{2}$, *o*) $a = 2$ i $a = \pm\sqrt{2}$, *p*) $a = 0$, *q*) $k = \pm 1$

### B.1.3 Sistemes d'equacions

109 *a*) $(0, 1, 1)$ *b*) $(1, 2, -1)$ *c*) $(5, 1, 0)$ *d*) $(1/2, -1/4, 1)$ *e*) compatible indeterminat $(\lambda/2, 3\lambda/2, \lambda)$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$ *f*) incompatible

114 80 cotxes blancs, 48 cotxes negres i 12 cotxes vermells

115 En Pere té 60 €, en Joan en té 40 i n'Àngel, 100.

116 Un pastisset de moniato costa $2,5$ €, el de nata, $3,25$ € i el de xocolata, $1,75$ €.

117 Hi ha 3 pomes, 4 peres i 5 plàtans.

118 Inverteixen 5.000€, 5.000 € i 10.000€.

## B.2 Geometria

205 $\vec{a}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ són paral · lels.

206 *a*) 4, *b*) El mòdul de $\vec{a}$ és $\sqrt{14}$ i el mòdul de $\vec{b}$ és $\sqrt{5}$, *c*) l'angle que formen és, aproximadament, de $61,43°$

207 *a*) $m = -2$, *b*) $m = \frac{2}{5}$

208 $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{280}} \sim 86,57°$

209 $m = \frac{5}{3}$

210 $\sqrt{54}$

211 $\frac{1}{\sqrt{91}}\overrightarrow{(-3,-1,9)}$

212 $\overrightarrow{(-2,-2,4)}$ o $\overrightarrow{(2,2,-4)}$

213 $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = -6$

214 $|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]| = |-6| = 6$

215 $m = -4$

216 *a*) $1/\sqrt{24}\overrightarrow{(-2,2,-4)}$, *b*) $\overrightarrow{(-12/\sqrt{24}, 12/\sqrt{24}, -24/\sqrt{24})}$

217 $\overrightarrow{(2,-1,1)}$

218 $\overrightarrow{(95/30, 57/45, -57/30)}$

219 No estan alineats

220 El punt és $A' = (4,-5,4)$

221 $a = -1$ i $b = \frac{-5}{2}$

222 *a*) vector *b*) punt al pla (és una intersecció de dues rectes) i recta a l'espai (és la intersecció de dos plans a l'espai) *c*) recta en forma paramètrica a l'espai *d*) punt a l'espai *e*) recta al pla i pla a l'espai *f*) pla a l'espai en forma paramètrica *g*) punt al pla *h*) recta a l'espai en forma contínua.

223 *a*) Forma vectorial $r \equiv (-3,2,1) + \lambda\overrightarrow{(-2,1,-1)}$, *b*) Forma paramètrica $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$ *c*) Forma contínua $r \equiv \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$, *d*) Forma implícita $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 1 = 0 \\ -y - z + 3 = 0 \end{array} \right.$

224 *a*) Forma vectorial $r \equiv (-4,2,5) + \lambda\overrightarrow{(0,0,1)}$, *b*) Forma paramètrica $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{array} \right.$ *c*) Forma contínua $r \equiv \frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$, *d*) Forma implícita $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{array} \right.$

225 No estan en el mateix pla.

227 *a*) S'encreuen, *b*) s'encreuen, *c*) s'encreuen, *d*) coincidents

228 Es tallen

229 $m = 12$ i $n = -3$

230 *a*) $\pi\colon 5x - 3y + 4z - 23 = 0$, *b*) $2x - y + 3z + 1 = 0$

231 *a*) $\pi \equiv 13x - y - 3z - 16 = 0$, *b*) $\pi \equiv 3x - 2y + 5z - 14 = 0$

232 Per ser paral · lels $m = 6$ i $n = \frac{1}{3}$. No són coincidents.

233 $\pi\colon 2x - y + z - 5 = 0$.

234 L'equació del pla que les conté és $2x + 16y - 20z + 38 = 0$.

235 $a = -2$; el pla que les conté és $\pi\colon x - y - 2z - 2 = 0$.

236 $r$ és paral · lela a $\pi$.

237 $4x + 7y + z - 27 = 0$

238 $x + 14y + 11z + 12 = 0$

239 $m = -1$; $\pi\colon\ -x + 4y - 3z + 2 = 0$

240 $-5x - 3y + z + 12 = 0$

241 $11x - 4y + 5z - 1 = 0$

242 Secants.

243 Si $a \neq -1$ o $a \neq 2$, llavors són secants. Si $a = -1$, llavors són paral · lels. Si $a = 2$, llavors $r$ està continguda a $\pi$.

251 S'encreuen. L'angle que formen és, aproximadament, $54,74°$

252 *a*) Aproximadament $41,81°$ *b*) 0 *c*) $60°$

253

# *C*

# Exercicis dels exàmens oficials

Exercicis dels exàmens oficials[1] des de l'any 2010 classificats per blocs.

## C.1 Àlgebra lineal

Exercici 263 (2010.a). Donada una matriu quadrada $A$, com es diu una matriu quadrada $B$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, on $I$ és la matriu identitat? Quina condició ha de satisfer la matriu quadrada $A$ perquè existeixi l'anterior matriu $B$?

Exercici 264 (2010.b). Donat el següent sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y - z = -2 \\ 2x + \lambda y = 0 \\ x - 2y + z = 3 \end{array}\right\}$$

Es demana:

*a*) Discutir el seu caràcter per a tots els valors de $\lambda \in \mathbb{R}$

*b*) Resoldre'l en els casos en què sigui possible

[1] https://estudis.uib.cat/grau/acces/mes_grans25/models_examen/

Exercici 265 (2011.a). Siguin $A$ i $B$ dues matrius quadrades d'ordre $2 \cdot 2$, tals que $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si el determinant de la matriu $A$ val 4, $\det(A) = 4$, quant val $\det(B)$ el determinant de la matriu $B$?

Donada la matriu $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ escriu la seva matriu transposada $C^t$.

Escriu una matriu $X$, que no sigui la identitat, de tal manera que $X^t = X$.

Exercici 266 (2011.b). Una nació importa 21.000 vehicles mensuals de les marques $X$, $Y$, $Z$, al preu de 1,2; 1,5 i 2 milions d'euros respectivament. Si el total de la importació ascendeix a 33.200 milions, i de la marca $X$ s'importa el 40% de la suma de les altres dues marques, quants vehicles de cada marca entren en el país?

Exercici 267 (2012.a). Determinau els valors de $k$ per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ admet inversa

Exercici 268 (2012.b). Determinau les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercici 269 (2013.a). Determinau els valors de $t$ per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ admet inversa

Exercici 270 (2013.b). Determinau les solucions del sistema d'equacions indicant si el sistema és o no compatible determinat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 271 (2014.a). Determinau els valors de $a$ i $b$ de manera que la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ verifiqui que $A^2 = A$.

Exercici 272 (2014.b). Calculau les arrels del polinomi $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$. Expressau la descomposició factorial del polinomi anterior.

Exercici 273 (2015.a). Determinau els valors de $a$ per als quals la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ no admet inversa

Exercici 274 (2015.b). Determinau si el sistema $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és o no compatible (determinat o no) quan $a = 1$ i $a = -2$.

Exercici 275 (2016.a). Els sous del pare, la mare i un fill sumats donen 16.250 euros. La mare guanya el doble que el fill. El pare guanya 2/3 del que guanya la mare. Utilitzant un sistema d'equacions que s'ajusti al problema i resolent-ho, determinau quant guanya cadascun d'ells

Exercici 276 (2016.b). Determinau el conjunt de valors de $x$ per als quals la matriu següent

$$\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

no admet inversa. Per a quins valors de $x$ la matriu té rang 3?

Exercici 277 (2017.a). Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; calculau $(A+B)^t$ o $(A \cdot B)^{-1}$. Nota $A^t$ vol dir la transposada de la matriu $A$.

Exercici 278 (2017.b). Resoleu el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x \\ 2x - y - 3z = 4x - 2 \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases}$$

Exercici 279 (2018). Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, es demana:

*a*) Calculau $A \cdot B$

*b*) Calculau $A^{-1}$ i $B^{-1}$

*c*) Calculau $(A \cdot B)^{-1}$

*d*) Calculau $A^{-1} \cdot B^{-1}$

*e*) Quina relació hi ha entre $(A \cdot B)^{-1}$ i $B^{-1} \cdot A^{-1}$?

Exercici 280 (2019.a). Determinau les matrius $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que satisfan l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 281 (2019.b). *a*) Donat el següent sistema d'equacions $\begin{cases} x+3y-z &= 0 \\ 2x+ay &= 0 \\ x-2y+z &= 3, \end{cases}$ discutiu el seu caràcter en funció del paràmetre real $a$. *b*) Resoleu-lo quan $a=2$.

Exercici 282 (2020.a). Siguin $A$ i $B$ dues matrius quadrades d'ordre $2 \cdot 2$, tals que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Si $det(A) = 4$, quan val $det(B)$?. Donada la matriu $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, escriu la seva matriu transposada $C^t$. Escriu una matriu $X$, que no sigui la identitat, de tal manera que $X^t = X$.

Nota: $det(A)$ indica el determinant de la matriu $A$ i $X^t$ indica la matriu transposada de la matriu $X$.

Exercici 283 (2020.b). Un agricultor té repartides 10 hectàrees de terreny en guaret, cultiu d'ordi i cultiu de blat. La superfície dedicada a l'ordi ocupa 2 hectàrees més que la dedicada a l'ordi ocupa 2 hectàrees més que la dedicada al blat, mentre que en guaret té 6 hectàrees menys que la superfície total dedicada al cultiu de l'ordi i del blat. Quantes hectàrees té dedicades a cadascun dels cultius i quantes estan dedicades al guaret?

## C.2 Geometria

Exercici 284 (2010). Una recta $r$ passa pel punt $(3,4,7)$ i és paral·lela a la recta $s$ d'equació

$$s\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}$$

Es demana:

*a*) Determinar les equacions contínues i paramètriques de la recta $r$

*b*) Determinar l'equació d'un pla $\pi$ que és perpendicular a $r$ i passa pel punt $(1,1,1)$

Exercici 285 (2011). Calculau l'equació implícita del pla que passa pel punt $P=(2,3,5)$ i és paral·l als vectors $\vec{u} = (-1,-2,-3)$ i $\vec{v} = (1,3,5)$. Calculau $n$ perquè el punt $A=(1,n,6)$ pertanyi al pla trobat

Determinau l'equació contínua de la recta que té per vector director el vector normal del pla trobat i que passa pel punt $P=(2,3,5)$.

Exercici 286 (2012.a). Calculau el valor del pendent de la recta $y = mx+3$ sabent que passa pel punt d'intersecció de les rectes $y=2x+1$ i $y=x+5$

Exercici 287 (2012.b). Determinau l'equació del pla que passa pels punts $A=(2,3,4)$, $B=(7,2,5)$ i $C=(2,3,1)$.

Exercici 288 (2013). Els punts $A = (0, 0)$, $B = (2, 1)$ i $C = (3, 3)$ són vèrtexs consecutius d'un paral · lelogram de vèrtexs $ABCD$. Trobeu les coordenades del vèrtex que falta, les equacions de les rectes que passen per les diagonals i les mesures d'aquestes diagonals.

Exercici 289 (2014.a). Determinau el pla $\pi$ que és perpendicular al vector $\vec{v} = (4, -2, 2)$ i que passa pel punt $A = (1, 2, 4)$.

Exercici 290 (2014.b). Donat el punt $D = (1, 1, 3)$ calculau el vector $\vec{AD}$, on $A = (1, 2, 4)$. Està el vector $\vec{AD}$ dins el pla $\pi$, determinat a l'apartat anterior?

Exercici 291 (2015.a). Determinau el punt d'intersecció de la recta $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + 6\lambda \end{cases}$ amb el pla $x - 3y + 5z + 11 = 0$

Exercici 292 (2015.b). Calculau $b$ en el punt $(5, -3, b)$ perquè sigui un punt del pla $x - 3y + 5z + 11 = 0$.

Exercici 293 (2016). 1. Determinau la intersecció de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi \equiv x - y + z = 7$. 2. Determinau l'equació del pla que és paral · lel al pla $\pi$ i passa pel punt d'intersecció obtingut a l'apartat anterior

Exercici 294 (2017). 1. Donat el pla $\pi \equiv x + y + z = 4$, determinau la recta $r$ que passa pel punt $P = (1, 2, 4)$ i és perpendicular a $\pi$. 2. Calculau el punt d'intersecció de $r$ amb $\pi$.

Exercici 295 (2018.a). Calculau unes equacions paramètriques del pla d'equació implícita $\pi \equiv x + y + z = 3$, i indicau un dels seus punts i dos vectors directors independents.

Exercici 296 (2018.b). Donada la recta d'equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

Està la recta continguda en el pla d'equació $x + y + z = 3$?

Exercici 297 (2019). Se sap que un pla $\pi$ és perpendicular al vector $\vec{v} = (2, 3, -1)$ i que passa pel punt $(2, -1, 3)$. Aleshores:

*a*) Determinau l'equació del pla $\pi$

*b*) Determinau l'equació de la recta que és perpendicular al pla $\pi$ i passa pel punt $P = (3, 0, -2)$.

Exercici 298 (2020.a). Calculeu l'equació implícita del pla que passa pel punt $P = (2, 3, 5)$ i és paral · lel als vectors $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (-1, -3, -5)$. Calculeu $n$ per a què el punt $A = (n, 3, 6)$ pertanyi al pla trobat.

Determinau l'equació contínua de la recta que té per vector director el vector normal del pla trobat i que passa pel punt $P = (2, 3, 5)$.

## C.3 Probabilitat

Exercici 299 (2010). Una enquesta ha revelat que el 23% dels habitants de Barcelona llegeix *La Vanguardia*, el 14% llegeix *El País* i el 6% llegeix ambdós diaris.

*a*) Quina probabilitat hi ha que un individu, triat a l'atzar i que duu *El País* sota l'aixella, sigui lector de *La Vanguardia*?

*b*) I, si duu *La Vanguardia*, quina és la probabilitat que llegeixi *El País*?

*c*) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats anteriors enpercentatge de lectors.

Exercici 300 (2011). En una determinada fàbrica d'automòbils, el 6% dels cotxes tenen defectes en el motor, el 8% tenen defectes en la carrosseria i el 2% té defectes en ambdós [components]. Sigui $A$ el succés "el cotxe té defecte en el motor" i $B$ el succés "el cotxe té defecte en la carrosseria". Es demana:

*a*) Expressar les dades proporcionades a l'enunciat com a probabilitats relacionades anb els successos $A$ i $B$.

*b*) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui almenys un defecte?

*c*) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós?

*d*) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats *b*) i *c*) en percentatge de cotxes

Exercici 301 (2012). Donats dos successos $A$ i $B$, se sap que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,3$ i $p(A \cap B) = 0,1$.

*a*) Calculau $p(A \mid B)$ i $p(A \mid A \cap B)$

*b*) Calculau $p(A \cap B \mid A \cup B)$ i $p(A \mid A \cup B)$

Exercici 302 (2013). Donades tres urnes, $U1$, $U2$ i $U3$, amb la següent composició de bolles blanques i negres:

U1: 3 blanques i 2 negres; U2: 4 blanques i 2 negres; U3: 1 blanca i 3 negres,

*a*) Calculeu la probabilitat d'extreure una bolla negra

*b*) Determinau la probabilitat que una bolla negra que s'ha extret procedeixi de la segona urna

Exercici 303 (2014). Una caixa conté 15 boles negres i 10 boles blanques. Es demana:

1. Si en triam una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui negra? I que sigui blanca?

2. Si extraiem dues boles, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que ambdues siguin blanques?

3. Si extraiem dues boles, sense reemplaçament, calculau la probabilitat que la primera sigui blanca i la segona negra

Exercici 304 (2015). Dels successos $A$ i $B$ se sap que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ i $p(A \cup B) = 0,7$. 1. Calculau $p(A \cap B)$ i $p(A^c \cap B^c)$. 2. Són els successos $A$ i $B$ independents?. Nota: per $A^c$ denotam el succés complementari de $A$.

Exercici 305 (2016.a). En una aula de dibuix hi ha 40 cadires, 30 amb respatller i 10 sense. Entre les cadires sense respatller n'hi ha 3 de noves, i entre les cadires amb respatller n'hi ha 7 de noves. Triada a l'atzar una cadira, quina és la probabilitat qie sigui nova?

Exercici 306 (2016.b). En un experiment se sap que $p(B) = 0,3$ i $p(A \mid B) = )0,1$. Determinau $p(A \cap B)$.

Exercici 307 (2017). Un CEO d'una empresa balear té una reunió a Madrid i ha de triar de forma equiprobable entre dues companyies aèries. La probabilitat d'arribar amb retard amb la companyia $A$ és de $0,25$ i amb la companyia $B$ és de $0,10$.

*a*) Triada a l'atzar una companyia, quina és la probabilitat que el CEO arribi amb retard a la reunió?

*b*) Si el CEO ha arribat tard a la reunió, quina és la probabilitat que hagi utilitzat la companyia $A$?

Exercici 308 (2018). D'una baralla espanyola[2] de 48 cartes es considera l'experiment aleatori "extreure una carta". Calculau la probabilitat dels successos següents:

*a*) Treure una carta que sigui un nombre primer

*b*) Que la carta que extraiem no sigui un as

*c*) Que sigui una figura d'espases

*d*) Treure una carta de copes

*e*) Treure una carta que sigui una figura i que no sigui de copes

[2]Una baralla espanyola de 48 cartes està formada per quatre colls de 12 cartes cada coll: oros, bastos, espases i copes. Les cartes dins de cada coll van numerades de l'1 al 12. Una figura és una carta marcada amb un 10, 11 o un 12. Un as és una carta marcada amb un 1.

Exercici 309 (2019). El 70% dels clients d'una companyia d'assegurances d'automòbils té més de 25 anys. Un 5% dels clients d'aquest grup té algun accident al llarg de l'any. En el cas de clients més joves de 25 any, aquest percentatge és del 20%.

*a*) Si s'escull un assegurat a l'atzar, calculau la probabilitat que tingui algun accident aquest any

*b*) Si una persona va tenir algun accident, calculau la probabilitat que sigui més jove de 25 anys.

Exercici 310 (2020). En una determinada fàbrica d'automòbils, el 6% dels cotxes tenen defectes al motor, el 8% tenen defectes a la carroseria i el 2% tenen defectes en ambdós. Sigui $A$ el succés 'el cotxe té defecte al motor' i $B$ el succés 'el cotxe té defecte a la carroseria'. Es demana:

*a*) Expressau les dades proporcionades a l'enunciat com a probabilitats relacionades amb els successos $A$ i $B$

*b*) Quina és la probabilitat que un cotxe tengui almenys un defecte?

*c*) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós?

*d*) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats *b*) i *c*) en percentatge de cotxes.

# Bibliografia


[1] María E. Ballvé, Ana M. Porto, Miguel Delgado, Teresa Ulecia, *Problemas de Matemáticas Especiales*. Sanz y Torres, Madrid, 2a edició, 2004.

[2] Miguel de Guzmán, *Selectividad. Matemáticas I. Pruebas de 1995*. Anaya, Madrid, 1996.

[3] Angélica Escoredo, María Dolores Gómez, José Lorenzo, Pedro Machín, Carlos Pérez, José del Río, Domingo Sánchez, *Matemàtiques II 2 Batxillerat*. Edicions Voramar, Santillana, València, 2009.

[4] Alícia Espuig Bermell *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior. Matemàtiques*. 2009. Disponible en línia[3]. Aquest material es distribueix sota llicència Reconeixement No-Comercial CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-NC-SA 3.0)

[5] Agustín Estévez Andreu, Juan Enciso Pizarro, *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Schaum, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

[6] Francisco Javier González Ortiz, *Proyecto MaTEX* (versió 1.00). 2004. Disponible en línia (accedit el novembre de 2014).


[3] http://somenxavier.github.io/cepasud/acfgs-alicia-espuig.html

[7] Javier SÁNCHEZ, *Apunts de Curs Orientació a la Universitat.* Notes manuscrites de Xavier Bordoy. Palma, 1996. No publicat.

[8] Ángel VEGAS PÉREZ, Manuel LÓPEZ CACHERO, *Elementos de matemáticas para economistas 1.* Ediciones Pirámide, Madrid, 2a edició, 1982.

# Glossari