

# Apunts de Matemàtiques per a l'Accés a la UIB per a majors de 25 anys

---

Teoria i exercicis per a la preparació de les “Proves  
d'accés a la Universitat de les Illes Balears per a  
majors de 25 anys i menors de 40 anys” de  
l'assignatura de Matemàtiques

Xisco Sebastià

Xavier Bordoy

Eventualment altres *col·laboradors* del projecte *Apunts per a  
l'accés a la UIB per a majors de 25 anys*

## Quant a l'autor

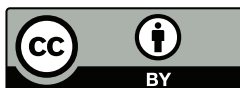
Xavier Bordoy  
Professor de Matemàtiques de Secundària  
CEPA Camp Rodó (Palma, Illes Balears)  
Correu electrònic: [somenxavier@posteo.net](mailto:somenxavier@posteo.net)

## Drets d'autor

© 2014-2022 Xisco Sebastià, Xavier Bordoy i, eventualment, altres [col·laboradors](#) del projecte [Apunts per a l'accés a la UIB per a majors de 25 anys](#)<sup>1</sup>. Tots els drets reservats. Tots els continguts d'aquesta obra estan subjectes a la llicència [Reconeixement 4.0 Internacional de Creative Commons](#) (CC-BY 4.0), llevat que s'hi indiqui el contrari. Per veure una còpia de la llicència, visiteu

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ca>.

Això vol dir, *essencialment*, que podeu copiar, modificar i distribuir qualsevol part de l'obra com vulgueu, sempre que en citeu la font de manera explícita i indiqueu si hi heu fet canvis, d'acord amb els termes de la llicència.



Personalment consider que és un honor que useu, copieu o distribuïu aquesta obra o alguns fragments d'aquesta pels fins que considereu oportuns. M'agradaria que m'ho comunicassi si així ho féssiu i, en aquest cas, estaria particularment orgullós d'haver aportat el meu gra d'arena per fer un material que altres persones consideren útil.

## Continguts aliens

Els següents continguts no són propis i, per tant, es distribueixen amb les seves corresponents llicències i autories:

- Els exercicis [43](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [94](#), [95](#), [96](#), [97](#), [98](#), [99](#), [100](#), [101](#), [102](#), [103](#), [104](#), [105](#), [108](#), [109](#), [110](#), [111](#), [112](#), [113](#), [114](#), [115](#), [116](#), [215](#) i [217](#) s'han extret del llibre *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior. Matemàtiques* de n'Àlicia Espuig Bermell [4]. El material es distribueix sota llicència Reconeixement NoComercial CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-NC-SA 3.0).

---

<sup>1</sup><https://repo.or.cz/apunts-acces-uib-majors-25-anys-matematiques.git>

- L'exercici 57 s'ha adaptat de l'exercici original: Proves d'Accés a la Universitat (PAU) del País Valencià (setembre 2005), Exercici B, Problema 1, extret del llibre *Matemàtiques II 2 Batxillerat* de Angélica Escoredo et al. Editorial Santillana. 2009
- L'exercici 58 s'ha adaptat de l'exercici 84 de la pàgina 98 del llibre *Matemàtiques II 2 Batxillerat* de Angélica Escoredo et al. Editorial Santillana. 2009
- L'exercici 61 correspon a l'exercici 93 de la pàgina 53 del llibre *Curso práctico de matemáticas. C.O.U.* Editorial Edunsa. 1993.
- Els exercicis 190, 191, 192, 193, 194, 207, 208, 219, 209, 210, 266, 267, 268 i 270 i els exemples 106 i 114 estan extrets de *Apunts de Curs Orientació a la Universitat* de Javier Sánchez [7].
- Els exercicis 271 i 272 estan inspirats en els exercicis 10 i 12 dels *Problemas de probabilidad* de Javier Sánchez [7]
- L'exercici 195 està extret de *Problemas de Matemáticas Especiales* de María Ballvé et al. [1].
- La figura 5.5 correspon al fitxer *Paralleloipedum.png*<sup>2</sup> el qual està extret de la Wikipedia. Alliberat al domini públic. 2007 Gebruker Svdmolen.
- La figura 5.10 és una obra derivada del fitxer de Geogebra *Plane with normal vector*<sup>3</sup> de n'Øystein Nordvik i en Stord Haugesund de la University College. 2012. El material original es distribueix sota llicència Reconeixement CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-SA 3.0).
- Les figures 6.1 i 7.2 són obres derivades del fitxer *Set operations illustrated with Venn diagrams*<sup>4</sup> de n'Uwe Ziegenhagen. 2010. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).
- Les figures 6.2 i 7.3 són obres derivades de *A Venn diagram with PDF blending*<sup>5</sup> de n'Stefan Kottwitz. 2015. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).

<sup>2</sup><https://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Paralleloipedum.png>

<sup>3</sup><http://tube.geogebra.org/material/show/id/21240>

<sup>4</sup><http://www.texample.net/tikz/examples/set-operations-illustrated-with-venn-diagrams/>

<sup>5</sup><http://www.texample.net/tikz/examples/venn/>

- La figura [7.1](#) és una obra derivada de *Probability tree*<sup>6</sup> d'en Kjell Magne Fauske. 2006. L'obra original es distribueix sota llicència Reconeixement 2.5 de Creative Commons (CC-BY 2.5).
- Els exercicis [274](#), [275](#) i [276](#) estan extrets del "Proyecto MaTeX-1-ESO" (exercicis 20 al 29) de Francisco Javier González Ortiz. 2004. L'obra original té tots els drets reservats.
- El disseny de la portada està extret de la pàgina web "An oval surrounded a \*long text\* inside in TikZ [equivalent cover background of METAFUN]" de Stackoverflow. Es distribueix sota llicència Reconeixement 4.0 de Creative Commons (CC-BY 4.0).

L'ús d'aquests materials es realitza acollint-se als termes de les corresponents llicències i al dret de cita i ressenya per a fins docents amparat per l'article 32 de la Llei de Propietat Intel·lectual de la legislació espanyola — Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. [Entrada 8930](#) del BOE 97, de 22 d'abril de 1996.

## Informació del document

Mathematics Subject Classification (2020): 00-01, 00A05, 00A06

La versió d'aquest document és la [2.7-pre.2022-08-22](#).

Aquest document ha estat generat, el 22 d'agost de 2022, usant  $\text{\LaTeX}$ , [LuaTeX](#) i [TikZ](#) sota un entorn [GNU/Linux](#) ([Artix Linux](#)). La revisió d'aquest document és la número [318](#)<sup>7</sup>. El conjunt de les versions s'administra amb el [git](#).

El document ha estat mecanografiat. Encara que s'hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-me enviant un missatge de correu electrònic a l'adreça electrònica [somenxavier@posteo.net](mailto:somenxavier@posteo.net).

D'altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per a millorar-la, us agrairíem que ens ho comunicéssiu. Si el canvi fos del nostre gust, l'incorporaríem a l'obra original en els mateixos termes de la llicència.

## Història del document

L'autoria de la versió inicial d'aquests apunts correspon a en Xisco Sebastià, que els emprava al CEPA Llevant.

---

<sup>6</sup><http://www.texample.net/tikz/examples/probability-tree/>

<sup>7</sup><https://repo.or.cz/apunts-acces-uib-majors-25-anys-matematicues.git/shortlog/refs/heads/main>

El curs 2013-2014 vaig conèixer la seva existència a través d'una alumna de Preparació de les proves d'accés a la UIB del CEPA Sud, on donava classe de Matemàtiques, i els vaig emprar com a llibre de text de classe.

A finals de 2014, en Xisco Sebastià, a qui coneixia amb anterioritat, va alliberar molt amablement els apunts sota una llicència Creative Commons Reconeixement 4.0, després d'una conversa telefònica.

Amb posterioritat a aquest fet, vaig crear un repositori de git per desar aquests apunts i, paulatinament, he anat introduint el que crec que són millores<sup>8</sup>.

El curs 2019-2020, vaig traslladar-me del CEPA Sud al CEPA Camp Rodó, on he seguit usant aquest material fins el curs 2020-2021.

El curs 2021-2022 es varen assignar les classes de Preparació d'accés a la UIB per a majors de 25 anys a un altre professor, per la qual cosa no vaig incorporar-hi cap canvi.

El curs 2022-2023 torn a fer les classes d'aquest curs.

Segurament existeixen, almenys, dues versions paral·leles: la que mantenc jo i la d'en Xisco Sebastià.

---

<sup>8</sup>Originàriament el repositori estava allotjat a github (<https://github.com/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys>), però l'any 2019 els vaig traslladar a un servidor propi (<http://git.somenxavier.xyz/somenxavier/apunts-acces-uib-per-a-majors-de-25-anys/>). L'any 2021 el vaig traslladar al repositori de repo.or.cz (<https://repo.or.cz/apunts-acces-uib-majors-25-anys-matematiques.git>) per abaratir la infraestructura. Per continus problemes de caiguda de servidor, el juny del 2022, vaig traslladar la infraestructura al servidor codeberg.org (<https://codeberg.org/somenxavier/apunts-acces-uib-majors-25-anys-matematiques>); també vaig provar el servei a sourcehut (<https://git.sr.ht/~somenxavier/apunts-acces-uib-majors-25-anys-matematiques>) però el final el vaig descartar. Després de solucionar aquests problemes de caiguda, vaig tornar a emprar el servidor repo.or.cz



# Índex

<b>I</b>	<b>Àlgebra lineal</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Determinants</b>	<b>13</b>
1.1	Càlcul de determinants . . . . .	13
1.2	Exercicis proposats . . . . .	17
1.2.1	Càlcul de determinants . . . . .	17
1.2.2	Resolució d'equacions amb determinants . . . . .	17
1.3	Solucions . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Matrius</b>	<b>21</b>
2.1	Definicions . . . . .	21
2.2	Operacions amb matrius . . . . .	23
2.2.1	Suma i diferència de matrius . . . . .	23
2.2.2	Multiplicació d'un nombre per una matriu . . . . .	24
2.2.3	Transposició d'una matriu . . . . .	24
2.2.4	Producte de dues matrius . . . . .	25
2.3	Propietats de les operacions amb matrius . . . . .	26
2.4	Matriu inversa . . . . .	27
2.4.1	Matriu inversa en funció d'un paràmetre . . . . .	30

2.5	Rang d'una matriu . . . . .	31
2.5.1	Rang d'una matriu en funció d'un paràmetre . . . . .	35
2.6	Exercicis proposats . . . . .	35
2.7	Solucions . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Sistemes d'equacions lineals</b>	<b>41</b>
3.1	Definicions . . . . .	41
3.2	Tipus de sistemes . . . . .	42
3.3	Sistemes matricials . . . . .	43
3.4	Regla de Cràmer . . . . .	44
3.5	Classificació d'un sistema de equacions . . . . .	46
3.6	Discussió d'un sistema de equacions . . . . .	48
3.7	Resolució d'un sistema d'equacions . . . . .	49
3.7.1	Sistema compatible determinat . . . . .	50
3.7.2	Sistema compatible indeterminat . . . . .	52
3.7.3	Sistemes d'equacions amb un paràmetre . . . . .	54
3.8	Exercicis proposats . . . . .	55
3.8.1	Problemes de sistemes d'equacions . . . . .	57
3.9	Solucions . . . . .	60
<b>II</b>	<b>Geometria</b>	<b>61</b>
<b>4</b>	<b>Geometria del pla</b>	<b>63</b>
4.1	Punts . . . . .	63
4.1.1	Punt mitjà . . . . .	64
4.2	Vectors . . . . .	65
4.2.1	Operacions amb vectors . . . . .	68
4.2.1.1	Suma de dos vectors . . . . .	69
4.2.1.2	Diferència de dos vectors . . . . .	69
4.2.1.3	Producte d'un escalar per un vector . . . . .	70
4.3	La recta en el pla . . . . .	73
4.3.1	Equació paramètrica de la recta . . . . .	75
4.3.2	Equació contínua de la recta . . . . .	76
4.3.3	Equació general de la recta . . . . .	76
4.3.3.1	Vector director a partir de l'equació general . . . . .	77
4.3.4	Equació explícita de la recta . . . . .	79
4.3.4.1	Càlcul de la pendent mitjançant dos punts . . . . .	80
4.3.4.2	Pendents de rectes paral·leles i perpendiculars . . . . .	81
4.3.5	Equació de la recta determinada per dos punts . . . . .	81
4.3.6	Exemples de càlcul d'equacions de rectes . . . . .	81
4.3.7	Posició relativa entre dues rectes . . . . .	82
4.3.7.1	Càlcul dels punts de tall . . . . .	84
4.4	Exercicis proposats . . . . .	85



<b>5 Geometria de l'espai</b>	<b>91</b>
5.1 Sistema de coordenades espacials	91
5.2 Vectors	92
5.2.1 Base estàndard de vectors	92
5.2.2 Operacions amb vectors anàlogues al pla	93
5.2.3 Producte vectorial	94
5.2.3.1 Propietats del producte vectorial	95
5.2.4 Producte mixt	96
5.3 La recta a l'espai	98
5.3.1 Equació paramètriques de la recta	98
5.3.2 Equació contínua de la recta	100
5.3.3 Equació implícita de la recta	100
5.3.3.1 Vector director a partir de l'equació implícita	102
5.3.3.2 Pas de l'equació implícita a l'equació paramètrica	102
5.3.3.3 Exercicis d'equacions de rectes	104
5.3.3.4 Rectes paral·leles	105
5.4 El pla a l'espai	106
5.4.1 Equacions paramètriques del pla	107
5.4.2 Equació general del pla	108
5.4.2.1 Pas de l'equació general a la paramètrica	109
5.4.2.2 Vector normal al pla a partir de l'equació general	110
5.4.3 Plans paral·lels	112
5.5 Posició relativa entre rectes i plans	113
5.5.1 Posició relativa entre dues rectes	113
5.5.2 Posició relativa d'una recta i un pla	115
5.5.3 Posició relativa entre dos plans	116
5.6 Càlcul de la intersecció entre rectes i plans	117
5.6.1 Intersecció entre dos plans	118
5.6.2 Intersecció entre dues rectes	118
5.6.3 Punt d'intersecció entre una recta i un pla	120
5.7 Exercicis proposats	120
5.7.1 Vectors	120
5.7.2 Punts	122
5.7.3 Rectes i plans	122
5.7.4 Posició relativa de rectes	123
5.7.5 Plans	123
5.7.6 Altres	125
5.8 Exercicis resolts de geometria de l'espai	126
5.9 Recull de fórmules de geometria de l'espai	127
5.10 Solucions	131

<b>III</b>	<b>Probabilitat</b>	<b>135</b>
<b>6</b>	<b>Experiències aleatòries</b>	<b>137</b>
6.1	Espai mostral i esdeveniments . . . . .	138
6.2	Operacions amb esdeveniments . . . . .	140
6.2.1	Propietats de les operacions . . . . .	141
<b>7</b>	<b>Probabilitat</b>	<b>147</b>
7.1	Propietats de la probabilitat . . . . .	148
7.2	Regla de Laplace . . . . .	149
7.3	Probabilitat condicionada . . . . .	150
7.3.1	Propietats de la probabilitat condicionada . . . . .	151
7.4	Experiments compostos: tècniques de resolució . . . . .	152
7.4.1	Diagrama d'arbre . . . . .	153
7.4.2	Taules de contingència . . . . .	156
7.4.3	Diagrames de Venn . . . . .	158
7.5	Exercicis proposats . . . . .	161
<b>IV</b>	<b>Apèndixs</b>	<b>171</b>
<b>A</b>	<b>Recordatori de matemàtica elemental</b>	<b>173</b>
A.1	Operacions amb nombres . . . . .	173
A.1.1	Sumes i restes . . . . .	173
A.1.2	Producte i quocient de dos nombres . . . . .	173
A.1.3	Jerarquia d'operacions . . . . .	174
A.1.4	Càlcul del mínim comú múltiple . . . . .	175
A.2	Equacions de primer grau . . . . .	177
A.3	Extracció de factor comú . . . . .	178
A.4	Equacions de segon grau . . . . .	179
A.5	Arrels de polinomis . . . . .	180
A.6	Factorització de polinomis . . . . .	185
<b>B</b>	<b>Exercicis dels exàmens oficials</b>	<b>189</b>
B.1	Àlgebra lineal . . . . .	189
B.2	Geometria . . . . .	192
B.3	Probabilitat . . . . .	194
	<b>Bibliografia</b>	<b>199</b>
	<b>Glossari</b>	<b>207</b>

# Prefaci

Aquest text pretén ser un manual per a la preparació de la prova de Matemàtiques d'[Accés a la Universitat de les Illes Balears per a majors de 25 anys](#) de l'assignatura de Matemàtiques.

Els continguts d'aquest manual només abarquen tres de les quatre parts de les quals consta el temari. El motiu principal d'aquest fet és que, encara que el manual les tengués, no es tendria temps material de veure-les a classe amb els sis mesos d'un curs de preparació a la UIB de qualsevol Centre d'Educació de Persones Adultes (d'octubre a març)<sup>9</sup>. S'ha optat per deixar de banda el bloc d'Anàlisi, que és el que requereix més coneixements previs per entendre'l.

S'ha procurat que l'estil del manual sigui el més proper a l'alumne, sense deixar de banda, però, els aspectes més formals.

Es suposa un coneixement equivalent a l'Educació Secundària Obligatòria (ESO) per llegir fluïdament el text: operacions amb els diferents tipus de nombres, resolució d'equacions de primer i segon grau, factorització de polinomis, etc. (vegeu l'[Apèndix A](#)). El nivell dels continguts del manual es correspondria, essencialment, amb un segon de batxillerat excepte la part de Geometria al pla i Probabilitat que equivaldria a un nivell d'ESO.

Palma, 22 d'agost de 2022.

---

<sup>9</sup>Les proves d'accés a la UIB solen ser a principis d'abril.



Part I

Àlgebra lineal



# 1

## Determinants

Un *determinant* el nombre, que es calcula segons determinades regles, associat a una disposició de nombres escrits en forma de fileres i columnes. Els determinants tenen el mateix nombre de fileres i de columnes.

El tamany del determinant, és a dir, el nombre de fileres (i de columnes) que té, s'anomena *ordre*.

Per denotar que comença i acaba un determinant, s'escriu un segment recta al principi i al final dels nombres que el conformen.

Alguns exemples de determinants són:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

En aquest cas, el primer determinant té ordre 2 i el segon determinant té ordre 3.

### 1.1 Càlcul de determinants

Es té un procediment de càlcul en funció de l'ordre del determinant. Els casos que més apareixen en els exercicis són els d'ordre 2 i 3.

**Ordre 1** El determinant d'ordre 1 és el propi element que el constitueix:

$$|a| = a$$

No hem de confondre el determinant d'ordre 1 amb el valor absolut del nombre, que es denota de la mateixa manera. Recordem que el *valor absolut* d'un nombre és la distància d'aquest nombre a 0 a la recta numèrica: és a dir  $|-2| = 2$  i  $|2| = 2$ .

**Ordre 2** Es calculen mitjançant la regla següent:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

**Exemple 1.**

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-5) \cdot 2 = -3 + 10 = 7$$

Observem que el que va precedit del signe positiu és aquell que s'aconsegueix multiplicant els nombres en *sentit dret*. En canvi, el terme precedit pel signe negatiu s'obté multiplicant els dos nombres en *sentit esquerre*.

**Ordre 3** Es calculen mitjançant la regla de Sarrus

**Algorisme 1** (regla de Sarrus).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

De la mateixa manera que per als determinants d'ordre 2, els termes del determinant que es calculen multiplicant els nombres en *sentit dret* van precedits de signe positiu i tenen signe negatiu els que provenen de multiplicacions de nombres *en sentit esquerre*. Gràficament (Figura 1.1):



Figura 1.1: Regla mnemotècnica per a recordar la regla de Sarrus



Exemple 2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 \cdot 4 \\ &\quad - (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 4 \\ &= -4 + 0 - 36 - 6 + 30 - 0 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Exercici 1. Calculeu els determinants següents:

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

g)

$$\begin{vmatrix} x & 5+x \\ 7 & -8x \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

e)

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

h)

$$\begin{vmatrix} 3-x & 4x^2 \\ 6 & 7+2x \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

f)

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

i)

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

*Solució.* a) 5, b) -7, c) 15, d) 30, e) -40, f) 68, g)  $-8x^2 - 7x - 35$ , h)  $-26x^2 - x + 21$ , i)  $x^3 + 3x^2$ . ■

**Ordre  $\geq 4$**  Per a calcular els determinants d'ordre superior a 3 es fa *desenvolupant* el determinant per una fila o una columna. En general, es calcula un determinant d'ordre  $n$  a partir de  $n$  determinants d'ordre  $n-1$ .

**Algorisme 2** (desenvolupament d'un determinant).

1. Es tria una fila o columna qualsevol (la tria és arbitrària)
2. El resultat del determinant és la suma dels elements d'aquesta fila pels seus adjunts.

L'*adjunt* d'un element és el determinant que resulta de suprimir la fila i la columna a les quals pertany aquest element. El signe de l'adjunt

ve determinat segons l'esquema següent:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

és a dir, s'alternen els signes  $+$  i  $-$ , començant pel signe  $+$  que li correspon a l'element que es troba a la primera fila i primera columna. Això es pot escriure en termes més compactes  $(-1)^{i+j}$ , on  $i$  denota la fila i  $j$  la columna. Això vol dir que si la suma de la fila i la columna és parell, aleshores el signe de l'adjunt serà positiu, i si la suma és senar, aleshores l'adjunt tindrà signe negatiu.

**Exemple 3.** Calcularem el valor del determinant següent desenvolupant-lo per la quarta columna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= -3 \cdot \left( - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \left( \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &+ 0 \cdot \left( - \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right) + 3 \cdot \left( \begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3 \cdot (-70) + 1 \cdot 28 + 0 + 3 \cdot (-77) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Observem que, amb aquest mètode, és convenient triar aquella línia que contengui més zeros, ja que per a aquests no és necessari ni tan sols calcular el seu adjunt.

**Exercici 2.** Calculeu el valor dels determinants següents:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -6 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

*Solució.* a) 2326, b) 0 ■

## 1.2 Exercicis proposats

### 1.2.1 Càlcul de determinants

Exercici 3. Calculeu el valor dels determinants següents:

$$a) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} x & 4x & -1 \\ x & 2x & 0 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix}$$

Exercici 4. Calculeu aquests determinants:

$$a) \begin{vmatrix} x+2 & x \\ 3 & 4x \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2x+3 & 5x^2 \\ 3 & 5x-6 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 3x & x & 2 \\ 1 & x & x \\ x+1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} x+1 & x & 3 \\ x-5 & x & 2 \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

Solució. a)  $4x^2 + 5x$  b)  $x^3 - 10x - x + 4$  c)  $-5x^2 + 3x - 18$  d)  $-23x$  ■

### 1.2.2 Resolució d'equacions amb determinants

Per afrontar aquesta secció és necessari conèixer la resolució d'equacions de primer, de segon grau i de grau major o igual que 3 (vegeu [Secció A.2](#), [Secció A.4](#) i [Secció A.5](#); concretament [exemple 135](#)).

Exercici 5. Resoleu les equacions següents:

$$a) \begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2 & x & x+1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$e) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & x \\ 1 & x-2 & x \\ -2 & -2 & 2x-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Exercici 6. Per a quin valor de  $x$  s'anul·la el determinant següent?

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Exercici 7. Resoleu l'equació següent:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Exercici 8. Trobeu, en funció de  $a$ , el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

Trobeu les arrels del polinomi resultant.

Exercici 9. Trobeu, en funció de  $a$ , el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a \\ a & a+1 & 1 \\ a+2 & a & a+1 \end{vmatrix}$$

i digueu quan el determinant val 0.

### 1.3 Solucions

- 3 a) 13, b) 73 c)  $-12$  d) 18 e)  $-256$
- 6 Aplicant la regla de Sarrus, obtenim que el determinant val  $x - x^3 = x(1 - x^2)$ . Per tant, el determinant val zero si, i només si,  $x = 0$  o bé  $x = \pm 1$ .
- 7 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val  $x^3 + 1$ . Per tant,  $x^3 + 1 = 0$  si, i només si  $x = \sqrt[3]{-1} = -1$ .
- 8 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val  $3a + 1$ .
- 9 Aplicant la regla de Sarrus, tenim que el determinant val  $-3a^2 + 2a + 5$ . Resolent l'equació corresponent,  $-3a^2 + 2a + 5 = 1$ , tenim que el determinant val 0 si, i només si,  $a = -1$  o  $a = 5/3$  (aplicant la fórmula de segon grau - vegeu [Secció A.4](#))



## 2

# Matrius

### 2.1 Definicions

**Definició 1 (matriu).** Una *matriu* és una col·lecció de nombres disposats en fileres i columnes. Es diu *quadrada* si aquesta disposició té tantes fileres com columnes; en cas contrari es diu *rectangular*.

**Exemple 4.** Són exemples de matrius les següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

La primera és una matriu rectangular i la segona és una matriu quadrada.

**Definició 2 (ordre d'una matriu).** L'*ordre* d'una matriu és el nombre de fileres i columnes que té, i s'escriu de la forma  $n \times m$ , on  $n$  és el nombre de fileres i  $m$  és el nombre de columnes.

De vegades també s'anomena *dimensió* de la matriu.

En el cas de les matrius quadrades es sol indicar el seu ordre únicament amb el nombre de fileres (o columnes).

**Exemple 5.** A l'exemple anterior la primera és d'ordre  $2 \times 3$ , i la segona és d'ordre  $2 \times 2$ , o bé, simplement, d'ordre 2.

## Tipus de matrius

**Definició 3 (matriu nul·la).** Una matriu és *nul·la* quan tots els seus elements són iguals a zero, és a dir,  $a_{ij} = 0$ , per a tot  $i, j$ .

**Exemple 6.** Les matrius

$$a) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

són nul·les (d'ordre  $3 \times 4$  i  $3 \times 3$  respectivament).

**Definició 4 (matriu oposada).** Donada una matriu  $A$ , la seva *oposada* és la matriu formada pels elements d' $A$  amb signe oposat, és a dir,  $-A = (-a_{ij})$ .

**Exemple 7.** La matriu  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -a & 6 \end{pmatrix}$  és la matriu oposada de la matriu  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & a & -6 \end{pmatrix}$ .

**Definició 5 (matriu fila).** Una matriu es diu *matriu fila* si només té una fila, és a dir, quan és d'ordre  $1 \times m$ .

**Definició 6 (matriu columna).** Una matriu s'anomena *matriu columna* si només té una columna, o sigui quan té ordre  $n \times 1$ .

**Exemple 8.** Les matrius

$$(0 \quad -3 \quad 2 \quad 4), \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

són matrius fila i columna respectivament.

**Definició 7 (diagonal principal).** S'anomena *diagonal principal* d'una matriu quadrada al conjunt d'elements que van del vèrtex superior esquerre a l'inferior de la dreta.

**Exemple 9.** A la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

els nombres 3, -1 i 7 són els que formen la diagonal principal.

**Definició 8 (matriu unitat).** Es diu *matriu unitat* (o *matriu identitat*) a aquella matriu quadrada en la qual tots els elements de la diagonal principal són uns i la resta d'elements són zeros. Es simbolitza per  $I$  o  $Id$ . Si es vol indicar el seu ordre, aleshores s'indica mitjançant un subíndex:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$



són les matrius unitat d'ordre 2, d'ordre 3, etc.

**Definició 9 (matriu triangular).** Una matriu  $A = (a_{ij})$  es diu *triangular* quan  $a_{ij} = 0$  per a tot  $i < j$  o bé quan  $a_{ij} = 0$  per a tot  $i > j$ . En paraules, quan els elements per davall o per damunt de la diagonal principal són zero.

**Definició 10 (matriu diagonal).** Una matriu  $A = (a_{ij})$  s'anomena *diagonal* si, i només si,  $a_{ij} = 0$  per a tot  $i \neq j$ , és a dir, els elements que no estan a la diagonal principal són zero.

**Observació 1.** Una matriu no té res que veure amb un determinant: un determinant és un nombre i una matriu una col·lecció de nombres. Encara que a tota matriu quadrada li podem associar un determinant, que es denota per  $|A|$  o bé  $\det(A)$ .

### Igualtat entre matrius

**Definició 11 (igualtat de matrius).** Direm que dues matrius són *iguals* si són del mateix ordre i els seus elements respectius són iguals.

**Exemple 10.** Per exemple, les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3-3 \\ \pi & 24/2 & -4 \end{pmatrix}$$

són iguals.

**Exercici 10.** Calculeu el valor de  $x$  perquè les matrius  $A$  i  $B$  siguin iguals, amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -x+4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Operacions amb matrius

A continuació es defineixen les operacions que es poden realitzar amb matrius.

### 2.2.1 Suma i diferència de matrius

**Definició 12 (suma i resta de matrius).** La *suma* de dues matrius del mateix ordre es fa sumant els elements respectius. La *diferència* (o resta) es calcula restant els elements corresponents.

És a dir, si sumen dues matrius  $A$  i  $B$ , llavors l'element de la matriu suma que es troba a la fila  $i$  i la columna  $j$  és la suma dels elements de  $A$  i de  $B$  que es troben a la fila  $i$  i columna  $j$ . De la mateixa manera, l'element de la fila  $i$  i columna  $j$  que correspon a la resta de  $A - B$  es calcula restant els elements  $A$  i  $B$  de la fila  $i$  i columna  $j$ .

Exemple 11. Vegem una diferència de matrius:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - (-1) & 3 - 5 \\ 5 - 5 & 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La suma es fa de manera anàloga.

Exercici 11. Calculeu  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$  i  $-A + B$ , amb

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Multiplicació d'un nombre per una matriu

**Definició 13 (multiplicació de nombres i matrius).** Per *multiplicar un nombre per una matriu* es multiplica aquest nombre per cadascun dels elements de la matriu.

De vegades aquest nombre s'anomena *escalar*.

Exemple 12.

$$-5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 & -5 \cdot (-2) & -5 \cdot 0 \\ -5\pi & -5 \cdot 12 & -5 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -5\pi & -60 & 20 \end{pmatrix}$$

Exercici 12. Calculeu

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

### 2.2.3 Transposició d'una matriu

**Definició 14 (transposició de matrius).** La *transposició* d'una matriu és l'operació per la qual es canvien de manera ordenada les fileres per les columnes (i viceversa). La *matriu transposta* de la matriu  $A$  es representa per  $A^t$ .

Exemple 13. La matriu transposta de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

és la matriu

$$A^t = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 5 \\ -18 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercici 13. Escriviu les transpostes de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2.2.4 Producte de dues matrius

No sempre és possible multiplicar dues matrius. Per aquest motiu, abans de definir la multiplicació de dues matrius hem de veure quina condició han de complir les matrius que volem multiplicar per a que aquesta operació pugui fer.

**Condició 1 (producte de dues matrius).** *Per poder multiplicar dues matrius s'ha de complir que el nombre de columnes de la primera matriu (la que es col·loca a l'esquerra) ha de coincidir amb el nombre de fileres de la segona (la que es col·loca a la dreta).*

Aquesta condició, a més de ser necessària per a la multiplicació de dues matrius, és suficient.

Degut a què el nombre de fileres i de columnes de dues matrius poden ser qualssevol, pot ocórrer que es pugui calcular el producte  $A \cdot B$  de les matrius  $A$  i  $B$ , però que no es pugui calcular  $B \cdot A$ .

**Exemple 14.** No podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

però sí podem calcular el producte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vegem ara com es multipliquen dues matrius.

**Definició 15 (multiplicació de matrius).** Siguin  $A$  i  $B$  dues matrius d'ordres  $n \times m$  i  $m \times p$  respectivament. El seu producte té ordre  $n \times p$ , esquemàticament:

$$\begin{array}{ccc} A & \cdot & B & = & AB \\ n \times m & & m \times p & & n \times p \end{array}$$

El seu producte calcula de la manera següent:

1. L'element  $c_{ij}$  de la matriu  $A \cdot B$  que està ubicat a la fila  $i$  i columna  $j$ , es calcula multiplicant la fila  $i$ -èsima de  $A$  per la columna  $j$ -èsima de  $B$ , és a dir,

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj},$$

on  $a_{ij}$  denota l'element de  $A$  que està a la fila  $i$ -èsima i columna  $j$ -èsima, i  $b_{ij}$  denota l'element de  $B$  que està a la fila  $i$ -èsima i columna  $j$ -èsima.

2. Això es realitza per a totes les fileres i columnes

És a dir, en altres paraules, l'element  $c_{11}$  s'obté multiplicant la fila 1 de  $A$  per la columna 2 de  $B$ , l'element  $c_{12}$  s'obté multiplicant la fila 1 de  $A$  per la columna 2 de  $B$ , etc.

Exemple 15.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2(-2) + 0 \cdot 3 + (-3)(-4) & 2(-1) + 0 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 6 \\ 0(-2) + 1 \cdot 3 + 1(-4) & 0(-1) + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -18 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

És a dir, l'element que ha d'anar, per exemple, a la 2a fila i 1a columna es calcula sumant els productes dels elements de la 2a fila de la primera matriu amb els elements de la 1a columna de la segona matriu.

Exercici 14. Calculeu els productes de les matrius següents:

$$\begin{array}{ll} a) & c) \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ b) & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

## 2.3 Propietats de les operacions amb matrius

En aquesta secció ens feim ressò de les propietats de matrius més importants

### Propietats de la transposició de matrius

$$a) (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$b) (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

### Propietats dels determinants de matrius

a) El determinant del producte de dues matrius és igual al producte dels seus determinants, és a dir,

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

b) El determinant d'una matriu (quadrada)  $A$  és igual al determinant de la seva matriu transposta, és a dir,

$$|A| = |A^t|.$$

Exemple 16. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenim que  $|A| = -3$  i  $|B| = 2$  i, per tant,  $|A| \cdot |B| = -6$ , que coincideix amb

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Exercici 15. Tenim dues matrius  $A$  i  $B$  tals que  $|A| = 10$  i  $|A \cdot B| = 20$ . Calculeu què val  $|A|$ .

Exemple 17. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es té que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{i} \quad |A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16.$$

## 2.4 Matriu inversa

**Definició 16 (matriu inversa).** Donada una matriu quadrada  $A$ , la seva *matriu inversa*, que es denota per  $A^{-1}$ , és una matriu del mateix ordre tal que compleix les condicions següents de forma simultània:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I, \\ A^{-1} \cdot A &= I. \end{aligned}$$

Noteu que una condició per a què una matriu tingui inversa és que sigui quadrada. Les matrius rectangulars no tenen matriu inversa perquè un dels productes no existeix (vegeu [condició 1](#)).

**Definició 17 (matriu regular).** Les matrius que tenen inversa s'anomenen *matrius regulars*. En altre cas, es diu que la matriu és *singular*.

Exemple 18. No totes les matrius són regulars: per exemple la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

no té inversa, ja que si en tengués arribaríem a un error: si suposem que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , aleshores s'hauria de complir que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el que implica que

$$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - d = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + d = 1 \end{cases}$$

Però la primera i la segona equació impliquen que  $0 = 1$ . Contradicció!

**Teorema 1.** Una matriu quadrada  $A$  és regular si, i només si,  $|A| \neq 0$ . És a dir

$$A \text{ té inversa} \iff |A| \neq 0$$

Expressat amb paraules:

- a) Si una matriu quadrada té inversa, aleshores el seu determinant és diferent de zero
- b) I si el determinant d'una matriu quadrada no val zero, aleshores aquesta matriu té inversa.

Ara sabem quina condició s'ha de complir per a què una matriu sigui regular, però com es calcula la matriu inversa d'una matriu quadrada? A continuació ho veurem.

**Teorema 2 (càlcul de la matriu inversa).** Si  $A$  és regular, aleshores

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|},$$

on  $\text{Adj}(A)$  denota la **matriu adjunta** d' $A$ , formada pels adjunts dels elements de  $A$ .

**Algorisme 3 (càlcul de la matriu inversa).** Per calcular la matriu inversa d'una matriu quadrada  $A$  seguirem les passes següents:

1. En primer lloc calcularem  $|A|$ . Si aquest val 0, ja podem assegurar que la matriu  $A$  no té inversa. Si  $|A| \neq 0$ , seguim amb els punts següents.
2. Calculam la matriu adjunta de  $A$ , és a dir,  $\text{Adj}(A)$ .
3. Farem la transposta de  $\text{Adj}(A)$ . La denotarem per  $(\text{Adj}(A))^t$ .

4. Finalment, es té que

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$$

**Nota 1.** Es pot demostrar que  $\text{Adj}(A)^t = \text{Adj}(A^t)$ . Per tant, es pot adaptar l'algorisme anterior si voleu calcular, en primer lloc, la matriu trasposada de  $A$ .

Vegem-ho amb un exemple.

**Exemple 19.** Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tenim que

$$|A| = -9 - 16 = -25 \neq 0$$

El fet de que aquest determinant no valgui zero ens assegura que existeix la matriu inversa de  $A$ . Anem a calcular-la.

La matriu adjunta de  $A$  és

$$\begin{aligned} \text{Adj}(A) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -8 & 12 \\ -6 & 3 & 8 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La transposta de l'adjunta és, aleshores,

$$(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa de  $A$  és:

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -9 & -6 & -4 \\ -8 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & -3 \end{pmatrix}}{-25} = \begin{pmatrix} 9/25 & 6/25 & 4/25 \\ 8/25 & -3/25 & -2/25 \\ -12/25 & -8/25 & 3/25 \end{pmatrix}$$

**Observació 2.** És el mateix fer la transposada de la matriu dels adjunts de  $A$  que la matriu dels adjunts de la transposada de  $A$ . En altres paraules,  $Adj(A)^t = Adj(A^t)$ .

**Exercici 16.** Calculeu, si en té, la matriu inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

### 2.4.1 Matriu inversa en funció d'un paràmetre

**Exemple 20.** Suposem que volem calcular la matriu inversa de

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu depèn del paràmetre  $a$ . Per tant, podem suposar que la matriu inversa de  $B$  existirà o no segons el valor numèric que prengui el paràmetre  $a$ . ¿Què ha de valer  $a$  per a què existeixi  $B^{-1}$ ? Aquest valor de  $a$  quedarà imposat per la condició

$$|B| \neq 0,$$

que és la condició que ens assegura que existeix la matriu inversa de  $B$ . Calculem  $|B|$ :

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 21a - 7$$

Aquest determinant val 0 si, i només si, quan  $21a - 7 = 0$ . És a dir, quan  $a = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ . Aquí apareixen dues possibilitats:

- a) Si  $a = 1/3$ , tenim que  $|B| = 0$ , i, per tant, no existeix la matriu inversa de  $B$ .
- b) Si  $a \neq 1/3$ , aleshores  $|B| \neq 0$ , i, per tant, existeix  $B^{-1}$ . En aquest cas, podem calcular la matriu inversa de  $B$ , que òbviament dependrà del paràmetre  $a$



$$\begin{aligned}
 \text{Adj}(B) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & a \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2-7a & -1 & 7 \\ -1 & -3 & 21 \\ a & 3a & -7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Per tant, la matriu inversa de  $B$  és:

$$\begin{aligned}
 B^{-1} &= \frac{(\text{Adj}(B))^t}{|B|} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} 2-7a & -1 & a \\ -1 & -3 & 3a \\ 7 & 21 & -7 \end{pmatrix}}{21a-7} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2-7a}{21a-7} & \frac{1}{7-21a} & \frac{a}{21a-7} \\ \frac{1}{7-21a} & \frac{3}{7-21a} & \frac{3a}{21a-7} \\ \frac{7}{21a-7} & \frac{21}{21a-7} & \frac{7}{7-21a} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Exercici 17. Calculeu la matriu inversa de  $B$  en funció del paràmetre  $\alpha$ , amb

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

## 2.5 Rang d'una matriu

**Definició 18 (menor d'una matriu).** Si en una matriu qualsevol (no necessàriament quadrada) seleccionam  $p$  fileres i  $p$  columnes, els elements en què s'encreuen aquestes  $p$  fileres i  $p$  columnes formen una submatriu quadrada d'ordre  $p$ . El determinant d'aquesta submatriu s'anomena *menor d'ordre  $p$*  (o simplement *menor*) de la matriu inicial.

Exemple 21. De la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ \pi & 12 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \pi & -4 \end{vmatrix}$$

és un menor d'ordre 2.

En aquest cas, hem seleccionat els elements en els quals s'encreuen les fileres 1 i 2 i les columnes 1 i 3.

**Definició 19 (rang d'una matriu).** Donada una matriu qualsevol  $A$ , es defineix el seu *rang*, el qual es denota com  $rg(A)$  o simplement  $rgA$ , al màxim ordre dels seus menors no nuls. És a dir, el rang d'una matriu és un nombre  $p$  que compleix les condicions següents:

- a) Existeix un menor no nul d'ordre  $p$
- b) Tots els menors d'ordre  $p + 1$  són nuls, o bé no existeixen menors d'ordre  $p + 1$ .

En altres paraules, calculem el

$$\max\{p \mid \text{existeix un menor d'ordre } p \text{ no nul}\},$$

és a dir, el màxim ordre que té un menor no nul.

Exemple 22. El rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

és 3, ja que existeix, al menys, un menor d'ordre 3 no nul, com, per exemple, el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

i no hi ha cap menor d'ordre 4.

Tot seguit, veurem com podem calcular el rang d'una matriu de forma efectiva. Per això, hem d'introduir el concepte d'independència lineal. En primer lloc, recordem la definició de combinació lineal:

**Definició 20 (combinació lineal).** Una línia  $L$  és *combinació lineal* de  $n$  línies  $L_1, L_2, \dots, L_n$  si, i només si, podem obtenir la línia  $L$  com a suma de les línies  $L_1, \dots, L_n$  prèviament multiplicades per nombres reals, és a dir,

$$L = a_1 \cdot L_1 + a_2 \cdot L_2 + \dots + a_n \cdot L_n.$$

Exemple 23. En la matriu següent

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la tercera columna és combinació lineal de les dues primeres, ja que es pot aconseguir sumant la primera columna multiplicada per 2 i la segona columna multiplicada per 3, és a dir,  $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$ .

**Proposició 3 (relació de la combinació lineal i els determinants).** *Per un determinant qualsevol, són equivalents:*

- Existeix una línia que és combinació lineal de les altres línies paral·leles
- Totes les línies són combinació lineal de les altres línies paral·leles
- El determinant val 0

Exemple 24. Tal com hem dit en l'exemple anterior (exemple 23), la tercera columna és combinació lineal de les dues anteriors. Per la proposició, això vol dir que:

- la primera columna també és combinació lineal de la segona i tercera columnes
- la segona columna és combinació lineal de la primera i tercera columnes
- el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

val 0.

- qualsevol fila és combinació lineal de les altres fileres

**Definició 21 (dependència lineal).** Una línia és *linealment dependent* de  $n$  línies  $L_1, L_2, \dots, L_n$  si, i només si,  $L$  es pot expressar com a combinació lineal de  $L_1, \dots, L_n$ .

En cas contrari,  $L$  és *linealment independent*, és a dir, no existeixen cap nombres  $a_1, \dots, a_n$  tals que  $L$  sigui igual a  $a_1 \cdot L_1 + \dots + a_n \cdot L_n$ .

**Proposició 4 (fites del rang d'una matriu).** *Es pot veure que, si  $A$  és una matriu qualsevol d'ordre  $n \times m$ , aleshores:*

- $rgA$  és igual al nombre de línies linealment independents
- $rgA \leq \min\{m, n\}$

- c)  $rgA \geq 0$ .  $rgA = 0$  si, i només si,  $A$  és igual a la matriu nul·la.
- d) Si  $A$  no és la matriu nul·la, aleshores  $rgA \geq 1$ .

**Algorisme 4 (càlcul del rang d'una matriu de dalt a baix).** Per a calcular el rang d'una matriu  $A$  d'ordre  $n \times m$  es segueixen els passos següents:

- a) Es calcula el mínim del nombre de fileres i columnes d' $A$ , és a dir,  $r = \min\{n, m\}$ . Aquest és el rang màxim que pot tenir  $A$ .
- b) Es calculen els menors d'ordre  $r$  d' $A$ . Si algun d'aquests és no nul, aleshores automàticament  $rgA = r$ . En cas contrari,  $rgA < r$ .
- Notem que només calcularem tots els menors d'ordre  $r$  quan tots ells sigui nuls. Tot d'una que trobem un menor d'ordre  $r$  no nul, ja no calcularem cap més menor d'ordre  $r$  i conclourem que  $rgA = r$ .
- c) Es procedeix de manera anàloga al pas anterior pels menors d'ordre  $r - 1$  i es conclou que  $rgA = r - 1$  o bé  $rgA < r - 1$ .
- d) Es repeteixen aquestes passes successivament.

Exemple 25. Suposem que volem calcular el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Per la [proposició 4](#), tenim que  $rgA \leq \min\{3, 4\} = 3$ .
- b) Hem de veure si existeix un menor d'ordre 3 no nul. Hi ha quatre possibilitats per a formar menors d'ordre 3: a) triar les columnes 1, 2 i 3, b) triar les columnes 1, 2 i 4, c) triar les columnes 1, 3 i 4 i d) triar les columnes 2, 3 i 4. Si algun d'aquests menors fos no nul, aleshores el rang d' $A$  seria 3. Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant,  $rgA < 3$ .

- c) Vegem si és dos: existeix un menor no nul d'ordre 2? Sí, per exemple,
- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Per la qual cosa, } rgA = 2.$$

Exercici 18. Calculeu el valor del rang de la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

### 2.5.1 Rang d'una matriu en funció d'un paràmetre

De vegades, una matriu pot incloure un paràmetre. El rang d'aquesta matriu dependrà, aleshores, del valor que tenguí aquest paràmetre. Vegem-ho amb un exemple.

**Exemple 26.** Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Anem a calcular el seu rang. De manera anàloga a l'[exemple 25](#), calcularem el rang d' $A$  arran dels menors més grans possibles. Així, en aquest exemple començarem amb

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 2\alpha + 6 - 4\alpha = 16 - 2\alpha,$$

que és el menor més gran que es pot treure a partir d' $A$ . Aquest menor val 0 si, i només si,  $16 - 2\alpha = 0$ , és a dir, quan  $\alpha = 8$ .

Diferenciem casos:

- a) Si  $\alpha \neq 8$ : existeix un menor d'ordre 3 diferent de 0 ( $\Delta \neq 0$ ), i no hi ha menors d'ordre superior a 3 ( $rgA \leq 3$ ). Per tant, el rang de  $A$  és 3.
- b) Si  $\alpha = 8$ : tots els menors d'ordre 3 (de fet, l'únic menor d'ordre 3 en aquest cas) són zero. Per tant,  $rgA < 3$ . Cerquem, aleshores, un menor d'ordre 2 diferent de 0. Per exemple

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

per la qual cosa el rang és 2.

En conclusió, si  $\alpha \neq 8$ , aleshores  $rgA = 3$ . I si  $\alpha = 8$ , aleshores  $rgA = 2$ .

**Exercici 19.** Calculeu  $rgA$  en funció del paràmetre  $\alpha$ , on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

## 2.6 Exercicis proposats

**Exercici 20.** Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu, si és possible,  $AB$  i  $BA$ .

Exercici 21. Calculeu  $3AA^t - 2I$ , amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 22. Comproveu que  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$  amb les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 23. Determineu els valors de  $m$  per als quals es verifica que  $X^2 - \frac{5}{2}X + I = \mathbf{0}$ , amb

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 24. Determineu  $a$  i  $b$  de forma que es verifiqui que  $A^2 = A$  amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

Exercici 25. Trobeu totes les matrius  $X$  de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ tals que } X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 26. Trobeu dos nombres reals  $m$  i  $n$  tals que  $A + mA + nI = \mathbf{0}$  si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercici 27. Siguin  $A$  i  $B$  les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobeu les condicions que han de complir els coeficients  $a, b$  i  $c$  perquè es verifiqui que  $AB = BA$ .

Exercici 28. Trobeu dues matrius  $X$  i  $Y$  que verifiquin el sistema següent:

$$\left. \begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Exercici 29. Calculeu, si és possible, la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 30. Calculeu la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 31. Diguen en funció dels paràmetres corresponents quan les matrius següents són regulars. En cas de ser-ho, trobeu la seva inversa:

a)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha + 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha + 2 \end{pmatrix}$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

g)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

h)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a + 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \alpha + 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

i)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a - 1 & -2 & -1 \\ 1 & a + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

j)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

k)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

l)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

o)

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4a \end{pmatrix}$$

m)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

p)

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

Exercici 32. Calculeu el rang de cadascuna de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercici 33. Estudieu el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 34. Estudieu el rang de la matriu següent en funció de  $a, b$  i  $c$ :

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$



## 2.7 Solucions

20 Tenim que  $AB = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$  en canvi  $BA$  no es pot fer

21  $\begin{pmatrix} 33 & -12 & -15 \\ -12 & 12 & -9 \\ -15 & -9 & 29 \end{pmatrix}$

26  $m = -1$  i  $n = 0$

28  $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$  i  $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

31 Les matrius són singulars per a)  $\alpha = -1$  i  $\alpha = -4$ , b)  $a = \pm\sqrt{3}$ , c)  $a = -3$ , d)  $\alpha = -1/3$  i  $\alpha = 2$ , e)  $a = 0$ , f) sempre, g)  $m = 0$ , h)  $a = 0$  i  $a = 1$ , i) mai, j)  $a = 0$  i  $a = \pm 1$ , k)  $k = 0$ , l)  $a = 1$  i  $a = 2$ , m)  $a = 1$  i  $a = \pm\sqrt{2}$ , n)  $a = 2$  i  $a = \pm\sqrt{2}$ , o)  $a = 0$ , p)  $k = \pm 1$



## 3

# Sistemes d'equacions lineals

### 3.1 Definicions

Definició 22 (sistema d'equacions lineal). Un *sistema d'equacions lineals de  $m$  equacions i  $n$  incògnites* és un conjunt d'equacions que tenen l'aspecte general següent:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\},$$

de manera que s'han de verificar conjuntament.

Anomenarem:

- a) A  $x_1, \dots, x_n$  les *incògnites* del sistema
- b) A  $a_{ij}$ , on  $i = 1, \dots, m$  i  $j = 1, \dots, n$ , els *coeficients* del sistema
- c) A  $b_1, \dots, b_m$  els *termes independents* del sistema

Una *solució* del sistema és un conjunt de valors  $c_1, \dots, c_n$  de manera que

verifiquen simultàniament cada equació, és a dir,

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11} \cdot c_1 + a_{12} \cdot c_2 + \dots + a_{1n} \cdot c_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot c_1 + a_{22} \cdot c_2 + \dots + a_{2n} \cdot c_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1} \cdot c_1 + a_{m2} \cdot c_2 + \dots + a_{mn} \cdot c_n & = & b_m \end{array} \right\}.$$

Aquests valors es poden escriure en forma de  $n$ -tupla ordenada  $(c_1, \dots, c_n)$ .

*Resoldre* el sistema és trobar totes les  $n$ -tuples que són solució d'aquest.

## 3.2 Tipus de sistemes

**Definició 23 (tipus de sistemes lineals).** Atenent al nombre de solucions, un sistema pot ésser de diversos tipus:

- Si un sistema no té solució, s'anomena *incompatible*
- Si té solució, s'anomena *compatible*
  - Si el sistema té una sola solució, aleshores s'anomena *compatible determinat*
  - Si el sistema té més d'una solució, aleshores s'anomena *compatible indeterminat*. En els sistemes lineals, un sistema compatible indeterminat té infinites solucions (no en pot tenir un nombre finit distint d'1).
    - \* Un sistema compatible indeterminat es diu *simplement indeterminat* si el conjunt de solucions depèn d'un paràmetre
    - \* Un sistema compatible indeterminat es diu *doblement indeterminat* si el conjunt de solucions depèn de dos paràmetres<sup>1</sup>

**Definició 24 (sistema homogeni).** Un sistema d'equacions s'anomena *homogeni* si tots els seus termes independents són iguals a zero. És a dir, els sistemes d'equacions tenen la pinta següent:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\}.$$

**Exemple 27.** El sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} 4x - y + 6z & = & -9 \\ -x + 3y - 2z & = & -1 \end{array} \right\}$$

<sup>1</sup>Per exemple, les solucions del sistema format per l'única equació  $2x - 3y + 4z = 1$  es poden expressar com  $y = a$ ,  $z = b$  i  $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2b$ , on  $a$  i  $b$  són nombres reals qualsevols (paràmetres).

és compatible, ja que el conjunt de tres nombres  $x = -2, y = 1, z = 0$  és solució del sistema, donat que

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot (-2) - 1 + 6 \cdot 0 &= -9 \\ -(-2) + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 &= -1 \end{aligned} \right\}$$

En canvi, el conjunt  $x = 3, y = 27, z = 1$  no es solució, ja que alguna de les equacions no es verifica (la segona en aquest cas):

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot 3 - 27 + 6 \cdot 1 &= -9 \\ -3 + 3 \cdot 27 - 2 \cdot 1 &\neq -1 \end{aligned} \right\}.$$

Exemple 28. El sistema

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

és incompatible (no tiene solució), ja que no existeixen dos nombres,  $x$  i  $y$ , tals que la seva suma sigui, a la vegada, 3 i 2 (o la suma dóna 3 o dóna 2, pero no els dos valors de cop).

### 3.3 Sistemes matricials

Per resoldre sistemes d'equacions de forma còmoda, és necessari passar de la seva forma algebraica clàssica (com a conjunt d'equacions) a una forma matricial (com a igualtat entre matrius). Això facilitarà enormement esbrinar el nombre de solucions d'un sistema i el seu càlcul.

Un sistema de  $m$  equacions i  $n$  incògnites  $x_1, \dots, x_n$  adopta la forma general:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}.$$

Aquest es pot expressar de forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o bé en la forma més compacte

$$A \cdot x = b,$$

on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

La matriu  $A$  s'anomena *matriu de coeficients del sistema*, la matriu (fila)  $b$  s'anomena *matriu de termes independents* i  $x$  reb el nom de *matriu de variables*.

Anomenarem *matriu ampliada (o completa) del sistema* i la representarem com a  $M$ , a la matriu d'ordre  $m \times (n + 1)$ :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Exemple 29. Per exemple, en el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + 3z &= -2 \end{aligned} \right\}$$

les incògnites són  $x, y$  i  $z$ , i els termes independents són 0 i  $-2$ . La matriu dels coeficients i la matriu ampliada són, respectivament,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple 30. El sistema

$$\left. \begin{aligned} 4x - y + 6z &= -9 \\ -x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

és el mateix que

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Regla de Cràmer

La regla de Cràmer permet trobar la solució de sistemes d'equacions lineals en els que es verifiquin, simultàniament, les condicions següents:

- Hi ha tantes equacions com a incògnites
- La matriu de coeficients té determinant no nul

Amb aquestes condicions, la regla de Cràmer permet trobar la solució del sistema. En aquest cas, podem assegurar que només existeix una única solució (el sistema és compatible determinat), però això ho veurem més endavant ([Secció 3.5](#)).

**Algorisme 5** (regla de Cràmer). *Sigui*

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right\}.$$

un sistema d'equacions d' $n$  equacions amb  $n$  incògnites tal que el determinant  $|A|$  de la seva matriu de coeficients  $A$  és no nul. Aleshores, el sistema té una sola solució,  $(x_1, \dots, x_n)$ , que ve donada per:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

**Exemple 31.** Sigui el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 0 \\ x + 3z & = & -2 \\ x + y & = & 1 \end{array} \right\}$$

Aquest sistema té 3 equacions i 3 incògnites i, a més, es compleix que

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 1 - 6 = -8 \neq 0$$

Per tant, podem aplicar la regla de Cràmer, amb el que la solució del sistema és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8}$$

Per tant,  $(5/8, 3/8, -7/8)$  és la solució del sistema d'equacions.

Exercici 35. Resoleu el sistema següent:

$$\left. \begin{array}{l} -x - 2y + 5z = -3 \\ 3x + 3z = 4 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

### 3.5 Classificació d'un sistema de equacions

Per suposat, no tots els sistemes d'equacions lineals tenen tantes equacions com incògnites, i fins i tot en aquest cas, no tots compleixen que el determinant de la seva matriu de coeficients sigui no nul. Per tant, la regla de Cràmer no és aplicable en aquests casos. Ara bé, tindrem algorismes per a la resolució dels sistemes d'equacions més generals ([Secció 3.7](#))

Ara bé, abans d'ocupar-nos de la resolució general dels sistemes d'equacions lineals, ens interessarem sobre els criteris que han de complir per a què aquests tinguin solució. És a dir, estudiarem en quins casos un sistema d'equacions té solució i, en aquest cas, quantes en té. D'aquesta manera, podem assegurar-nos que, abans de resoldre un sistema d'equacions, aquest té una solució i, per tant, no començarem a resoldre sistemes que no tinguin solució, amb el consegüent guany de temps.

**Teorema 5 (teorema de Rouché-Frobenius).** *Sigui un sistema d'equacions lineals qualsevol amb  $n$  incògnites. I siguin  $A$  la matriu de coeficients i  $M$  la matriu ampliada. Aleshores:*

- $rgA \neq rgM \iff$  El sistema és incompatible (no té solució)
- $rgA = rgM \iff$  El sistema és compatible (té solució)
  - $rgA = rgM = n \iff$  El sistema és compatible determinat (té una única solució)
  - $rgA = rgM < n \iff$  El sistema és compatible indeterminat (té infinites solucions)



D'aquesta manera, per saber si un sistema d'equacions té solució o no, en primer lloc s'han de calcular els valors de  $rgA$  i  $rgM$  i procedir a classificar el sistema segons la taula anterior.

**Observació 3.** Recordem que el rang d'una matriu és el nombre de línies linealment independents ([proposició 4](#)). Per tant, clarament, tenim que

$$rgA \leq rgM$$

Notem que, en el cas d'un sistema homogeni, aquest desigualtat realment és una igualtat, és a dir,  $rgA = rgM$ .

**Observació 4.** La idea que s'amaga darrera del teorema de Rouché-Frobenius ([teorema 5](#)) és analitzar si una equació és combinació lineal de les altres: si això passa, aleshores la podem suprimir del sistema, ja que aquesta equació no ens aporta cap informació. Per exemple, en el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

tenim que la tercera equació és combinació lineal de les dues primeres ( $L_3 = L_1 - L_2$ ). En el nostre cas, això és el mateix que dir que el rang de la matriu ampliada és menor que 3 (el nombre d'incògnites), per aplicació de [proposició 4](#), ja que les fileres de la matriu ampliada són les equacions del sistema d'equació. Si el rang de la matriu ampliada coincideix amb el nombre d'incògnites, vol dir que totes les equacions són linealment independents i, per tant, no n'hi ha cap que sigui deduïble de les altres.

D'altra banda, la comparació entre els rangs de la matriu ampliada i la matriu de coeficients ens dóna informació sobre la compatibilitat del sistema. Per a què un sistema tenguí solució, la independència lineal de les seves equacions ha de ser la mateixa que la independència lineal de les equacions considerades sense termes independents.

**Exemple 32.** Sigui el sistema de equacions

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + 3z = -2 \\ 3x - y + 4z = -2 \end{array} \right\}$$

Per a determinar quin tipus de sistema és, hem de calcular els rangs de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- Com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

aleshores  $rgA < 3$ . Si cerquem un menor d'ordre 2, en trobem un no nul:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Per tant,  $rgA = 2$ .

- Com que  $rgA = 2$  i  $rgA \leq rgM$ , sabem que  $rgM \geq 2$ . Hem de veure si  $rgM$  pot ser igual a 3. Per això, hem de calcular tots els menors d'ordre 3 de  $M$ . Ara bé,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

pel que  $rgM = 2$ .

- Per tant,  $rgA = rgM = 2 < 3$ . Per la qual cosa, aquest sistema és compatible indeterminat. Per tant, té un nombre infinit d'incògnites.

Exercici 36. Clasifiqueu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x - 3z = 3 \\ 3x - 3y - 2z = 3 \end{array} \right\}$$

### 3.6 Discussió d'un sistema de equacions

Quan en un sistema apareix un paràmetre en els termes independents o en els coeficients del sistema, aleshores la classificació d'aquest depèn del valor que té aquest paràmetre.

Exemple 33. Sigui el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 5z = 0 \\ x - 3z = -2 \\ 3x - \alpha y + 2z = -2 \end{array} \right\}$$

Estudiem els valors dels rangs de les seves matrius de coeficients i ampliada en funció del paràmetre  $\alpha$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -\alpha & 2 \end{vmatrix} = 33 - 11\alpha$$

Pel que,  $|A|$  valdrà zero si, i només si,  $33 - 11\alpha = 0$ , és a dir, si  $\alpha = 3$ . D'aquí es segueix que hem de diferenciar casos:

- a) Si  $\alpha \neq 3$ , aleshores  $|A| \neq 0$ . Per tant,  $rgA = 3$ . I, per tant, com que  $rgA \leq rgM \leq 3$ , tenim que  $rgM = 3$ . I tenim tres incògnites, pel que el sistema és compatible determinat (té una única solució per a cada valor concret de  $\alpha$ ).
- b) Si  $\alpha = 3$ , aleshores les matrius de coeficients i ampliades són:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, sabem que  $rgA < 3$  (l'únic menor d'ordre 3,  $|A|$ , és zero). I com que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

aleshores  $rgA = 2$  (hi ha un menor d'ordre dos no nul).

Queda ara calcular el rang de  $M$ . Sabem segur que  $rgM$  com a mínim és 2. Hem de veure si pot ser tres. Per això, calculem tots els menors d'ordre tres:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant,  $rgM = 2$ .

En resum, si  $\alpha \neq 3$ , el sistema és compatible determinat. I si  $\alpha = 3$ , el sistema és compatible indeterminat.

**Exercici 37.** Clasifiqueu el sistema següent en funció del paràmetre  $\alpha$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ \alpha x - 3z = 3 \\ 3x - 3y - 2z = 3 \end{array} \right\}$$

Notem que l'aplicació del teorema de Rouché-Frobenius ([teorema 5](#)) no proporciona la solució del sistema, sinó tan sols quantes en té. En l'apartat següent es mostra com trobar aquestes solucions.

### 3.7 Resolució d'un sistema d'equacions

La resolució d'un sistema d'equacions varia lleugerament segons si aquest és un sistema compatible determinat o un sistema compatible indeterminat. Ara bé, a grans trets, sempre es realitzen els mateixos passos:

- En primer lloc, s'esbrina si el sistema és compatible o incompatible usant el teorema de Rouché-Frobenius ([teorema 5](#)). En cas de què el sistema sigui incompatible, s'ha acabat (no hi ha solució per tant no es pot calcular).
- Quan es té un sistema compatible, es determina si aquest és determinat o indeterminat.
- En el primer cas, usant la regla de Cràmer es resol el sistema i es calcula la seva única solució. En l'altra cas, es transforma el sistema en un altre compatible determinat, el qual depèn d'un paràmetre, i es calcula la seva solució, aplicant de nou la regla de Cràmer. En aquest cas, s'obté una solució que depèn d'un paràmetre.

Vegem els dos tipus de sistemes a continuació.

### 3.7.1 Sistema compatible determinat

Exemple 34. Sigui el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = -2 \\ 4x - 3y = 0 \\ y + z = -1 \\ 3x - 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Volem resoldre aquest sistema. Per fer-ho, escrivim les matrius de coeficients i ampliada, respectivament:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

i calculem els seus rangs:

- $A$  té un menor d'ordre 3 no nul:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0,$$

Per tant,  $rgA = 3$  (recordem que  $rgA \leq 3$  perquè no hi pot haver menors d'ordre 4).

- $|M| = 0$ , ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(que és l'únic menor d'ordre 4 de  $M$ ). Per tant,  $rgM = 3$ .

- Com que  $rgA = rgM = 3$ , aleshores el sistema és compatible determinat (teorema de Rouché-Frobenius)

Per tant, per ara sabem que el sistema té una solució i que aquesta és única, però encara no sabem com calcular-la. El pas següent és reduir el nombre d'equacions del sistema: el nostre sistema té tres incògnites i quatre equacions. Per tant, de qualque manera, *sobra* una equació. Per saber quina sobra, trobarem quines equacions són (linealment) independents unes de les altres. Ara bé, hem vist que el menor

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

era diferent de zero. Aquest menor correspon a les fileres 2a, 3a i 4a. Això vol dir que les equacions 2a, 3a i 4a són independents unes de les altres (tres línies són linealment independents si el seu determinant no és zero). O sigui, la primera equació és redundant (és combinació lineal de les altres).

Aleshores, a partir d'ara les úniques equacions que es tendran en compte seran la segona, la tercera i la quarta. El nostre sistema és ara:

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 3y = 0 \\ y + z = -1 \\ 3x - 2z = -1 \end{array} \right\}$$

Ara el nostre sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer ( $\Delta \neq 0$  i hi ha tantes equacions com a incògnites). Aleshores, aplicant aquesta regla es té que la seva solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{3}{-17} = \frac{-3}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{4}{-17} = \frac{-4}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{13}{-17} = \frac{-13}{17}$$

Per tant, l'única solució del sistema és:

$$x = \frac{-3}{17}, \quad y = \frac{-4}{17}, \quad z = \frac{-13}{17}$$

Exercici 38. Resoleu el sistema següent:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = -1 \\ -x + 3y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{array} \right\}$$

### 3.7.2 Sistema compatible indeterminat

Exemple 35. Sigui el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 6x + y - 3z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ 10x - y - z = -1 \end{array} \right\}$$

La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, hem de calcular  $rgA$  i  $rgM$  per a saber de quin tipus de sistema es tracta:

- En primer lloc, calculem el determinant d' $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant,  $rgA < 3$ . I com que

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \neq 0,$$

aleshores  $rgA = 2$ .

- Per a calcular  $rgM$ , mirem si existeixen menors d'ordre tres no nuls. Ja sabem que  $|A| = 0$ . Per tant, ens queden tres menors d'ordre tres a calcular:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, el  $rgM$  no pot ser 3. I com que  $rgA \leq rgM$ , tenim que  $rgM = 2$ .

- Amb tot, el sistema és compatible indeterminat, ja que  $rgA = rgM = 2 < \text{nombre d'incògnites del sistema}$ . Per tant, té infinites solucions.

El menor que ha decidit el rang d'ambdues matrius ha estat

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Per tant, aquest és el menor que indica quines són les *les equacions i incògnites principals* del sistema. Aquest menor correspon a les fileres 1a i 2a i a les columnes 1a i 3a. Per les que les úniques equacions que es tendran en compte a partir d'ara seran la primera i la segona. D'altra banda, aïllarem a l'esquerra del símbol =, les incògnites  $x$  i  $z$  (que són la primera i la tercera), i es passaran a la dreta de l'igual els termes de la incògnita  $y$ . Aleshores, el nostre sistema és ara:

$$\left. \begin{array}{l} 6x - 3z = 1 - y \\ 2x + z = -1 + y \end{array} \right\}$$

Les incògnites  $x$  i  $z$  depenen d'una tercera incògnita,  $y$ , que pot tenir el valor que es vulgui. És a dir,  $y$  és un paràmetre. Per a fer constar aquest fet i no confondre una incògnita amb un paràmetre, es fa el canvi de variable  $y = \lambda$ , on  $\lambda$  és un nombre real qualsevol. Amb tot el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 6x - 3z = 1 - \lambda \\ 2x + z = -1 + \lambda \end{array} \right\}$$

Ara volem resoldre aquest sistema que té incògnites  $x$  i  $z$ . Aquest sistema compleix les condicions de la regla de Cràmer (té tantes equacions com a incògnites i el determinant de la matriu de coeficients és no nul, ja que aquest és  $\Delta$ ). Aplicant la regla de Cràmer, s'obté que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ -1 + \lambda & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-2 + 2\lambda}{12} = \frac{2(-1 + \lambda)}{2 \cdot 6} = \frac{-1 + \lambda}{6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 - \lambda \\ 2 & -1 + \lambda \end{vmatrix}}{12} = \frac{-8 + 8\lambda}{12} = \frac{4(-2 + 2\lambda)}{4 \cdot 3} = \frac{-2 + 2\lambda}{3}$$

Per tant, les solucions del sistema d'equacions són:

$$x = \frac{-1 + \lambda}{6}, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{-2 + 2\lambda}{3},$$

on  $\lambda \in \mathbb{R}$  és un nombre qualsevol.

**Exercici 39.** Resoleu el sistema següent:

$$\left. \begin{array}{l} x - 5y + 2z = -3 \\ -5x - y = 2 \\ -4x - 6y + 2z = -1 \end{array} \right\}$$

## 3.7.3 Sistemes d'equacions amb un paràmetre

La solució, en cas d'existir, d'un sistema d'equacions lineals en el que apareix un paràmetre dependrà del valor d'aquest paràmetre. Vegem-ne un exemple.

Exemple 36. Sigui el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} \alpha x + y + z &= 4 \\ x + y + z &= \alpha \\ x - y + \alpha z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Aquest sistema depèn del paràmetre  $\alpha$ . L'existència de solucions i quines siguin aquestes solucions, en cas d'existir, dependrà, doncs, del valor d' $\alpha$ .

La matriu de coeficients i la matriu ampliada són, respectivament:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, hem de classificar el sistema. Per tant, hem de calcular  $rgA$  i  $rgM$ . Però, com que ambdues matrius depenen d' $\alpha$ , aquests rangs també dependran d'aquest paràmetre. D'aquesta manera, hem d'estudiar els rangs de  $A$  i  $M$  en funció d' $\alpha$ .

Comencem, per exemple, amb la matriu de coeficients. Prenem el menor més gran possible:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$$

Aquest menor valdrà zero si, i només si,

$$\alpha^2 - 1 = 0 \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm 1$$

Per tant, hem de considerar diverses possibilitats:

- a) Si  $\alpha \neq \pm 1$ , aleshores  $|A| \neq 0$ . Per tant, existeix un menor d'ordre 3 no nul. El que implica que,  $rgA = 3$ . I aleshores  $rgM = 3$ . Per tant, el sistema és compatible determinat. I a més es compleixen les condicions de la regla de Cramer. Per tant,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha + 4}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 4)(-\alpha - 1)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{4 - \alpha}{\alpha - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^3 - 7\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 3)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha + 3)}{\alpha + 1}$$



$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha - 10}{\alpha^2 - 1} = \frac{(\alpha - 2)(\alpha + 5)}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}$$

Per tant, per a cada possible valor de  $\alpha$ , tenim una única solució.

b) Si  $\alpha = 1$ , aleshores les matrius  $A$  i  $M$  són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esbrinem el rang de  $M$ . Per això, calculem tots els seus menors d'ordre 4, excepte  $|A|$  que ja hem calculat. Ara bé, no importa calcular-los tots<sup>2</sup>, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Per tant, tenim que  $rgM = 3$ . Ara bé,  $rgA \neq 3$ . Per tant, el sistema és incompatible. I per tant, no té solució.

c) Si  $\alpha = -1$ , aleshores les matrius de coeficients i ampliada són iguals a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabem que  $rgA \neq 3$ . D'altra banda,  $rgM = 3$ , ja que el menor següent és no nul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Per tant, de nou, el sistema és incompatible.

### 3.8 Exercicis proposats

Exercici 40. Apliqueu la regla de Cràmer per resoldre els sistemes següents:

$$a) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

<sup>2</sup>Els altres dos menors donen 0 i 6.

$$c) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ -5x - 4y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ y - z = 4 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Exercici 41. Classifiqueu els sistemes d'equacions següents:

$$a) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 5x + z = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Exercici 42. Discutiu els sistemes següents segons els valors del paràmetre  $m$ :

$$a) \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} mx + y + z = m \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$$

Exercici 43. Resoleu, si es pot, els sistemes següents:

$$a) \begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 5x - y + 4z = 3 \\ -3x + 3y - 5z = -2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 6x - 4y + 7z = 11 \\ -x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 2y + 5z = 1 \\ x - y + 3z = -4 \\ 3x - 4y + z = -6 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 3y + 8z = 2 \\ x + 3y - z = 8 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + 5y + 7z = 1 \\ -x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

Exercici 44. Resoleu els sistemes compatibles de l'exercici 41.

Exercici 45. Resoleu aquests sistemes compatibles indeterminats:

$$a) \begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ x + 3y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - 6y + 3z = 18 \\ x - 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 2y + 6z = 12 \\ x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ 2x - y = 5 \\ 5x + z = 20 \end{cases}$$

Exercici 46. Discutiu i resoleu els sistemes següents en funció del paràmetre corresponent:

$$a) \begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x - az = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercici 47. Hi ha algun valor de  $a$  per al qual el sistema tengui infinites solucions?

$$\left. \begin{aligned} (a + 1)x + 2y + z &= a + 3 \\ ax + y &= a \\ ax + 3y + z &= a + 2 \end{aligned} \right\}$$

### 3.8.1 Problemes de sistemes d'equacions

Exercici 48. En una fàbrica es produeixen cotxes blancs, negres i vermells. Fabriquen 140 cotxes diaris. El nombre de cotxes negres representa  $3/5$  del nombre de cotxes blancs, i el nombre de cotxes vermells és  $1/4$  del nombre de cotxes negres. Quants cotxes de cada color es fabriquen cada dia?

Exercici 49. Els diners que porten en Pere, en Joan i n'Àngel sumen 200€. N'Àngel porta la mateixa quantitat de diners que en Pere i en Joan junts, i en Pere porta  $3/2$  dels diners que porta en Joan. Quants diners porta cadascú?

Exercici 50. La Mariona va tres diumenges seguits a la pastisseria. El primer diumenge compra tres pastissos de moniato, dos de nata i un de xocolata, i es gasta 15,75 €. El segon diumenge compra dos pastissos de moniato, un de nata i un de xocolata, i es gasta 10 €. El tercer dia compra un pastisset de cada tipus i es gasta 7,5 €. Quin és el preu de cada pastisset?

Exercici 51. En una caixa hi ha pomes, peres i plàtans. En total sumen 12 peces de fruita. El triple del nombre de pomes és igual a la suma del nombre

de peres i plàtans i el doble del nombre de peres és igual a la suma del nombre de pomes i plàtans. Trobeu el nombre de pomes, peres, i plàtans.

Exercici 52. Dos amics inverteixen 20000 € cadascun. El primer col·loca una quantitat  $A$  al 4% d'interès, una quantitat  $B$  al 5% i la resta al 6%. L'altre inverteix la mateixa quantitat  $A$  al 5%, la quantitat  $B$  al 6% i la resta al 4%. Determineu les quantitats  $A$ ,  $B$  i  $C$  si el primer obté uns interessos de 1050 € i el segon de 950 €

Exercici 53. Una botiga ha venut 600 exemplars d'un article per un total de 6384€. El preu original era de 12 €, però també han venut còpies defectuoses amb descomptes del 30% i del 40%. També sabem que el nombre de còpies defectuoses venudes va ser la meitat del de còpies en bon estat. Amb aquestes informacions, calculeu el nombre de còpies que es varen vendre amb el preu original, amb el 30% de descompte i amb el descompte del 40%.

Exercici 54. Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 €, i un total de 2000€. Si el nombre de bitllets de 10€ és el doble que el nombre de bitllets de 20€, calculeu quants de bitllets hi ha de cada tipus.

Exercici 55. La suma de les tres xifres d'un nombre és 7. La xifra de les centenes és igual a la suma de la xifra de les desenes més el doble de la xifra de les unitats. D'altra banda, si s'inverteix l'ordre de la xifres, el nombre original disminueix en 297 unitats. Calculeu les xifres del nombre inicial

Exercici 56. Es vol fer un *clúster* d'ordinadors a partir de tres models diferents:  $A$ ,  $B$  i  $C$ , els quals tenen 8 nuclis, 4 nuclis i 2 nuclis en el processador, respectivament. El clúster ha de tenir 100 ordinadors i ha de comptar amb 500 nuclis de processament. Finalment es decideix que el sistema en conjunt consumeixi 2600W/h. En aquest sentit, sabem que els ordinadors del model  $A$  consumeixen 50W/h, els del model  $B$ , 15W/h i els del model  $C$  5W/h. Quants d'ordinadors de cada tipus han d'escollir per a fabricar el clúster especificat?





Exercici 57. En el mercat es poden trobar tres classes d'aliments preparats per cans, els quals contenen les quantitats següents de proteïnes, lípids i glúcids per quilogram de producte: 600g de proteïnes, 300g de lípids i 100g de glúcids; 200g de proteïnes, 600g de lípids i 200g de glúcids; i 300g de proteïnes, 400g de lípids i 300g de glúcids. Si volem oferir al nostre ca 470 grams de proteïnes, 370 grams de lípids i 160 grams de glúcids per a cada quilogram d'aliment, quin percentatge dels productes anteriors hem de mesclar per obtenir la proporció que desitjam?

Exercici 58. Certa bàscula només pesa quantitats superiors a 100 quilograms. Tres amics volen determinar els seus pesos, que són tots menors que 100kg. Per fer-ho decideixen pesar-se conjuntament per torns: tots tres plegats pesen 200kg; el primer amic més el segon amic pesen 120kg; i el segon i tercer amics més un ca que passava per allà pesen 140kg (els amics saben que el ca pesava 10 quilograms). Determineu què pesa cada amic.

**Exercici 59.** Un país decideix crear una organització educativa formada per càrrecs polítics; docents d'infantil, primària i secundària; i catedràtics d'universitat. Sabem, que l'organització ha de tenir 700 membres i, per assegurar la independència política, el nombre de càrrecs polítics ha de ser un sisè de la suma de docents i catedràtics. D'altra banda, per raons tècniques, el nombre de catedràtics d'universitat i polítics han de sumar la meitat dels membres totals de l'organització. Determineu quants membres de cada tipus ha de tenir l'organització.

**Exercici 60.** En un sistema ecològic es sap que hi ha depredadors i dues classes de preses  $A$  i  $B$ . Per a què el sistema funciona de forma òptima, el nombre de depredadors ha de ser la meitat de la suma de les preses. Les preses del tipus  $A$  ha de ser igual inferior a 200 individus al doble de les preses del tipus  $B$ . Per últim, sabem que en total hi ha d'haver 1500 animals. Calculeu quants de tipus d'animals hi ha d'haver per assolir l'òptim d'aquest sistema.

**Exercici 61.** Un dipòsit s'omple mitjançant dues aixetes  $A$  i  $B$  i es buida obrint una aixeta  $C$ . Quan s'obrin només  $A$  i  $B$ , el dipòsit tarda 3 hores en omplir-se; quan s'obrin les tres aixetes, en tarda 4 hores; i quan s'obrin  $A$  i  $C$ , llavors tarda 5 hores. Quan tardaria a omplir-se el dipòsit si només s'obris  $A$ ? I si només s'obris  $B$ ? I si s'obrissin  $B$  i  $C$ ? Una vegada ple, quan de temps tardaria a buidar-se si només s'obris  $C$ ?

**Exercici 62.** Un pintor només diposa a la seva paleta de colors de tres colors diferents: ultramarí , salmó  i beix . Vol mesclar-los de manera que obtengui un altre color, que ha anomenat cambrià .

El color ultramarí conté  $\frac{0}{255}$  parts de color vermell,  $\frac{32}{255}$  parts de color verd i  $\frac{96}{255}$  parts de color blau; el color salmó conté  $\frac{250}{255}$  parts de color vermell,  $\frac{128}{255}$  parts de color verd i  $\frac{114}{255}$  parts de color blau; i el color beix conté  $\frac{245}{255}$  parts de color vermell,  $\frac{245}{255}$  parts de color verd i  $\frac{220}{255}$  parts de color blau<sup>3</sup>.

Quin tant per cent de cada color ha de mesclar per obtenir el color cambrià, que té  $\frac{51}{255}$  parts de vermell,  $\frac{173}{255}$  de color verd i  $\frac{76}{255}$  de color blau?

**Exercici 63.** En una biblioteca hi ha 500 llibres de poesia, 300 llibres de novel·la i 200 llibres d'assaig. Per tant, els llibres de poesia suposen un  $\frac{1}{2}$  del total, els de novel·la suposen  $\frac{3}{10}$  i els d'assaig,  $\frac{1}{5}$ . Es volen adquirir 2000 llibres nous de manera que les proporcions dels llibres de poesia i assaig s'inverteixin després de la compra, és a dir, els llibres de poesia suposin un cinquè del total de llibres, i els llibres d'assaig suposin un mig del total de la col·lecció de llibres. Quants llibres de cada tipus s'han d'adquirir?

<sup>3</sup>En termes informàtics, això s'anomena codi RGB

### 3.9 Solucions

- 43 a)  $(0, 1, 1)$  b)  $(1, 2, -1)$  c)  $(5, 1, 0)$  d)  $(1/2, -1/4, 1)$  e) compatible indeterminat  $(\lambda/2, 3\lambda/2, \lambda)$ , amb  $\lambda \in \mathbb{R}$  f) incompatible
- 48 80 cotxes blancs, 48 cotxes negres i 12 cotxes vermells
- 49 En Pere té 60 €, en Joan en té 40 i n'Àngel, 100.
- 50 Un pastisset de moniato costa 2,5 €, el de nata, 3,25 € i el de xocolata, 1,75 €.
- 51 Hi ha 3 pomes, 4 peres i 5 plàtans.
- 52 Inverteixen 5.000€, 5.000 € i 10.000€.
- 56 Han d'escollir 40 ordinadors del model *A*, i 30 dels models *B* i *C*.
- 58 Els amics pesen 70, 50 i 80 quilograms respectivament.
- 59 Els càrrecs polítics són 100, el nombre de docents són 350 i el nombre de catedràtics universitaris són 250.
- 63 Han d'adquirir 100 llibres de poesia, 600 de novel·la i 1300 d'assaig.

Part II

Geometria





## 4

# Geometria del pla

En aquest tema s'estudiaran els vectors i les rectes definits sobre un espai de dues dimensions.

### 4.1 Punts

Aquest apartat tracta de l'estudi dels vectors i de les seves operacions a l'espai de dues dimensions. Aquest espai queda representat per uns *eixos de coordenades*, que són dues rectes reglades entre les quals hi ha un angle recte (Figura 4.1):

- L'eix horitzontal s'anomena *eix de les abscises* (o simplement *eix de les X*) i s'anomena amb la lletra  $X$
- L'eix vertical s'anomena *eix de les ordenades* (o simplement *eix de les Y*) i s'anomena amb la lletra  $Y$

En conjunt, els eixos formen el que s'anomena *Pla cartesià*.

Cada punt del pla queda determinat per les seves projeccions sobre cadascun dels eixos, el que s'anomenen *coordenades* (Figura 4.2).

L'*origen de coordenades* és el punt de coordenades  $(0, 0)$ .

A partir d'aquest moment identificarem un punt amb les seves coordenades.

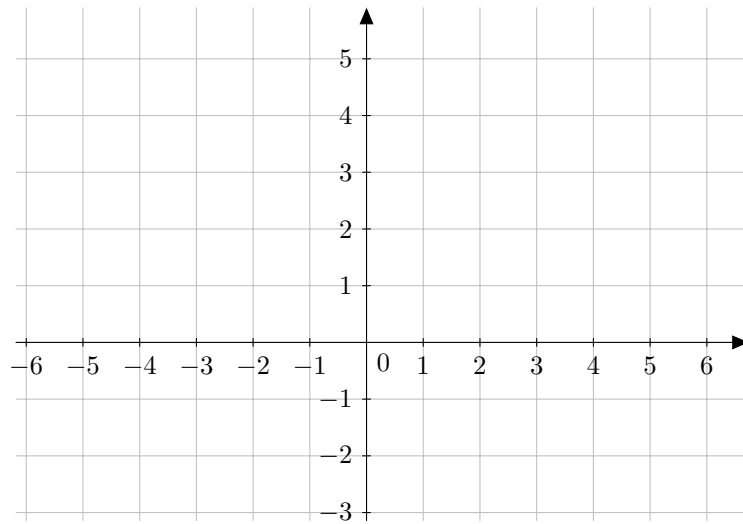


Figura 4.1: Pla cartesià

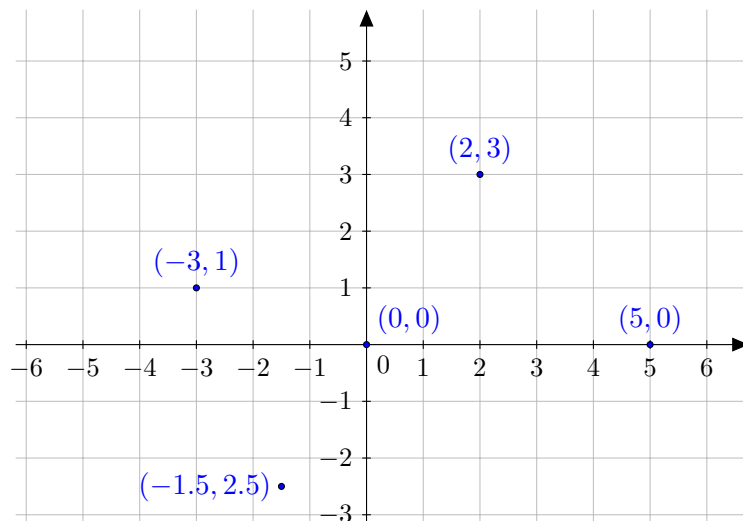


Figura 4.2: Diversos punts al pla cartesià

**Notació 1 (notació dels punts).** Els punts es poden escriure de dues maneres diferents:  $A = (0, 1)$  o bé  $A(0, 1)$ .

#### 4.1.1 Punt mitjà

Donats dos punts del pla,  $P(x_1, y_1)$  i  $Q(x_2, y_2)$ , que determinen un segment, podem preguntar-nos quines són les coordenades del punt mitjà d'aquest segment. Aquest punt queda determinant per la següent expressió:

$$P_M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Exemple 37. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinant pels punts  $P(0, -5)$  i  $Q(-3, 1)$ .

$$P_M = \left( \frac{0 + (-3)}{2}, \frac{-5 + 1}{2} \right) = \left( \frac{-3}{2}, -2 \right)$$

Exercici 64. Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinant pels punts  $P(-3, 7)$  i  $Q(-5, 3)$ .

Exercici 65. Donat el punt  $P(0, -5)$ , calculeu les coordenades del punt simètric de  $P$  respecte del punt  $M(-1, 12)$ .

Hem de notar que, encara que pareixi que sí, aquest resultat no es pot estendre quan es vol trobar un punt que estigui a distància  $1/3$  d' $A$  en el segment  $\overline{AB}$  (en general, a distància  $d \neq 1/2$ ). En aquest cas, s'haurà de procedir a raonar amb vectors (Secció 4.2), per exemple trobant el vector  $1/3 \cdot \overrightarrow{AB}$  i situant-lo amb origen  $A$ . El seu extrem final seria el punt desitjat.

## 4.2 Vectors

**Definició 25 (vector fix).** Un *vector fix* és una segment orientat a l'espai (és a dir una fletxa), que té un *origen* (el punt on comença) i un *final* (punt on acaba). Els dos punts s'anomenen *extrems del vector*.

Per tant, un vector té:

- Una direcció: la recta sobre la qual està el vector
- Un sentit: cap a on apunta la fletxa. Si  $A$  i  $B$  són els extrems d'un vector, aleshores aquest vector pot tenir dos sentits: de  $A$  cap a  $B$  (punt origen és  $A$  i el punt destí és  $B$ ) o de  $B$  cap a  $A$  (punt origen és  $B$  i el punt destí és  $A$ )
- La seva longitud. Formalment s'anomena *mòdul* del vector

**Notació 2 (notació de vectors).** Els vectors es denoten amb una fletxa a damunt del seu nom. D'aquesta manera escriurem  $\overrightarrow{AB}$  per denotar el vector que té origen  $A$  i final a  $B$ . Si volem obviar els extrems, podem escriure  $\vec{u}$ , per exemple.

Exemple 38. Siguin els vectors següents (Figura 4.3):

- Els extrems dels vectors són:
  - El vector  $\vec{a}$  té origen  $(-1, 1)$  i fi  $(-3, -1)$
  - El vector  $\vec{b}$  té origen  $(-1, -1)$  i fi  $(0, 0)$

- El vector  $\vec{c}$  té origen  $(-4, 3)$  i fi  $(-1, 3)$
  - El vector  $\vec{d}$  té origen  $(-4, 2)$  i fi  $(-4, -1)$
  - El vector  $\vec{u}$  té origen  $(1, 1)$  i fi  $(3, 3)$
  - El vector  $\vec{v}$  té origen  $(4, 1)$  i fi  $(6, 3)$
  - El vector  $\vec{w}$  té origen  $(1, -1)$  i fi  $(3, 1)$
- Els vectors  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  tenen la mateixa direcció
  - Els vectors  $\vec{b}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  tenen el mateix sentit, però el vector  $\vec{a}$  té sentit contrari
  - Els vectors  $\vec{a}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  tenen el mateix mòdul. El mòdul de  $\vec{b}$  és la meitat que el mòdul de  $\vec{u}$ . I  $\vec{c}$  i  $\vec{d}$  tenen el mateix mòdul (encara que no tinguin ni la mateixa direcció ni sentit)

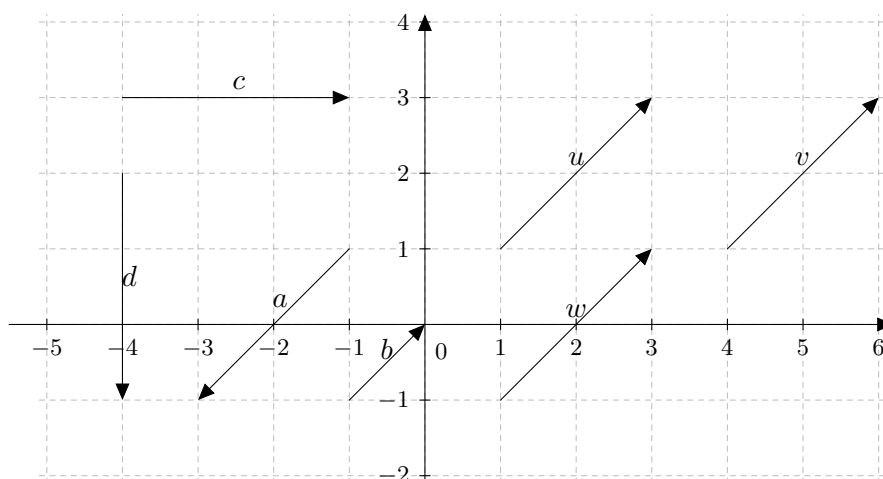


Figura 4.3: Diversos vectors al pla

**Definició 26 (vector lliure).** Un *vector lliure* és un segment orientat al pla, però del qual tenim la llibertat de triar el seu origen. És a dir, vector que tenen la mateixa direcció, sentit i longitud són a partir d'ara iguals per a nosaltres, independentment d'on estiguin situats. Formalment aquests vectors s'anomenen *equipolents*

En general, si no se'ns diu el contrari, o no se'ns dona l'origen d'un vector, es suposarà que aquest és lliure. A més sempre suposarem que l'origen del vector és l'origen de coordenades i, per tant, escriurem el vector com a  $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 5)}$  i no  $\vec{v} = \overrightarrow{(0, 0)(3, 5)}$ , obviant el seu origen.

A més, de la mateixa manera que pels punts, existeixen dues notacions estàndard:  $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 5)}$  o bé  $\vec{v}(3, 5)$ , que podem usar indistintament.

Exemple 39. Els vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  són equipolents (Figura 4.3). És més, tots aquests vectors es consideren el mateix vector que  $\vec{(2, 2)}$ .

**Definició 27 (coordenades i components d'un vector).** Donat un vector  $\vec{v}$ , les seves *coordenades* són els nombres que formen el seu producte cartesià, és a dir, si  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ , aleshores,  $v_x$  i  $v_y$  són les seves coordenades.  $v_x$  es diu *coordenada de l'eix de les abscises* i  $v_y$ , *coordenada de l'eix de les ordenades*, o simplement coordenada de l'eix  $X$  i coordenada de l'eix  $Y$ , respectivament.

Les coordenades es poden interpretar com a les longituds, amb signe, de les projeccions d'un vector sobre els dos eixos de coordenades. Cadascuna de les dues components d'un vector pot ser positiva o negativa segons que la respectiva projecció apunti cap a la part positiva o negativa del corresponent eix de coordenades (figura Figura 4.4). En aquest sentit les coordenades s'anomenen *components*.

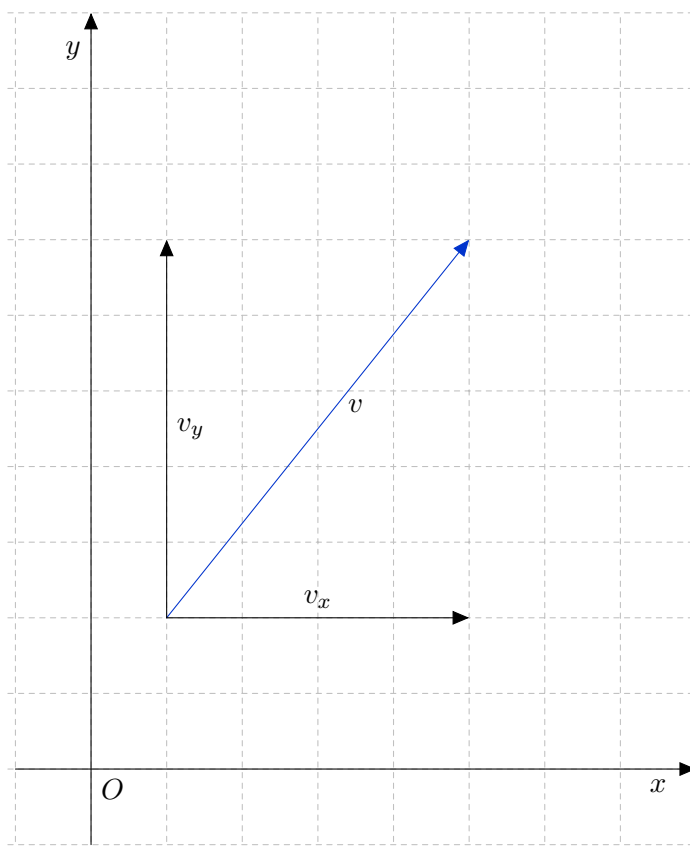


Figura 4.4: Components d'un vector

Exemple 40. Siguin els vectors següents:

$$\vec{u} = (3, -2), \vec{v} = (-5, 1)$$

El vector  $\vec{v}$  apunta cap a la dreta i cap a baix, i el vector  $\vec{u}$  apunta cap a l'esquerra i cap a dalt. Com que no se'ns diu quins són els seus orígens, es considerarà que aquests vectors són lliures, i que, per tant, podem situar-los els on es desitgi.

**Exercici 66.** Representeu gràficament els vectors  $\vec{u} = (-3, 4)$ ,  $\vec{v} = (5, -1)$  i  $\vec{w} = (1, 0)$ .

**Observació 5 (vector d'extrems donats).** Donats els punts  $P(x_1, y_1)$  i  $Q(x_2, y_2)$ , el vector  $\overrightarrow{PQ}$  que té origen en  $P$  i final en  $Q$  té les components següents:

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

és a dir, restem les coordenades del punt final menys les coordenades del punt inicial.

**Exemple 41.** Calculeu les components del vector que comença en el punt  $P(0, -6)$  i acaba en el punt  $Q(-3, 2)$ :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(-3 - 0, 2 - (-6))} = \overrightarrow{(-3, 8)}$$

**Exercici 67.** Calculeu les components del vector d'origen  $P(-2, 1)$  i que acaba en el punt  $Q(-3, -5)$ .

**Exercici 68.** Els punts  $A(3, 0)$ ,  $B(-5, 4)$  i  $C(6, -4)$  són vèrtexos d'un paral·lelogram. Representeu gràficament aquests punts i calculeu les coordenades de vèrtex restant.

**Definició 28 (mòdul d'un vector).** El *mòdul* d'un vector és la seva longitud. El mòdul del vector  $\vec{u} = (a, b)$ , que es representa per  $|\vec{u}|$ , es calcula amb la fórmula:

$$|\vec{u}| = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Exemple 42.** El mòdul del vector  $\vec{u} = \overrightarrow{(3, -2)}$  és:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

**Exercici 69.** Calculeu el valor del mòdul del vector  $\vec{u}(-5, 1)$ .

Acabem amb unes quantes definicions:

**Definició 29 (vector unitari).** Un vector és *unitari* quan té mòdul 1.

**Definició 30 (ortogonalitat, ortonormalitat).** Donats dos vectors  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , direm que  $\vec{u}$  és *ortogonal* a  $\vec{v}$  simplement quan  $\vec{u}$  sigui perpendicular a  $\vec{v}$ , és a dir, quan ambdós formen un angle de 90 graus.

Si a més,  $\vec{u}$  és unitari, aleshores direm que  $\vec{u}$  és *ortonormal* a  $\vec{v}$ .

#### 4.2.1 Operacions amb vectors

Definim aquí les diferents operacions que es poden fer amb vectors.

### 4.2.1.1 Suma de dos vectors

**Definició 31 (suma de dos vectors).** . Siguin  $\vec{u}(a, b)$  i  $\vec{v}(c, d)$  dos vectors. La seva *suma* es defineix com:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a + c, b + d)}$$

**Exemple 43.** Donats els vectors  $\vec{u}(3, -2)$  i  $\vec{v}(-5, 1)$ , la seva suma és:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{(3, -2)} + \overrightarrow{(-5, 1)} = \overrightarrow{(3 - 5, -2 + 1)} = \overrightarrow{(-2, -1)}$$

Noteu que, per a què es puguin sumar dos vectors aquests han de tenir el mateix origen o bé ser lliures. En aquest cas, la suma de dos vectors es pot calcular gràficament: en el dibuix següent es representa la suma gràfica de  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  (Figura 4.5):

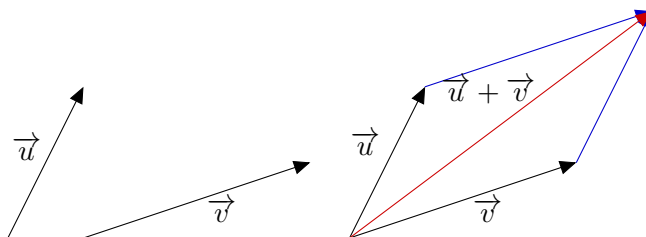


Figura 4.5: Regla del paral·lelogram per al càlcul de la suma de vectors

Es pot procedir de manera anàloga per a qualssevol vectors. Aquesta manera gràfica d'aconseguir la suma es coneix com *regla del paral·lelogram*.

**Exercici 70.** Calculeu gràficament i analíticament la suma dels vectors  $\vec{u}(-5, 4)$  i  $\vec{v}(3, -1)$ .

### 4.2.1.2 Diferència de dos vectors

**Definició 32 (diferència de dos vectors).** Donats dos vectors  $\vec{u}(a, b)$  i  $\vec{v}(c, d)$ , la seva *diferència* es defineix com:

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{(a, b)} - \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$$

**Exemple 44.** Donats els vectors  $\vec{u}(3, -2)$  i  $\vec{v}(-5, 1)$ , la seva diferència és:

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{(3, -2)} - \overrightarrow{(-5, 1)} = \overrightarrow{(3 + 5, -2 - 1)} = \overrightarrow{(8, -3)}$$

**Exercici 71.** Calculeu  $\vec{u} - \vec{v}$  i  $\vec{v} - \vec{u}$ , amb  $\vec{u}(-5, 4)$  i  $\vec{v}(3, -1)$ .

### 4.2.1.3 Producte d'un escalar per un vector

**Definició 33 (producte d'un escalar per un vector).** Donat un nombre  $k \in \mathbb{R}$  i un vector  $\vec{u}(a, b)$ , *el producte de  $k$  per  $\vec{u}$* ,  $k \cdot \vec{u}$ , es defineix com:

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot \overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$$

**Exemple 45.** Donats el vector  $\vec{u}(3, -2)$  i el número  $k = -5$ , es té que el seu producte és:

$$k \cdot \vec{u} = -5 \cdot \overrightarrow{(3, -2)} = \overrightarrow{(-5 \cdot 3, -5 \cdot (-2))} = \overrightarrow{(-15, 10)}$$

En el dibuix següent es veu un exemple gràfic del producte d'un nombre (en aquest cas el 3) per un vector (Figura 4.6):

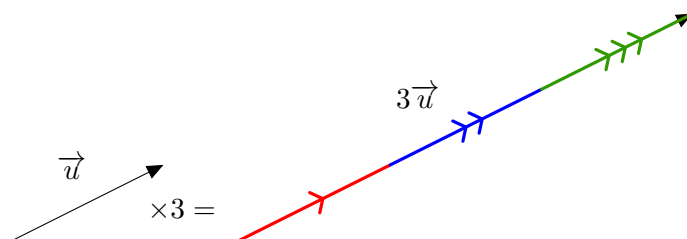


Figura 4.6: Exemple d'un producte d'un escalar per un vector

**Exercici 72.** Calculeu gràficament i analíticament el producte  $-3 \cdot \vec{u}$ , amb  $\vec{u}(3, -1)$ .

**Observació 6.** L'operació del producte d'un escalar per un vector dóna sempre un vector paral·lel al vector inicial. És més, el vector resultant és una allargament (si  $k > 1$ ) o una escurçament (si  $k < 1$ ) del vector original.

**Proposició 6 (Condicció de paral·lelisme entre dos vectors).** Siguin  $\vec{u}(a, b)$  i  $\vec{v}(c, d)$  dos vectors qualssevol amb  $a, b \neq 0$ :

$$\vec{u} \text{ és paral·lel a } \vec{v} \iff \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

Expressat en paraules, això ens diu que si dos vectors són paral·lels, aleshores el quocient entre les seves respectives components dóna el mateix resultat, i viceversa, és a dir, que si el quocient entre les respectives components de dos vectors dóna el mateix resultat, aleshores aquests dos vectors són paral·lels.

**Nota 2.** Si alguns dels vectors anteriors té alguna component igual a zero, l'altre vector per ser-hi proporcional ha de tenir la mateixa component igual



a zero. Per exemple  $\vec{u} = \overrightarrow{(5,0)}$  és proporcional a  $\vec{v} = \overrightarrow{(-7,0)}$  (perquè  $-\frac{7}{5} \cdot \vec{u} = \vec{v}$ ) però no ho és a  $\vec{w}_1 = \overrightarrow{(0,3)}$  ni a  $\vec{w}_2 = \overrightarrow{(5,3)}$ .

**Exemple 46.** Determineu, a cadascun dels apartats següents, si els vectors són paral·lels entre si:

a)  $\vec{a} (2, -3)$  i  $\vec{b} (4, -6)$ :

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$$

Per tant, aquests dos vectors són paral·lels entre si.

b)  $\vec{c} (2, -1)$  i  $\vec{d} (4, -3)$ :

$$\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{-3}$$

Així, aquests dos vectors no són paral·lels entre si.

**Exercici 73.** Determineu si els vectors següents són paral·lels entre si:

a)  $\vec{a} (1, -3)$  i  $\vec{b} (5, -6)$

b)  $\vec{c} (3, -1)$  i  $\vec{d} (-6, 2)$

c)  $\vec{e} (3, 0)$  i  $\vec{f} (5, 0)$

### Producte escalar de dos vectors

**Definició 34 (producte escalar de dos vectors).** El *producte escalar de dos vectors*,  $\vec{u}(a, b)$  i  $\vec{v}(c, d)$ , que es denota per  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , es defineix de la manera següent:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (c, d) = a \cdot c + b \cdot d \quad (4.1)$$

Com es veu, el producte escalar de dos vectors és un nombre.

**Exemple 47.** El producte escalar dels vectors  $\vec{u}(2, 0)$  i  $\vec{v}(-3, 1)$  és igual a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 0) \cdot (-3, 1) = 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = -6$$

**Exercici 74.** Calculeu  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , amb  $\vec{u}(-3, 4)$  i  $\vec{v}(-2, -8)$ .

**Exercici 75.** Per a quins valors de  $\lambda$  el producte escalar  $\overrightarrow{(3, -4)} \cdot \overrightarrow{(\lambda, 2)}$  serà 5?

**Exercici 76.** Sigui  $\vec{u}(2, -3)$ . Trobeu un vector paral·lel i dieu-li  $\vec{v}$ . Calculeu el producte  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

### Angle entre dos vectors

**Proposició 7** (Relació entre producte escalar i angle entre dos vectors). *Es pot provar que es compleix que la relació:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha, \quad (4.2)$$

on  $\alpha$  és l'angle que formen entre si els vectors  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ .

Això permet calcular l'angle  $\alpha$  entre dos vectors, o qualsevol altre variable desconeguda d'aquesta fórmula (4.2) si es coneixen les altres. Recordeu que el producte escalar es pot calcular amb seva fórmula (4.1). Per tant, l'equació anterior és equivalent a:

$$ac + bd = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \cos \alpha \quad (4.3)$$

**Observació 7.** Recordeu que el cosinus d'un angle es defineix com la projecció del radi definit per l'angle sobre el diàmetre horitzontal de la circumferència de radi unitat.

Els valors del cosinus dels angles més usuals es mostren a continuació (taula [Taula 4.1](#)):

	0 rad	$\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad	$\pi/3$ rad	$\pi/2$ rad	$\pi$ rad	$3\pi/2$ rad
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
cos $\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0

Taula 4.1: Valors dels cosinus pels angles més usuals

Encara que es pot calcular el cosinus d'un angle arbitrari amb la calculadora científica.

**Exemple 48.** Què val l'angle format pels vectors  $\vec{u}(2, 0)$  i  $\vec{v}(-3, 1)$ ?

Si aplicam la darrera fórmula i denotam l'angle per  $\alpha$ , es té que

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 &= \sqrt{2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \cos \alpha \\ -6 &= 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{-6}{2\sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \alpha &= \arccos \frac{-3}{\sqrt{10}} \simeq 161,565^\circ \end{aligned}$$

**Exercici 77.** Calculeu l'angle que formen entre si els vectors  $\vec{u}(-2, -5)$  i  $\vec{v}(-3, 2)$ .

Vegem a continuació les propietats del producte escalar.

**Teorema 8** (Propietats del producte escalar). *Donats vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  i un nombre  $k$  qualssevol, el producte escalar té les propietats següents:*

- a)  $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ . És a dir, el mòdul d'un vector es pot calcular amb l'arrel quadrada del producte escalar per si mateix.
- b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  ( propietat conmutativa )
- c)  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$  ( propietat associativa )
- d)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  ( propietat distributiva )
- e) **Condició de perpendicularitat entre dos vectors:** si el producte escalar de dos vectors és 0, aleshores aquests dos vectors són perpendiculars entre si, i viceversa, és a dir, que si dos vectors són perpendiculars entre si, aleshores el seu producte escalar és 0. Matemàticament,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

**Exemple 49.** Per exemple, els vectors  $\vec{u}$  (30, -9) i  $\vec{v}$  (3, 10) són perpendiculars, ja que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 30 \cdot 3 + (-9) \cdot 10 = 0$ .

**Exercici 78.** En cada cas, calculeu  $x$  per a què els vectors  $\vec{u}$  (8, -15) i  $\vec{v}$  (2,  $x$ ) siguin:

- a) paral·lels,
- b) perpendiculars,

**Exercici 79.** Donat el vector  $\vec{u}$  (5, 12), trobeu:

- a) un vector paral·lel,
- b) un vector perpendicular.

### 4.3 La recta en el pla

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de dues dimensions.

Una recta, en particular, és una col·lecció de punts. Per tant, un objectiu principal serà trobar les coordenades de tots els seus punts. La manera més senzilla de trobar-la és usar vectors.

Donada una recta  $r$ , sempre podem obtenir un punt qualsevol  $P$  i un vector  $v$  sobre aquesta — per exemple, si sabéssim dos punts  $A$  i  $B$  sobre la recta, aleshores tendríem un punt,  $A$  o  $B$ , i un vector amb aquestes condicions,  $A - B$  o qualsevol múltiple seu. Per tant, per a qualsevol punt  $X$  sobre la recta, aquest forma el vector  $\overrightarrow{OX}$ , que té com a origen l'origen de coordenades i com a destí  $X$ . Aquest vector es pot posar com a suma del vector  $OP$  i un múltiple del vector  $v$  (figura [Figura 4.7](#)), és a dir, existeix un nombre  $\lambda$  tal que:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v}. \quad (4.4)$$

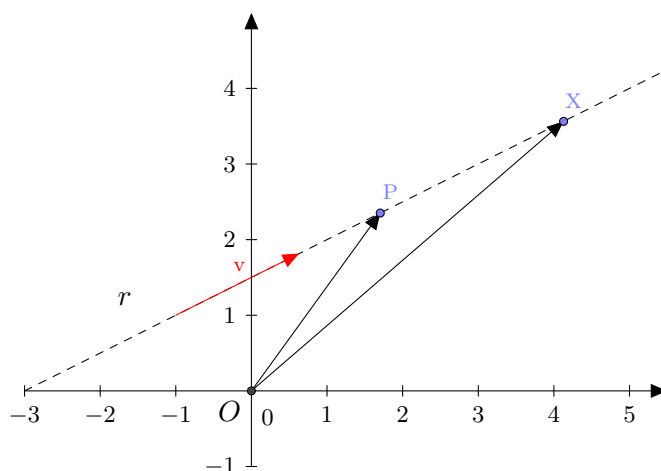


Figura 4.7: Visualització de l'equació vectorial d'una recta

Aquesta equació (4.4) s'anomena *equació vectorial de la recta* i al vector  $v$  se li diu *vector director* de  $r$ .

**Observació 8.** Noteu que realment no fa falta que el vector director  $v$  estigui sobre la recta. Basta qualsevol que tengui la mateixa direcció, ja que suposem que feim feina amb vectors lliures. En aquest sentit parlarem de *el* vector director de la recta  $r$  i no d'*un* vector director, per a qualsevol d'aquests vectors, ja que els haurem identificat.

**Exemple 50.** Trobeu l'equació vectorial de la recta que passa pels punts  $A(2, 3)$  i  $B(4, 5)$ .

Hem de prendre un punt de la recta i un vector director. Ja tenim el punt: podem prendre  $A$  o  $B$ . Agafarem  $A(2, 3)$ .

Per trobar el vector director, calcularem  $\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 5 - 3) = (2, 2)$ .

Per tant, l'equació vectorial de la recta en qüestió és:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{(2, 2)}$$

Si denotem  $X = (x, y)$  les coordenades del punt  $X$ , tenim que aquesta equació es transforma en:

$$\overrightarrow{(x, y)} = \overrightarrow{(2, 3)} + \lambda \overrightarrow{(2, 2)}.$$

**Observació 9.** A part d'aquesta equació, n'hi ha d'altres però totes provenen d'aquesta. L'ús d'una o de l'altra dependrà de l'exercici concret que volguem resoldre i de la nostra comoditat.

### 4.3.1 Equació paramètrica de la recta

Sigui  $r$  una recta donada pel punt  $P(x_1, y_1)$  i el vector director  $\vec{v}_r(v_x, v_y)$ , aleshores l'equació vectorial de la recta  $r$  ve donada per

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v},$$

on  $X(x, y)$  és un punt qualsevol de la recta. Si desenvolupem aquesta equació obtenim que

$$\overrightarrow{(x, y)} = \overrightarrow{(x_1, y_1)} + \lambda \cdot \overrightarrow{(v_x, v_y)},$$

és a dir,

$$\overrightarrow{(x, y)} = \overrightarrow{(x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)}.$$

Dos vectors són iguals si, i només si, les seves components són iguals. Per tant,  $(x, y) = (x_1 + \lambda \cdot v_x, y_1 + \lambda v_y)$ , és a dir, s'han de complir simultàniament les equacions següents:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot v_x, \\ y = y_1 + \lambda \cdot v_y. \end{cases}$$

Hem obtingut l'*equació paramètrica*. L'equació paramètrica d'una recta dóna les coordenades de tots els punts d'una recta depenent d'un paràmetre  $\lambda$  (d'aquí el seu nom). Per a cada valor de  $\lambda$  obtenim un punt de la recta.

Recapitulant, si  $r$  és una recta que passa pel punt  $P(x_1, y_1)$  i té com a vector director  $\vec{v}_r(v_x, v_y)$ , aleshores l'equació paramètrica de  $r$  ve donada per:

$$r : \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_x \\ y = y_1 + \lambda v_y \end{cases}, \quad (4.5)$$

amb  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 51.** Si una recta passa pel punt  $(0, -1)$  i el seu vector director és  $\vec{v}(-3, 2)$ , aleshores la seva equació paramètrica és la següent:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 + \lambda(-3) \\ y = -1 + \lambda \cdot 2 \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array} \right\}$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir  $\lambda$  per un nombre qualsevol a les expressions anteriors.

**Exemple 52.** Si a la recta anterior feim  $\lambda = 2$ , tenim que

$$\left. \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \end{array} \right\},$$

i, per tant, que  $(-6, 3)$  és un altre punt de la recta.

**Exercici 80.** Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per  $A(-3, 0)$  i segueix la direcció  $\vec{v}(5, -1)$ . Trobeu tres punts més d'aquesta recta.

**Observació 10.** Per saber si un punt pertany a una recta donada, només hem de veure si aquest punt verifica les equacions de la recta. Per exemple, si volem saber si  $P = (5, 3)$  pertany o no a la recta de l'exemple 51, només hem de substituir a les equacions:

$$\begin{cases} 5 = -3\lambda \\ 3 = -1 + 2\lambda \end{cases},$$

i hem de resoldre aquest sistema. Si aquest sistema té solució, és a dir, existeix  $\lambda$ , aleshores  $P$  pertanyrà a la recta; sinó, no ho farà. En el nostre cas,  $\lambda = -5/3$  de la primera equació i  $\lambda = 2$  de la segona. Per tant,  $P$  no és de la recta.

Aquest fet també ens servirà per a les altres equacions de la recta.

#### 4.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllem  $\lambda$  a cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (4.5), obtenim

$$\lambda = \frac{x - x_1}{v_x}, \quad \lambda = \frac{y - y_1}{v_y}.$$

Si ara igualam les dues equacions, s'obté *l'equació contínua de la recta*

$$r : \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}, \quad (4.6)$$

on  $P(x_1, y_1)$  és qualsevol punt de la recta i  $\vec{v}_r(v_x, v_y)$  és el vector director de la recta.

**Exemple 53.** Seguint amb la recta de l'exemple anterior, exemple 51, la seva equació contínua és:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y + 1}{2}$$

**Observació 11.** Notem que si alguna component del vector director  $\vec{v}_r$  és zero, aleshores no existeix la fracció corresponent a l'equació (4.6) (no es pot dividir per zero). Ara bé, en aquest cas es veu l'equació (4.6) com a *notació*.

Per exemple, la recta que passa pel punt  $(2, 3)$  i té com a vector director  $(5, 0)$ , té com a equació contínua:

$$\frac{x - 2}{5} = \frac{y - 3}{0}$$

#### 4.3.3 Equació general de la recta

Si a les equacions de la recta en forma contínua llevam els denominadors i ho transposam tot al primer membre, l'equació de la recta s'escriu de la manera següent:

$$Ax + By + C = 0, \quad (4.7)$$

amb  $A$ ,  $B$  i  $C$  nombres reals. Aquesta equació rep el nom d'*equació general de la recta* o *equació implícita de la recta*.

**Exemple 54.** Seguint amb la recta anterior, [exemple 51](#), la seva equació general és:

$$r \equiv 2x = -3(y + 1),$$

que simplificada és:

$$r \equiv 2x + 3y + 3 = 0.$$

**Observació 12.** Notem que, si a l'exemple anterior, feim  $x = \lambda$ , llavors

$$y = (-3 - 2x)/3 = -1 + 2/3\lambda,$$

per la qual cosa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \cdot \lambda.$$

Això implica que  $r$  passa pel punt  $(0, -1)$  i té com a vector director  $\overrightarrow{(1, -2/3)}$ . Noteu que aquest darrer vector director és equivalent a  $(-3, 2)$  (aquest darrer és el primer multiplicat per 3), el qual és el que teníem a l'exemple [exemple 51](#).

**Exercici 81.** Trobeu les equacions contínua i general de la recta que passa per  $P(2, -5)$  i segueix la direcció del vector director  $\vec{v}(-2, 7)$ .

**Exercici 82.** Donada la recta d'equació  $5x - y + 6 = 0$ , trobeu les coordenades de dos dels seus punts. A partir d'aquests, calculeu el seu vector director.

#### 4.3.3.1 Vector director a partir de l'equació general

**Proposició 9.** Donada una recta en forma general, és a dir,  $Ax + By + C = 0$ , el seu vector director és  $\vec{v} = (-B, A)$ .

*Demostració.* Una recta genèrica  $r$  que passa pel punt  $P(x_1, y_1)$  i que té com a vector director  $\vec{v}_r(v_x, v_y)$  té l'equació contínua

$$r \equiv \frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

Per tant,  $v_y \cdot (x - x_1) = v_x \cdot (y - y_1)$ . Aleshores,  $v_y x - v_x y + (-v_y x_1 + v_x y_1) = 0$ . Per la qual cosa,  $A = v_y$ ,  $B = -v_x$  i  $C = -v_y x_1 + v_x y_1$ . Per tant, el vector director és  $(v_x, v_y) = (-B, A)$ . ■

**Proposició 10.** Donada una recta  $r \equiv Ax + By + C = 0$  en forma implícita, tenim que el vector  $(A, B)$  és perpendicular a la recta.

*Demostració.* El vector  $(A, B)$  és perpendicular al vector  $(-B, A)$  — ja que el seu producte escalar és 0. Per tant, el vector  $(A, B)$  és un vector perpendicular a la recta d'equació  $Ax + By + D = 0$ . ■

**Exemple 55.** El vector director de la recta  $5x - 2y + 1 = 0$  és  $\vec{v} = (2, 5)$ .

Exercici 83. Calculeu el vector director de les rectes següents:

a)  $4x - 3y + 1 = 0$

b)  $-y + 5 = 0$

Exercici 84. Donada la recta  $x - 5y + 8 = 0$ , trobeu:

a) l'equació de la recta paral·lela que passa pel punt  $(2, -7)$ ,

b) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt  $(2, -7)$ .

**Observació 13.** La [proposició 9](#), serveix per a passar de l'equació general a l'equació contínua o bé a l'equació paramètrica: directament es pot obtenir el seu vector director  $v_r$ . I després substituint  $x$  o  $y$ , podem trobar un punt seu.

**Exemple 56.** Obteniu l'equació contínua de la recta  $s$  que té equació general  $s \equiv 5x - 9y - 2 = 0$ .

Per la [proposició 9](#), tenim que el vector director de  $s$  és  $v_s = (9, 5)$ .

D'altra banda, trobarem un punt de  $s$ . Prendre'm  $x = 0$ , per exemple, amb el que obtenim  $y = -2/9$ . Per tant  $(0, -2/9) \in s$ .

Amb tot, tenim que l'equació contínua de  $s$  serà:

$$s \equiv \frac{x}{9} = \frac{y + \frac{2}{9}}{5}$$

Exercici 85. Donada la recta  $r \equiv 2x - 9y + 5 = 0$ , trobeu les equacions contínua, paramètrica i vectorial.

**Exemple 57.** Trobeu el punt de tall de les rectes  $r \equiv 2x - 5y + 10 = 0$  i  $s \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{8}$ .

Diem  $P(a, b)$  al punt de tall de  $r$  i  $s$ . Si  $P \in r \cap s$ , aleshores  $P$  verifica les equacions de  $r$  i  $s$  simultàniament. Per tant, s'ha de verificar el sistema:

$$\begin{cases} 2a - 5b + 10 = 0 \\ \frac{a-2}{5} = \frac{b-3}{8} \end{cases}$$

Aplicant el mètode de reducció (multiplicant la segona equació per 40), tenim que

$$\begin{cases} 2a - 5b = -10 \\ 8a - 5b = 1 \end{cases}$$

Per tant,  $a = 3/2$  i  $b = 13/5$ . Llavors el punt de tall és  $P(\frac{3}{2}, \frac{13}{5})$ .

Noteu que no sempre dues rectes tendran punt de tall: quan aquestes siguin paral·leles, aleshores no existiran punts de tall. En aquest cas, el sistema no tendria solució. Vegeu l'apartat referent a la posició relativa de dues rectes ([Subsecció 4.3.7](#)).



Exercici 86. Donades les rectes  $r \equiv 5x - 2y + 8 = 0$  i  $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{5}$ , trobeu:

- a) dues rectes paral·leles a  $r$
- b) dues rectes paral·leles a  $s$
- c) una recta perpendicular a  $s$  que passi per  $(10, 10)$
- d) una recta perpendicular a  $r$  que passi per  $(0, 0)$
- e) el punt de tall de  $r$  i  $s$
- f) el punt de tall de  $r$  i la recta perpendicular a  $s$  que passa per  $(5, 20)$

#### 4.3.4 Equació explícita de la recta

Si de l'equació general d'una recta (4.7) aïllem la  $y$  ens queda una equació de la forma:

$$y = mx + b, \quad (4.8)$$

amb  $m$  i  $b$  nombres reals. Aquesta equació es coneix amb el nom de *equació explícita de la recta*. S'anomena *pendent* al coeficient  $m$  i *ordenada a l'origen* al nombre  $b$ . La interpretació gràfica d'aquests dos paràmetres és la següent:

- La pendent de la recta és la inclinació d'aquesta:
  - Si  $m > 0$ , aleshores la recta és *creixent* (quan els valors de  $x$  creixen, els valors de  $y$  creixen)
  - Si  $m < 0$ , aleshores la recta és *decreixent* (quan les valors de  $x$  creixen, els valors de  $y$  decreixen)
  - Si  $m = 0$ , aleshores la recta és *constant*. Té una forma completament horitzontal.

D'altra banda, quan  $|m|$  és major, la inclinació de la recta és major en el sentit que és més vertical. Per exemple,  $y = 3x + 2$  tindrà més inclinació que  $y = x + 2$ , i  $y = -5x + 10$  tindrà més inclinació que  $y = -2x + 10$ .

- L'ordenada a l'origen  $b$  és el valor que de l'eix de les  $Y$  quan  $x = 0$ . És a dir, l'ordenada a l'origen ens diu en quin punt talla la recta a l'eix  $OY$ . En altres paraules,  $(0, b)$  és el punt de tall de la recta amb l'eix  $OY$ .

Exemple 58. Representeu gràficament la recta  $r \equiv y = -2x + 3$  i trobeu els seus punts de tall amb els eixos.

Sabem que  $r$  és decreixent perquè  $-2 < 0$ . I que passa per  $(0, 3)$ . Per representar-la només ens fa falta un altre punt (una recta ve determinada

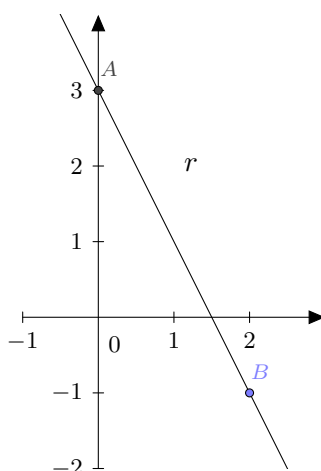


Figura 4.8: Visualització de l'equació explícita d'una recta

per dos punts). Substituïm, per exemple, per  $x = 2$ :  $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$ . Per tant,  $(2, -1) \in r$ . Aleshores,  $r$  té la representació següent (Figura 4.8):

Només fa falta trobar el punt de tall amb l'eix de les abscises. En aquest cas,  $y = 0$ . Per tant,  $0 = -2x + 3$ , el que implica que  $x = 3/2$ . Per tant, el punt  $(\frac{3}{2}, 0)$  és el punt de la recta que està sobre l'eix  $OX$ .

#### 4.3.4.1 Càlcul de la pendent mitjançant dos punts

Donats dos punts  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$ , per calcular la pendent de la recta  $r: y = mx + b$  que els conté, podem substituir ambdós punts a l'equació de la recta i trobar  $m$  i  $b$ . O bé, podem emprar la fórmula següent per a calcular la pendent de  $r$ :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

i després substituir un dels punts a l'equació de la recta per a trobar  $b$ .

**Exemple 59.** Trobeu l'equació explícita de la recta  $r$  que passa pels punts  $A(2, 3)$  i  $B(10, 15)$ .

Sigui  $r: y = mx + n$  l'equació explícita de la recta  $r$ . Hem de determinar  $m$  i  $n$ . Facem-ho de dues maneres:

- Substituïnt els dos punts a l'equació explícita.

Com que  $A$  i  $B$  són punts de la recta  $r$ , verifiquen la seva equació. Per tant,

$$\begin{cases} 3 = m \cdot 2 + n \\ 15 = m \cdot 10 + n \end{cases}$$

Si resollem aquest sistema per  $m$  i  $n$ , obtenim  $m = 3/2$  i  $n = 0$ .

- Emprant la fórmula de la pendent

Podem calcular la pendent amb la fórmula:

$$m = \frac{15 - 3}{10 - 2} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Per tant,  $r: y = \frac{3}{2}x + n$ . Prenem un punt qualsevol de la recta, per exemple  $A$ , i substituïm-lo a aquesta equació:  $3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + n$ . D'aquí tenim que  $n = 0$ .

#### 4.3.4.2 Pendants de rectes paral·leles i perpendiculars

Existeix una relació entre les pendants de rectes paral·leles o perpendiculars:

**Proposició 11** (relació entre les pendants de rectes paral·leles o perpendiculars). *Siguin  $r: y = m_r x + n_r$  i  $s: y = m_s x + n_s$  dues rectes en el pla. Aleshores:*

- $r \parallel s \iff r, s$  tenen la mateixa pendent  $\iff m_r = m_s$
- $r \perp s \iff m_r = -\frac{1}{m_s}$

Aquest teorema no es podrà generalitzar a la geometria a l'espai.

**Exemple 60.** Si el pendent d'una recta donada val  $-5$ , la pendent de qualsevol recta paral·lela val també  $-5$ , i la de qualsevol recta perpendicular val  $1/5$ .

**Exercici 87.** Donada la recta  $x + 5y - 3 = 0$ , calculeu la seva pendent, la de una recta paral·lela i la de una recta perpendicular.

#### 4.3.5 Equació de la recta determinada per dos punts

**Proposició 12** (equació de la recta determinada per dos punts donats). *Donats dos punts coneguts  $A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$ , si volem conèixer la recta que determinen, podem emprar la fórmula següent:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

que ens dóna l'equació contínua de la recta.

Amb aquesta proposició, ens evitam haver de cercar el vector director i plantejar una equació.

**Exemple 61.** L'equació de la recta que passa pels punts  $A(0, -2)$  i  $B(-4, 1)$  es la següent:

$$\frac{x}{-4} = \frac{y + 2}{3}$$

**Exercici 88.** Calculeu l'equació de la recta que passa pels punts  $A(3, -5)$  i  $B(-1, 7)$ .

### 4.3.6 Exemples de càlcul d'equacions de rectes

**Exemple 62.** Trobeu la recta que passa pels punts  $A(5, 9)$  i  $B(-10, 8)$ .

Ho farem de diverses maneres:

- Calculant el vector director i amb un punt:

El vector director pot ser  $\vec{v} = (-10 - 5, 8 - 9) = (-15, -1)$ . Qualsevol múltiple seu també és vector director de la recta. Per tant, triarem  $\vec{v}(15, 1)$  per evitar els signes.

D'aquí podem obtenir diverses equacions de la recta fàcilment:

– L'equació vectorial:  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{(5, 9)} + \lambda \cdot \overrightarrow{(15, 1)}$

– L'equació paramètrica:  $r: \begin{cases} x = 5 + 15\lambda \\ y = 9 + \lambda \end{cases}$

– L'equació contínua:  $r: \frac{x-5}{15} = y - 9$

- Trobant la pendent:

Amb la fórmula,  $m = \frac{8-9}{-10-5} = 1/15$ . Per tant  $r: y = 1/15x + n$ . Substituint, per exemple,  $A$  a l'equació de la recta, tenim que  $9 = 1/15 \cdot 5 + n$ . Pel que  $n = 26/3$ . Per tant,  $r: y = 1/15x + 26/3$ .

- A partir de la contínua o a partir de la explícita, podem trobar l'equació general<sup>1</sup>.

**Exemple 63.** Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt  $P(3, -2)$  i que té per vector director  $\vec{v}(1, -4)$ .

- L'equació paramètrica és:  $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - 4\lambda \end{cases}$

- L'equació contínua és  $r: x - 3 = \frac{y+2}{-4}$

- L'equació general és  $-4 \cdot (x - 3) = y + 2$ , és a dir,  $-4x - y + 10 = 0$

- Si aïllem la  $y$  tenim:  $y = -4x + 10$ . Aleshores, la pendent d'aquesta recta és  $-4$ .

### 4.3.7 Posició relativa entre dues rectes

**Proposició 13 (posició relativa entre dues rectes).** *Dues rectes al pla cartesià poden ser (vegi's Figura 4.9):*

- **secants**, és a dir, que es tallen a un punt

<sup>1</sup>No és recomanable fer-ho amb un sistema d'equacions substituïnt els punts.

- **paral·leles**. Per tant, no es tallen a cap punt.
- **coincidents**, és a dir, són la mateixa recta.

Cadascuna d'aquestes posicions s'anomenen la **posició relativa** entre les dues rectes.

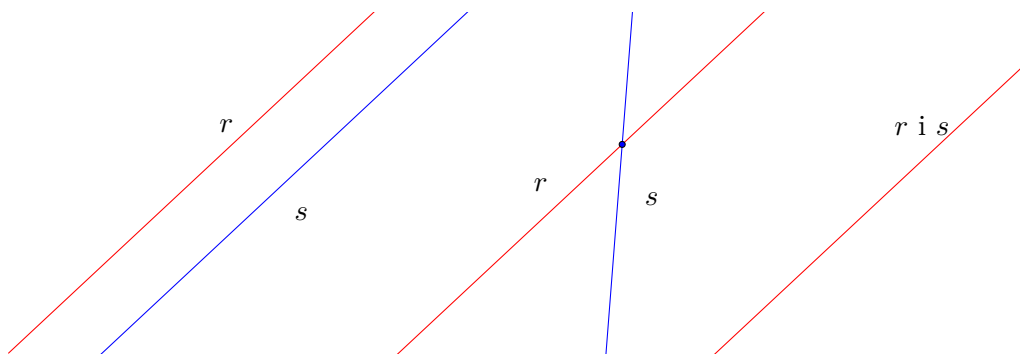


Figura 4.9: Les diferents posicions relatives possibles entre dues rectes

La proposició següent ens diu quan dues rectes són secants, paral·leles o coincidents.

**Proposició 14 (criteri de posició relativa).** Per a dues rectes  $r$  i  $s$  en el pla es compleix:

- Si  $r$  i  $s$  tenen diferent pendent, aleshores són secants
- Si  $r$  i  $s$  tenen la mateixa pendent, aleshores són paral·leles o coincidents. En aquest cas:
  - Si  $r$  i  $s$  tenen diferents ordenades a l'origen, llavors són paral·leles
  - Si  $r$  i  $s$  tenen la mateixa ordenada a l'origen, llavors són coincidents

Aquest criteri usant vectors directores és el següent:

**Proposició 15 (criteri de posició relativa).** Per a dues rectes  $r$  i  $s$  en el pla es compleix:

- Si  $r$  i  $s$  no tenen vectors directores proporcionals, aleshores són secants
- Si  $r$  i  $s$  tenen vectors directores proporcionals<sup>2</sup>, aleshores són paral·leles o coincidents. En aquest cas, si  $r$  i  $s$  passen per un punt en comú, aleshores són coincidents. Altrament, són paral·leles

<sup>2</sup>Hem de notar aquí que si dues rectes tenen vectors directores que són proporcionals, sempre podem prendre el mateix vector director a les dues rectes. Per exemple  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4}$  té com a vector director  $(2, 4)$  i  $s: \frac{x-5}{1} = \frac{y-8}{2}$  té com a vector director  $(1, 2)$ , els quals són proporcionals. Per tant, podríem prendre com a equació contínua de la recta  $r$  l'equació  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}$ .

Exercici 89. Calculeu la posició relativa de les rectes:

a)  $r: y = 2x - 5$  i  $s: y = 3x + 4$

b)  $r: 2x + 5y - 4 = 0$  i  $s: \begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = -3 + 7k \end{cases}$

c)  $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2}$  i  $s: x - 2y + 5 = 0$

#### 4.3.7.1 Càlcul dels punts de tall

Fins ara hem vist quina és la posició relativa entre dues rectes. Això vol dir que podem saber si dues rectes es tallen però *encara* no sabem com trobar el seu punt de tall.

Per a trobar el punt de tall entre dues rectes, només hem de notar que si  $P$  pertany a les dues rectes, aleshores ha de complir ambdues equacions. D'aquesta manera obtindrem un sistema d'equacions de dues incògnites i dues equacions, que podem resoldre fàcilment per reducció, igualació o substitució.

**Exemple 64.** Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes  $r: x - 3y + 1 = 0$  i  $s: -4x + 7y = 0$ .

Hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ -4x + 7y = 0 \end{cases}$$

Si aplicam el mètode de substitució, aïllant la  $x$  de la primera equació:  $x = 3y - 1$ , tenim que  $-4(3y - 1) + 7y = 0$ , és a dir,  $y = \frac{4}{5}$ . Per tant, si substituïm a la primera equació:  $x - 3 \cdot \frac{4}{5} + 1 = 0$ , és a dir,  $x = \frac{7}{5}$ .

Aleshores, el punt de tall entre ambdues rectes és el punt  $(\frac{7}{5}, \frac{4}{5})$ .

**Exercici 90.** Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes  $r: 2x - 3y + 1 = 0$  i  $s: -4x + 7y = 0$ .

**Exercici 91.** Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes

a)  $r: y = 2x + 4$  i  $s: y = 7x - 5$

b)  $r: y = 2x + 4$  i  $s: x - y - 5 = 0$

c)  $r: 2x - y - 2 = 0$  i  $s: \frac{x-1}{2} = \frac{x+5}{2}$

d)  $r: 2x - 5y - 4 = 0$  i  $s: x - y - 2 = 0$

e)  $r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$  i  $s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

f)  $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$  i  $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$

Exercici 92. Calculeu els punts de tall, si existeixen, entre les rectes  $r : 2x - 3y + 1 = 0$  i  $s : -4x + \alpha y = 0$  en funció del paràmetre  $\alpha$ .

Nota 3. En general, una manera senzilla de trobar els punts de tall de dues rectes és, en primer lloc, passar-les a l'equació explícita i resoldre el sistema per igualació.

En l'exemple anterior (exemple 64), tenim que les rectes  $r$  i  $s$  es transformen en:

$$\begin{cases} r: y = \frac{-1-x}{-3} \\ s: y = \frac{4x}{7} \end{cases}$$

Per tant, igualant les dues expressions:

$$\frac{-1-x}{-3} = \frac{4x}{7},$$

el que implica que  $-7 - 7x = -12x \Rightarrow x = 7/5$ . Substituint a qualsevol de les equacions anteriors i operant, obtenim que  $y = 4/5$ .

## 4.4 Exercicis proposats

### Punts i vectors

Exercici 93. Els punts  $A(3, -2)$ ,  $B(5, 0)$  i  $C(-1, -3)$  són vèrtexs d'un paral·lelogram. Calculeu la posició de l'altre vèrtex  $D$ . I trobeu el seu perímetre. Calculeu analíticament  $\overrightarrow{AD}$  i el seu mòdul.

Exercici 94. Donats els punts  $A(3, 1)$ ,  $B(-5, 1)$ ,  $C(-4, -2)$  i  $D(0, -3)$ , calculeu, analíticament, les components i el mòdul dels vectors:

$$\begin{array}{llll} a) \overrightarrow{AB} & c) \overrightarrow{BC} & e) \overrightarrow{CD} & g) \overrightarrow{BD} \\ b) \overrightarrow{BA} & d) \overrightarrow{CB} & f) \overrightarrow{AD} & h) \overrightarrow{CA} \end{array}$$

Exercici 95. Calculeu les coordenades de  $B$  si sabem que el vector  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(3, -4)}$  i  $A = (2, -5)$ ; trobeu les coordenades del punt  $C$  si sabem que  $D(-5, 2)$  i  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(-5, 1)}$ .

Exercici 96. Donats els punts  $A(3, 0)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(-2, 1)$  i  $D(7, 2)$ , esbrineu si els vectors següents són equipolents:

$$a) \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \qquad b) \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \qquad c) \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}$$

Exercici 97. Les coordenades del punt  $A$  són el doble de les del punt  $B$ . Sabent que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-2, 5)}$ , calculeu les coordenades dels punts  $A$  i  $B$ .

Exercici 98. Donats els vectors  $\vec{u} = \overrightarrow{(7, -4)}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{(-5, -2)}$  i  $\vec{w} = \overrightarrow{(-6, 0)}$ , calculeu:

- a)  $5\vec{u} - 2\vec{v}$                       c)  $-\vec{w} - 3(\vec{u} - \vec{v})$   
 b)  $3\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{w}$                       d)  $-3\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w}$

i calculeu-ne els seus mòduls.

**Exercici 99.** Trobeu quatre vectors paral·lels i tres perpendiculars al vector  $\vec{u}(-5, 4)$ . En podeu trobar d'unitaris?

**Exercici 100.** Calculeu l'angle que formen els vectors següents i extreus conclusions sobre la seva direcció i sentit:

- a)  $\vec{u}(5, 2)$  i  $\vec{v}(10, 4)$                       c)  $\vec{u}(3, 4)$  i  $\vec{v}(-50, 40)$   
 b)  $\vec{u}(-3, 15)$  i  $\vec{v}(2, -10)$                       d)  $\vec{u}(-3, 4)$  i  $\vec{v}(-2, 10)$

**Exercici 101.** Donats els punts  $A(2, 3)$  i  $B(-5, 4)$ , trobeu els punts que divideixen el segment  $AB$  en dues parts iguals, en tres parts iguals i en quatre parts iguals.

### Rectes

**Exercici 102.** Trobeu la recta determinada per:

- a) Els punts  $A(-2, -1)$  i  $B(2, 4)$   
 b) El punt  $P(1, -4)$  i el vector director  $\vec{v}(5, -3)$   
 c) El punt  $P(1, -2)$  i l'angle que forma amb l'eix  $OX$  és  $\alpha = 135^\circ$   
 d) El punt  $P(1, -1)$  i la pendent  $m = 2$   
 e) La pendent  $m = 2$  i l'ordenada a l'origen  $-5$

**Exercici 103.** Donada la recta  $r$  que passa pel punt  $P(-5, -3)$  i que té vector director  $\vec{v}(12, 8)$ :

- a) Trobeu les equacions vectorial i paramètrica de la recta  
 b) Trobeu tres punts que pertanyin a  $r$   
 c) Esbrineu si els punts  $(-11, -7)$  i  $(2, -1)$  pertanyen a la recta.

**Exercici 104.** Donada la recta  $s$  que passa pel punt  $P(4, -3)$  i que té vector director  $\vec{v}(2, -7)$ :

- a) Trobeu l'equació contínua de la recta  
 b) Trobeu tres punts que pertanyin a  $s$   
 c) Esbrineu si els punts  $(8, -7)$  i  $(0, 11)$  pertanyen a la recta.



Exercici 105. Donada la recta  $s$  que passa pel punt  $P(-2, 3)$  i que té vector director  $\vec{v}(-1, 4)$ :

- Trobeu l'equació general de la recta
- Trobeu tres punts que pertanyin a  $s$
- Esbrineu si els punts  $(-5, 15)$  i  $(4, 3)$  pertanyen a la recta.

Exercici 106. Trobeu l'equació general de la recta que passa pels punts  $A(2, 3)$  i  $B(-3, -2)$ .

Exercici 107. Trobeu l'equació explícita de la recta que:

- passa pel punt  $A(-3, -1)$  i té pendent  $m = -2$
- passa pels punts  $A(-4, -2)$  i  $B(-3, -1)$
- passa pel punt  $A(-5, 2)$  i té ordenada a l'origen  $-4$ .

Exercici 108. Trobeu un punt i el vector director de cadascuna d'aquestes rectes:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\overrightarrow{(x, y)} = \overrightarrow{(-10, -4)} + k\overrightarrow{(-9, 7)}$ | g) $x + 3y + 1 = 0$                                     |
| b) $\frac{x-15}{-1} = \frac{y+2}{6}$  | h) $y = -\frac{3}{2}x - 2$                              |
| c) $2x - 5y + 3 = 0$  | i) $\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 11 + k \end{cases}$ |
| d) $y = -5x + 10$   | j) $\frac{-x-5}{-1} = \frac{4y+4}{8}$                   |
| e) $\begin{cases} x = 2 - 8k \\ y = 3 + 6k \end{cases}$                               | k) $-2x - y - 12 = 0$                                   |
| f) $x - 5 = \frac{y+4}{12}$   | l) $y = x + 4$  |

Exercici 109. Indiqueu si els punts següents estan alinets:

- $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 1)$  i  $C(8, 5)$
- $D(-1, 2)$ ,  $E(0, 0)$  i  $F(2, -2)$

En cas negatiu, obteniu-ne un que hi estigui.

Exercici 110. Esbrineu la posició relativa de les rectes següents:

- |  |   |
|--|---|
| a) $r: 6x - 15y + 1 = 0$ i $s: -10x + 25y + 1 = 0$ | c) $r: y = 2x + 3$ i $s: y = 2x + 1$  |
| b) $r: 2x - 10y + 8 = 0$ i $s: x + 5y + 4 = 0$     | d) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$ i $s: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{-12}$ |
|  | e) $r: 2x + 6y + 4 = 0$ i $s: -3x -$  |

$$9y - 6 = 0$$

$$f) r: y = x + 1 \text{ i } s: y = -x + 1$$

$$g) r: y = 3x + \frac{1}{2} \text{ i } s: 6x - 2y + 1 = 0$$

$$h) r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4} \text{ i } s: \begin{cases} x = -10 - k \\ y = 2 + k \end{cases}$$

$$i) r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4} \text{ i } s: 2x - y + 5 = 0$$

Exercici 111. Trobeu el punt d'intersecció de les rectes secants de l'exercici anterior.

Exercici 112. Trobeu la recta paral·lela a la recta  $r$  que passa pel punt  $P$  en els casos següents:

$$a) r: 4x - 5y + 3 = 0, P(-3, 5) \quad c) r: y = -5x + 3, P(-1, 1)$$

$$b) r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3}, P(4, -10)$$

Exercici 113. Indiqueu si els parells de rectes següents són perpendiculars:

$$a) r: x - 5y + 1 = 0, s: 10x + 2y - 3 = 0$$

$$b) r: y = 2x + 4, s: y = -\frac{1}{2}x + 8$$

$$c) r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}, s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-1}$$

$$d) r: x + y + 4 = 0, s: -x - y - 1 = 0$$

$$e) r: y = x + 1, s: y = -x - 2$$

$$f) r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{7}, s: 7x + 3y + 5 = 0$$

Exercici 114. Trobeu l'equació de la recta perpendicular a la recta  $r$  que passa pel punt  $P$ :

$$a) r: 4x - 5y + 3 = 0, P(-3, 5) \quad c) r: y = -5x + 3, P(-1, 1)$$

$$b) r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3}, P(4, -10) \quad d) r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -2 - 6\lambda \end{cases}, P(1, 1)$$

Exercici 115. Calculeu el valor de  $a$  per a què les rectes  $r \equiv x + ay + 4 = 0$  i  $s \equiv 3x + 4y - 1 = 0$ :

a) Siguin paral·leles

c) Formin un angle de 180 graus

b) Siguin perpendiculars

d) Formin un angle de 60 graus

Exercici 116. Calculeu l'angle que formen les rectes següents:

- a)  $r: x - y + 1 = 0$ ,  $s: 7x + 2y - 3 = 0$
- b)  $r: y = -3x + 4$ ,  $s: y = -x + 1$
- c)  $r: 2x + y + 4 = 0$ ,  $s: -3x + 2y - 1 = 0$
- d)  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3}$ ,  $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2}$

Exercici 117. Donada la recta  $r: 2x - 3y + 1 = 0$ , calculeu:

- a) el seu vector director i un vector perpendicular,
- b) l'equació de la recta que passa pel punt  $A(3, -5)$  i que és perpendicular a la recta  $r$ ,
- c) el punt simètric del punt  $A$  respecte de la recta  $r$ .

Exercici 118. Calculeu la pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes següents:

- a)  $x + 3y = 4$
- b)  $4y + 5 = -x$
- c)  $2x - 7y = 0$
- d)  $-8y = 8$

Exercici 119. Calculeu les equacions de la recta que passa pels punts  $A(-1, 0)$  i  $B(-4, -1)$ . Calculeu el seu vector director i altres dos punts més de la recta.

Exercici 120. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pel punt  $A(3, -5)$  i que segueix la direcció  $\vec{v}(-1, 7)$ . Calculeu la seva pendent.

Exercici 121. Calculeu totes les equacions de la recta que passa pels punts  $A(2, 3)$  i  $B(-5, 1)$ .

Exercici 122. Donada la recta  $y = 2x + 8$ , calculeu:

- a) el seu vector director,
- b) l'equació de la recta paral·lela que passa pel punt  $(0, -8)$ ,
- c) un vector perpendicular a la recta,
- d) l'equació de la recta perpendicular que passa pel punt  $(0, -8)$ .

Exercici 123. Calculeu els punts de tall dels parells de rectes següents:

- a)  $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$  i  $s: 3x - 5y + 2 = 0$
- b)  $r: y = 6x - 10$  i  $s: 9x - 3y + 27 = 0$

$$c) r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases} \text{ i } s: y = -x + 2$$

$$d) r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases} \text{ i } s: \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \end{cases}$$

$$e) r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} \text{ i } s: \frac{x}{10} = \frac{y+8}{-1}$$

$$f) r: 3x - 2y + 6 = 0 \text{ i } s: -8x + 7y + 2 = 0$$

$$g) r: y = 4x - 2 \text{ i } s: y = 10x - 8$$

$$h) r: y = 4x - 2 \text{ i } s: y = 4x - 10$$

$$i) r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases} \text{ i } s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{3}$$

$$j) r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases} \text{ i } s: 10x - 2y + 3 = 0$$

$$k) r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+10}{-2} \text{ i } s: y = 10x - 12$$

## 5

# Geometria de l'espai

### 5.1 Sistema de coordenades espacials

De forma anàloga al pla cartesià, a l'espai tridimensional tenim tres eixos de coordenades,  $x$ ,  $y$  i  $z$ , els quals són perpendiculars i parteixen d'un punt, anomenat *origen de coordenades*. La forma més usual de representar aquests eixos dibuixant l'eix  $x$  en la direcció dreta-esquerra, l'eix  $y$  en la direcció davant-darrera i l'eix  $z$  en la direcció dalt-baix (Figura 5.1)

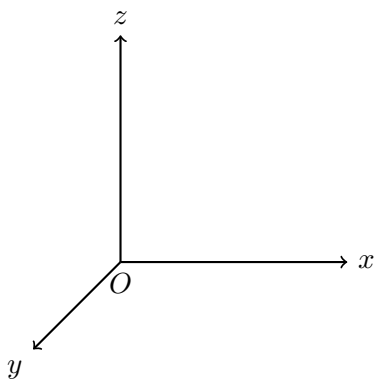


Figura 5.1: Representació usual del sistema de coordenades cartesianes

En aquest sistema de coordenades, un punt qualsevol  $P$  ve localitzat per les projeccions als eixos de coordenades. De la mateixa manera que el cas bidimensional, direm que  $P$  té *coordenades*  $(x, y, z)$  i el podem denotar com  $P(x, y, z)$ . Per exemple, el punt de coordenades  $(1, 2, 3)$  correspon al punt  $A$  de la figura següent (Figura 5.2).

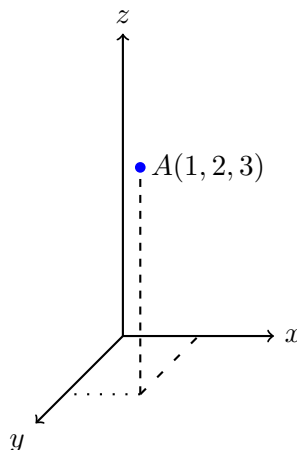


Figura 5.2: Representació del punt  $A(1, 2, 3)$

**Exercici 124.** Representeu gràficament en els eixos de coordenades els punts  $A(3, -2, 4)$  i  $B(5, 0, -2)$ .

## 5.2 Vectors

Les definicions relatives a vectors que hem estudiat a l'apartat de Geometria del pla (vector fix, vector lliure, extrems d'un vector, etc.; vegi's [Capítol 4](#)) poden adaptar-se fàcilment a l'espai només afegint una altra coordenada als vectors. A l'igual que al pla, suposarem que tots els vectors són lliures.

**Exemple 65.** Són vectors el següents:

$$\vec{B}(3, -2, 6), \vec{C}(-5, 1, -8)$$

Amb la convenció d'eixos del dibuix anterior (Figura 5.1), el vector  $\vec{B}$  apunta cap a la dreta, s'allunya del lector, i cap a dalt, i el vector  $\vec{C}$  apunta cap a l'esquerra, cap al lector, i cap a baix. Com que no se'ns diu quins són els seus orígens, es consider que aquests vectors són lliures i que, per tant, els seus punts d'origen es poden situar on es desitgi.

### 5.2.1 Base estàndard de vectors

**Definició 35 (base estàndard de vectors).** A l'espai cartesià, existeixen tres vectors que formen el que s'anomena *base estàndard de vectors* la qual està formada per tres vectors  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ , que tenen les coordenades següents:

$$\vec{i} = \overrightarrow{(1, 0, 0)}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{(0, 1, 0)}, \quad \vec{k} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$$

Aquests vectors són unitaris, ortogonals (perpendiculars entre si) i formen un base: qualsevol vector es pot posar com a combinació lineal de  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ <sup>1</sup>. És a dir, si  $\vec{v}$  és un vector, aleshores existeixen nombres  $a$ ,  $b$  i  $c$  de manera que  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . Per les definicions de  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  és clar que aquests  $a$ ,  $b$  i  $c$  són els valors de les coordenades de  $v$ .

**Exemple 66.** El vector  $\vec{v} = (3, 2, 2)$  compleix que  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . Es pot veure la seva representació a la figura següent (Figura 5.3).

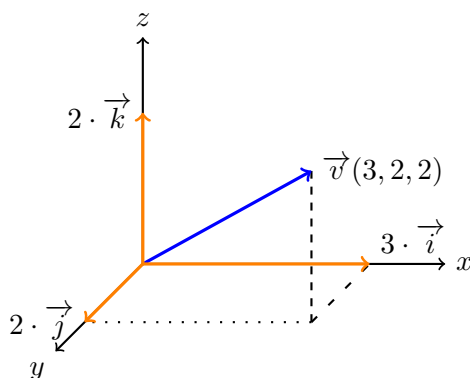


Figura 5.3: Descomposició lineal del vector  $\vec{v}(3, 2, 2)$  respecte de la base estàndard

### 5.2.2 Operacions amb vectors anàlogues al pla

El mòdul d'un vector i les operacions de suma i resta de vectors, producte d'un escalar per un vector i producte escalar de dos vectors es defineixen de manera anàloga al pla:

- El mòdul d'un vector  $\vec{u}(a, b, c)$  es calcula com

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Per exemple,  $|\vec{u}(3, -2, 6)| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$ .

<sup>1</sup>Les definicions de base d'un espai vectorial escapen a l'abast d'aquest text.

- Donats dos vectors  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ , la seva suma es defineix com  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ .  
Per exemple, si  $\vec{u} = (2, -3, 4)$  i  $\vec{v} = (-2, -7, 0)$ , aleshores  $\vec{u} + \vec{v} = (0, -10, 4)$ .
- La resta de dos vectors  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  es defineix com  $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$ .  
Per exemple, si  $\vec{u} = (2, -3, 4)$  i  $\vec{v} = (-2, -7, 0)$ , aleshores  $\vec{u} - \vec{v} = (4, 4, 4)$ .
- Si  $k \in \mathbb{R}$  és un nombre qualsevol i  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  és un vector, llavors el producte  $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)$ .  
Per exemple, si  $\vec{u} = (2, -3, 4)$  i  $k = -3$ , aleshores  $k \cdot \vec{u} = (-6, +9, -12)$ .
- Dos vectors  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  són paral·lels si, i només si,  $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$  (vegi's [proposició 6](#))
- Si  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  són vectors, el seu producte escalar es defineix com

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Així per exemple,  $\overrightarrow{(3, -2, 4)} \cdot \overrightarrow{(-1, 0, -5)} = -3 + 0 - 20 = -23$ .

Es verifica el resultat relatiu a l'angle entre dos vectors ([proposició 7](#)) i les propietats del producte escalar ([teorema 8](#)).

**Exercici 125.** Determineu si els vectors són paral·lels entre si:

a)  $\vec{u}(2, -3, 1)$  i  $\vec{v}(4, -6, 2)$

b)  $\vec{u}(2, -3, 1)$  i  $\vec{v}(4, -6, 3)$

**Exercici 126.** Què val l'angle format entre els vectors  $\vec{u}(2, 0, -3)$  i  $\vec{v}(-3, 1, 2)$ ?

### 5.2.3 Producte vectorial

Vegem tot seguit una operació nova: el producte vectorial entre vectors. Noteu la paraula *vectorial* (que no escalar) a aquesta expressió. La importància d'aquesta paraula és perquè el producte vectorial donarà com a resultat un vector mentre que el producte escalar dóna com a resultat un nombre.

**Definició 36 (producte vectorial de vectors).** El *producte vectorial de dos vectors*,  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ , que es denota per  $\vec{u} \wedge \vec{w}$  o  $\vec{u} \times \vec{w}$ , respecte de la base estàndard, es defineix com:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{w} &= (u_1, u_2, u_3) \wedge (w_1, w_2, w_3) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$



Aquest determinant es pot fer aplicant la regla de Sarrus ([algorisme 1](#)). O bé es pot desenvolupar per la tercera fila, obtenint que

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right),\end{aligned}$$

que és útil per aquelles persones que volen memoritzar fórmules en comptes de realitzar càlculs.

Notem que el producte vectorial de dos vectors és, per tant, un altre vector.

**Exemple 67.** Siguin els vectors  $\vec{u}(2, 0, -3)$  i  $\vec{v}(-3, 1, 2)$ . Aleshores, el seu producte vectorial és:

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{k} + 0 + 9\vec{j} + 3\vec{i} + 0 - 4\vec{j} \\ &= 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} \\ &= (3, 5, 2)\end{aligned}$$

**Exercici 127.** Calculeu  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , amb  $\vec{u}(0, -2, 3)$  i  $\vec{v}(-3, -5, 4)$ .

**Proposició 16 (mòdul del producte vectorial).** Donat dos vectors  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , el mòdul del seu producte vectorial  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  compleix que

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \widehat{uv},$$

on  $\widehat{uv}$  denota l'angle que formen els vectors  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ .

Vegem ara les propietats del producte vectorial.

### 5.2.3.1 Propietats del producte vectorial

Donats els vectors  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  i el nombre  $k$  qualssevol, el producte vectorial verifica les propietats següents:

a)  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$  (anticommutativa)

b)  $\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$

c)  $k(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (k\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (k\vec{b})$

d)  $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

- e) En general,  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$
- f) El vector  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  és perpendicular tant al vector  $\vec{a}$  com al vector  $\vec{b}$ .
- g) El mòdul del producte vectorial de dos vectors ens dona l'àrea del paral·lelogram definit per aquest dos vectors (Figura 5.4):

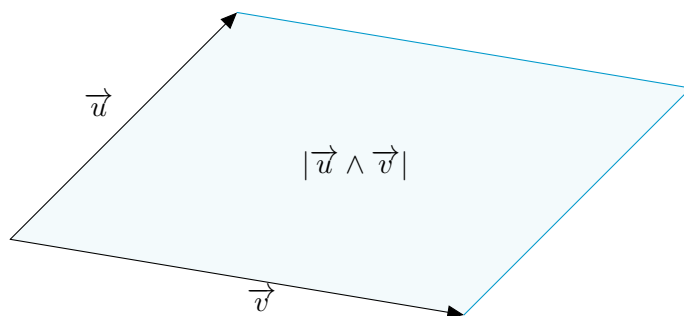


Figura 5.4: Àrea del paral·lelogram determinat pels vectors  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$

**Observació 14.** Com que  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  i  $\vec{b} \wedge \vec{a}$  són perpendiculars a  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , això vol dir que  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  i  $\vec{b} \wedge \vec{a}$  estan a la mateixa línia, un apuntant cap a baix i un apuntant cap a dalt. Per determinar l'orientació d'aquests dos vectors de forma gràfica existeix un procediment, anomenat *regla del llevataps*.

**Exercici 128.** Trobeu un vector que sigui perpendicular als vectors  $\vec{a}(-4, 0, 3)$  i  $\vec{b}(-3, -1, 0)$ , simultàniament.

**Exercici 129.** Trobeu un vector ortogonal a  $\vec{u}(4, -2, 5)$  i  $\vec{v}(3, 0, -5)$ . Trobeu un altre vector ortonormal.

**Exercici 130.** Trobeu l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors  $\vec{u}(-2, 0, 4)$  i  $\vec{v}(1, 3, -1)$ .

#### 5.2.4 Producte mixt

Tot seguit veurem una nova operació, entre tres vectors, la qual tindrà la principal aplicació de calcular volums de determinats prismes i piràmides (proposició 17, proposició 18).

**Definició 37 (producte mixt).** Donats tres vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ , el seu *producte mixt*, que es denota per  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , es defineix com

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

Notem que el producte mixt no és, en general, una operació commutativa. És a dir, el valor numèric del producte mixt depèn fortament de l'ordre dels vectors involucrats.

**Exemple 68.** Donats els vectors  $\vec{u}(0, -1, 5)$ ,  $\vec{v}(2, 0, -3)$  i  $\vec{w}(-3, 1, 2)$ , calculeu el producte mixt  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

Tenim que

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \\ &= (0, -1, 5) \cdot ((2, 0, -3) \wedge (-3, 1, 2)) \\ &= (0, -1, 5) \cdot (3, 5, 2) \\ &= 0 - 5 + 10 = 5. \end{aligned}$$

**Observació 15.** Per a qualssevol vectors  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  i  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , el producte mixt  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  també es pot calcular amb la fórmula següent:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

és a dir, els vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  disposats per fileres al determinant.

**Exemple 69.** Donats els vectors  $\vec{u}(0, -1, 5)$ ,  $\vec{v}(2, 0, -3)$  i  $\vec{w}(-3, 1, 2)$ , calculeu  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 + 10 + 4 = 5.$$

**Exercici 131.** Calculeu  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , amb  $\vec{u}(3, 1, -2)$ ,  $\vec{v}(-2, 10, 0)$  i  $\vec{w}(0, -1, -5)$ .

**Definició 38 (paral·lelepípede).** Un *paral·lelepípede* és un prisme la base del qual és un paral·lelogram (Figura 5.5).

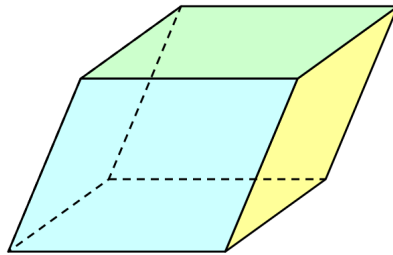


Figura 5.5: Un paral·lelepípede

**Proposició 17 (càlcul del volum d'un paral·lelepípede).** Donat el paral·lelepípede definit pels vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  (vegeu Figura 5.6), el seu volum  $V_p$  és igual al valor absolut del producte mixt, és a dir,

$$V_p = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

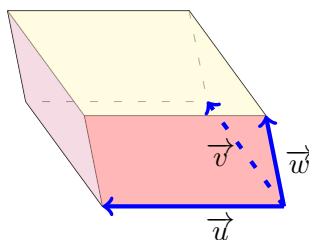


Figura 5.6: Volum del paral·lelepípede definit pels vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$

**Definició 39 (tetraedre).** Un *tetraedre* és una piràmide amb totes les cares iguals entre si i iguals a triangles equilàters.

**Proposició 18 (càlcul del volum d'un tetraedre).** Donat el tetraedre format pels vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ , el seu volum  $V_t$  és igual a:

$$V_t = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$

### 5.3 La recta a l'espai

En aquest apartat farem un estudi de la recta en un espai de tres dimensions.

Si d'una recta coneixem un punt qualsevol d'aquesta i un vector tengui la mateixa direcció (és a dir, que estigui situat sobre ella o bé que estigui situat sobre una recta paral·lela), llavors tenim elements suficients per a determinar-la completament, és a dir, per a determinar les coordenades de qualsevol punt.

En altres paraules, basta que coneguem un punt de la recta  $P_0$  i el seu *vector director*  $\vec{v}$ .

**Definició 40 (equació vectorial de la recta).** Una recta  $r$  es pot determinar per un punt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  de la recta i un vector director  $\vec{v}$ , de manera que, per a qualsevol punt  $P(x, y, z)$  pertanyent a la recta, es té que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v}, \quad (5.1)$$

per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Figura 5.7). Aquesta equació (5.1) es coneix com a *equació vectorial de la recta*.

#### 5.3.1 Equació paramètriques de la recta

Sigui  $r$  una recta determinada per  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  un punt qualsevol i  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  és el seu vector director. Aleshores un punt  $P(x, y, z)$  de la recta compleix l'equació vectorial (Equació 5.1), és a dir,  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v}$ ,

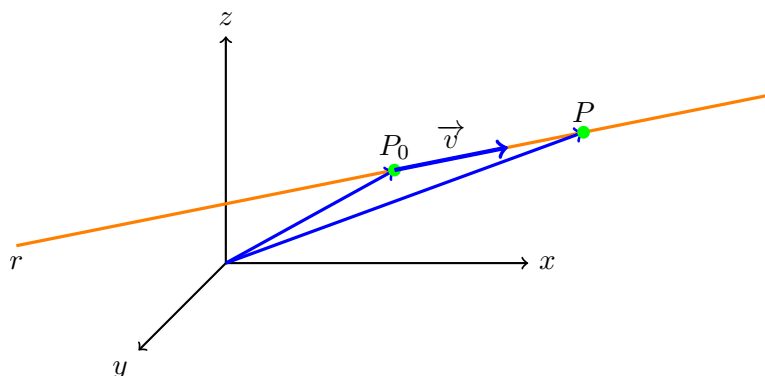


Figura 5.7: Representació de la recta que té vector director  $\vec{v}$  i que passa per  $P_0$ .

per qualque  $\lambda \in \mathbb{R}$ , o sigui,  $\overrightarrow{(x, y, z)} = \overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)} + \lambda \overrightarrow{(v_x, v_y, v_z)}$ . Operant, tenim que s'ha de verificar que

$$\overrightarrow{(x, y, z)} = \overrightarrow{(x_0 + \lambda v_x, y_0 + \lambda v_y, z_0 + \lambda v_z)}.$$

Si dos vectors són iguals, llavors component a component són iguals. El que implica que

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases}, \quad (5.2)$$

on  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Aquesta equació (Equació 5.2), reb el nom de *equació paramètrica de la recta*.

**Exemple 70.** Si una recta passa pel punt  $(0, -1, 3)$  i el seu vector director és el  $\vec{v}(-3, 2, 0)$ , llavors la seva equació paramètrica és la següent:

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda \cdot (-3) \\ y = -1 + \lambda \cdot 2 \\ z = 3 + \lambda \cdot 0 \end{cases}, \text{ és a dir, } \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Per trobar més punts d'aquesta recta basta substituir  $\lambda$  per qualsevol nombre a les expressions anteriors.

**Exemple 71.** Si a la recta anterior (exemple 70), feim  $\lambda = 2$ , tenim que

$$\left. \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -1 + 4 = 3 \\ z = 3 \end{array} \right\},$$

i, per tant,  $(-6, 3, 3)$  és un altre punt de la recta.

**Exercici 132.** Escriviu les equacions paramètriques de les rectes següents:

- a) recta que passa pel punt  $(-1, 0, 2)$  i que té la direcció donada pel vector director  $\vec{v}(1, 3, -5)$
- b) recta que passa per l'origen de coordenades i que té com a vector director  $\vec{v}(1, -2, 0)$
- c) recta que passa pels punts  $(3, -5, 2)$  i  $(2, -7, -3)$

Trobeu dos punts més de cada recta.

### 5.3.2 Equació contínua de la recta

Si aïllem  $\lambda$  en cadascuna de les equacions de la recta en forma paramètrica (Equació 5.2), tenim que

$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_x}, \quad \lambda = \frac{y - y_0}{v_y}, \quad \lambda = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Si igualam les expressions, obtenim el que s'anomena *equació en forma contínua de la recta* (o simplement *equació contínua*):

$$r: \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}, \quad (5.3)$$

on  $P(x_0, y_0, z_0)$  és un punt qualsevol de la recta i  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  és el seu vector director.

**Exemple 72.** La recta  $r$  que passa pel punt  $(0, -1, 3)$  i té com a vector director  $\vec{v}(-3, 2, 0)$  té com a equació contínua:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 3}{0}$$

**Observació 16.** Observem que en aquest exemple ha aparegut un denominador igual a 0. A pesar de què la divisió per 0 no és una operació que estigui definida, en el context de l'equació contínua d'una recta, aquesta expressió està permesa.

**Exercici 133.** Escriviu les equacions contínues de la rectes següents:

- a) recta que passa per  $(0, -5, 3)$  i que té vector director  $\vec{v}(1, -2, 2)$
- b) recta que passa pels punts  $(6, -2, 0)$  i  $(2, -1, -1)$
- c) recta que passa pel punt  $(-1, -1, 2)$  i que té com a vector director  $\vec{v}(2, 0, -3)$ .

### 5.3.3 Equació implícita de la recta

Si a les equacions de la recta en forma contínua (Equació 5.3) llevam els denominadors i transposem tots els termes al primer membre, obtindrem dues equacions de la forma:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}, \quad (5.4)$$

on  $A, B, C, D, A', B', C'$  i  $D'$  són nombres reals. Aquestes equacions reben el nom d'*equació implícita de la recta*.

**Exemple 73.** La recta  $r$  que passa pel punt  $(0, -1, 3)$  i que té vector director  $\vec{v}(-3, 2, 0)$  té l'equació contínua:

$$r: \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{0}$$

(vegis' exemple 72). Per tant, fent els productes creuats de cada igualtat, obtenim que:

$$r: \begin{cases} 2x = -3(y+1) \\ 0(y+1) = 2(z-3) \\ 0 = -3(z-3) \end{cases}$$

Així, operant, obtenim un sistema de tres equacions i tres incògnites:

$$r: \begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \\ -3z + 9 = 0 \end{cases}$$

Per la naturalesa de la recta aquest sistema té rang 2, és a dir, té un grau de llibertat. Això vol dir que d'aquestes tres equacions, n'hem de triar dues que no siguin linealment dependents. En el nostre cas, es veu que la segona i la tercera són linealment independents. Per tant, l'equació implícita de la recta queda:

$$r: \begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

**Observació 17.** De vegades és necessari calcular tots els productes creuats per a passar de l'equació contínua a la implícita perquè els productes creuats de la primera i segona fracció i de la segona i tercera fracció poden ser linealment dependents. Vegeu per exemple l'exercici [exercici 136](#) apartat *c*).

**Observació 18.** Noteu que en principi no podem obtenir l'equació implícita d'una recta directament amb el seu vector director i un punt d'aquesta. En aquest cas, hem de passar per l'equació contínua per obtenir l'equació implícita.

**Observació 19.** L'equació general de la recta en el pla és de la forma  $Ax + By + D = 0$  (Subsecció 4.3.3). Per tant, es podria pensar que la generalització d'aquesta equació a l'espai seria  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Però això no és així: aquesta equació correspon a un pla (vegeu Secció 5.4). La raó d'aquest fet és que, si fos així, tendríem una equació amb dues incògnites, la qual cosa ens donaria dos graus de llibertat, el que correspon a un pla. En aquest sentit, l'equació implícita d'una recta (Equació 5.4) es pot veure com a la intersecció de dos plans.

Exercici 134. Trobeu les equacions implícites de les rectes de l'exercici 133.

### 5.3.3.1 Vector director a partir de l'equació implícita

La proposició següent dóna una manera per trobar el vector director d'una recta que ve donada mitjançant l'equació implícita.

**Proposició 19** (vector director a partir de l'equació implícita). *Sigui  $r$  una recta donada amb l'equació implícita:*

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

El seu vector director,  $v_r$ , es pot calcular amb la fórmula:

$$\vec{v}_r = (A, B, C) \wedge (A', B', C') \quad (5.5)$$

Exemple 74. El vector director de la recta

$$r: \begin{cases} 2x + 3y + 3 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

és  $\vec{v} = (2, 3, 0) \wedge (0, 0, 2)$ , és a dir,

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (6, -4, 0).$$

Exercici 135. Calculeu el vector director de les rectes:

$$a) \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 4x + y - 5z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x = 0 \\ 2z + y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - z - 5 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + 3y + 5z - 2 = 0 \\ 4x + 6y + 10z - 4 = 0 \end{cases}$$



### 5.3.3.2 Pas de l'equació implícita a l'equació paramètrica

**Mètode 1. Càlcul de punts i vector director** Per passar de l'equació implícita a l'equació paramètrica ho farem indirectament: calcularem el vector director de la recta i un punt.

Exemple 75. Trobeu les equacions paramètriques de la recta

$$r: \begin{cases} 2x + y + 2z + 4 = 0 \\ x - y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

- Per l'apartat anterior (Subsubsecció 5.3.3.1), tenim que el seu vector director és

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= -2\vec{k} + 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{i} - \vec{k} - 8\vec{j} \\ &= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} = \overrightarrow{(6, -6, -3)}. \end{aligned}$$

- Per trobar un punt, substituïm una variable qualsevol, o  $x$  o  $y$  o  $z$ <sup>2</sup>. Triem  $x$ . Substituïm,  $x = 0$ . Llavors hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} y + 2z + 4 = 0 \\ -y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

Si apliquem la tècnica de reducció de sistemes d'equacions lineals de dues equacions<sup>3</sup>, restant les equacions obtenim:  $6z + 16 = 0$ , el que implica que  $z = -\frac{8}{3}$ . Substituint el valor de  $z$  a la primera equació i realitzant els càlculs, obtenim  $y = \frac{4}{3}$ . Per tant, un punt de la recta és  $(0, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3})$ .

- Amb tota la informació anterior, l'equació paramètrica de la recta és:

$$r: \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = \frac{4}{3} - 6\lambda \\ z = -\frac{8}{3} - 3\lambda \end{cases} .$$

**Mètode 2. Parametritzant variables** En aquest cas, per passar de l'equació implícita a l'equació paramètrica, escollirem una variable qualsevol, que parametritzarem. I després resoldrem un sistema d'equacions de dues variables i dues incògnites.

<sup>2</sup>Penseu que una recta té 2 equacions i 3 incògnites. Per tant, hi ha un grau de llibertat. D'aquesta manera només hem de substituir una sola variable.

<sup>3</sup>Podríem resoldre aquest sistema usant la regla de Cràmer. També podríem usar la tècnica de substitució i igualació.

Exemple 76. Trobeu les equacions paramètriques de la recta

$$r: \begin{cases} 2x + y + 2z + 4 = 0 \\ x - y + 4z + 12 = 0 \end{cases}$$

- Triarem  $y$  per a parametritzar. Per tant,  $y = \lambda$ . Amb la qual cosa el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x + 2z = -4 - \lambda \\ x + 4z = -12 + \lambda \end{cases}$$

- Ara hem de resoldre aquest sistema: podem aplicar directament la regla de Cràmer o bé aplicar alguns dels mètodes de resolució de sistemes  $2 \times 2$  (reducció, igualació o substitució). Optem per la primera opció:

- El determinant de la matriu de coeficients és:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$$

- Per tant,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 2 \\ -12 + \lambda & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{8 - 6\lambda}{6} = \frac{4}{3} - \lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 - \lambda \\ 1 & -12 + \lambda \end{vmatrix}}{6} = \frac{-20 + 3\lambda}{6} = \frac{-10}{3} + \frac{1}{2}\lambda$$

- Amb tota la informació anterior, l'equació paramètrica de la recta és:

$$r: \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{-10}{3} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} .$$

### 5.3.3.3 Exercicis d'equacions de rectes

Tenim diverses equacions per a expressar una recta (Figura 5.8). Practiquem el pas d'unes a les altres.

Exemple 77. Trobeu totes les equacions de la recta que passa pel punt  $P(3, -2, 0)$  i que té per vector director  $\vec{v}(1, 0, -1)$ .

Tenim que:

- L'equació vectorial és

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{(3, -2, 0)} + \lambda \overrightarrow{(1, 0, -1)}$$

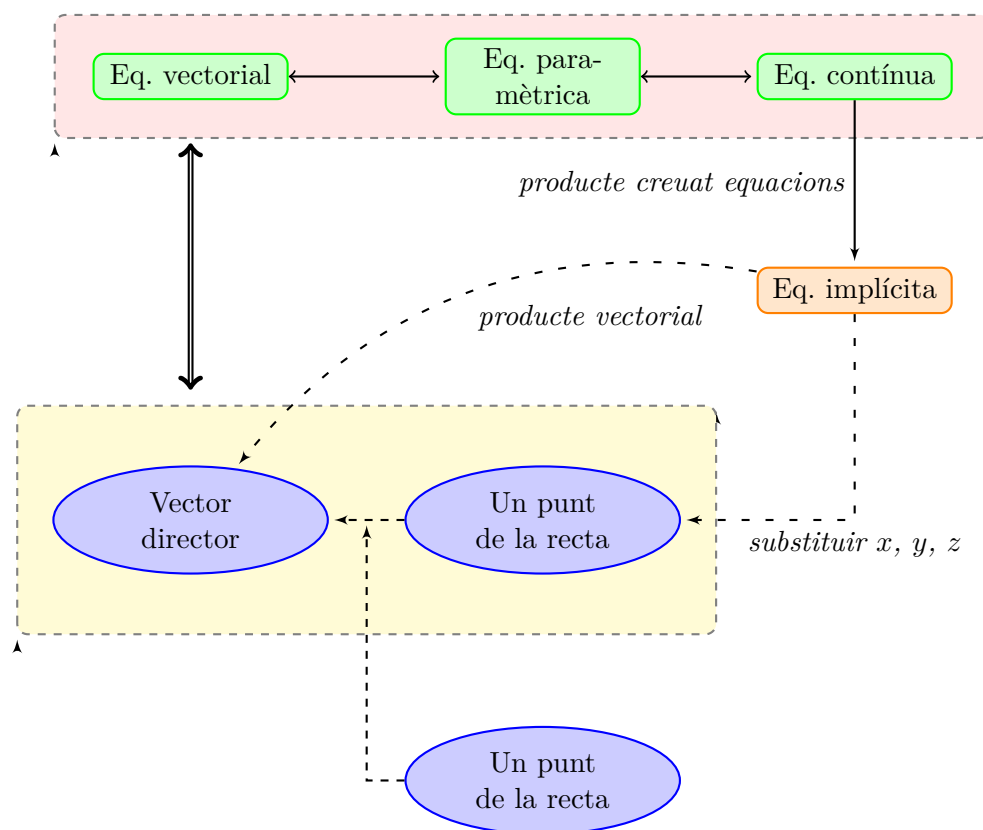


Figura 5.8: Relacions entre les equacions d'una recta

- Les equacions paramètriques són

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

- L'equació contínua és

$$r : x - 3 = \frac{y + 2}{0} = \frac{z}{-1}$$

- I les equacions implícites són

$$r : \begin{cases} 0 \cdot (x - 3) = y + 2 \\ -1 \cdot (x - 3) = z \end{cases}, \text{ és a dir, } r : \begin{cases} y + 2 = 0 \\ -x - z + 3 = 0 \end{cases}$$

Exercici 136. Trobeu totes les equacions de les rectes següents:

- a) Recta que té vector director  $\overrightarrow{(2, -3, -1)}$  i passa per  $(0, 2, -10)$

- b) Recta que passa pels punts  $(7, -4, 0)$  i  $(3, 0, -5)$
- c) Recta donada per l'equació  $\overrightarrow{(x, y, z)} = \overrightarrow{(3, 2, 1)} + \lambda \overrightarrow{(-1, 0, 1)}$ , amb  $(x, y, z)$  un punt qualsevol de la recta.
- d) Recta donada per  $r: \frac{x-3}{5} = y + 3 = \frac{z+2}{-2}$
- e) La recta  $s: \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 4x + 7z = 0 \end{cases}$

### 5.3.3.4 Rectes paral·leles

Donada una recta  $r$  que té vector director  $\vec{v}$  i passa per  $P$ , si volem trobar una recta paral·lela  $s$  que passi per  $Q$ , només hem de notar que  $s$  tindrà  $\vec{v}$  com a vector director i passarà per  $Q$ .

**Exemple 78.** Calculeu l'equació de la recta paral·lela a  $r: \frac{x}{-4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2}$  que passa pel punt  $A(2, 5, -1)$ .

Donat que la recta que cercan és paral·lela a la recta  $r$ , ambdues tenen el mateix vector director:  $\vec{v}(-4, 3, 2)$ . A més, sabem que la recta ha de passar pel punt  $A(2, 5, -1)$ . Llavors, si substituïm aquestes dues dades, per exemple, a l'equació contínua de la recta, obtindrem:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{2}$$

**Exercici 137.** Donada la recta  $r: \{x = 3 + \lambda, y = -2, z = -\lambda\}$  en forma paramètrica, trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela a  $r$  que passa pel punt  $A(0, -8, 6)$ .

**Exercici 138.** Trobeu l'equació paramètrica de la recta  $s$  que passa per  $(0, 4, 4)$

$$\text{i és paral·lela a } r: \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ 8x - 7z = 0 \end{cases}$$

## 5.4 El pla a l'espai

Per definir un pla a l'espai necessitam tres punts  $A, B$  i  $C$  no alineats, o equivalentment, un punt  $A$ , per on passa el pla, i dos vectors  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  linealment independents<sup>4</sup> (la definició de vectors linealment dependents és anàloga a la de línies d'una matriu. Vegi's [definició 21](#)) — en el cas de només tenir dos vectors, tendríem infinits plans paral·lels. Els vectors  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  s'anomenen *vectors directores* del pla.

D'aquesta manera, si  $\pi$  és el pla determinat per  $A$ , i els vectors directores  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , aleshores un punt  $P$  que pertanyi a  $\pi$  compleix que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

<sup>4</sup>L'equivalència, resulta prenent  $\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  i  $\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ .

Però  $\overrightarrow{AP}$  és suma dels vectors  $\overrightarrow{AM}$  i  $\overrightarrow{AN}$ , que són múltiples de  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ . És a dir,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v},\end{aligned}$$

per qualques  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (Figura 5.9). En resum,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad (5.6)$$

amb  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Aquesta equació (Equació 5.6), s'anomena *l'equació vectorial del pla*.

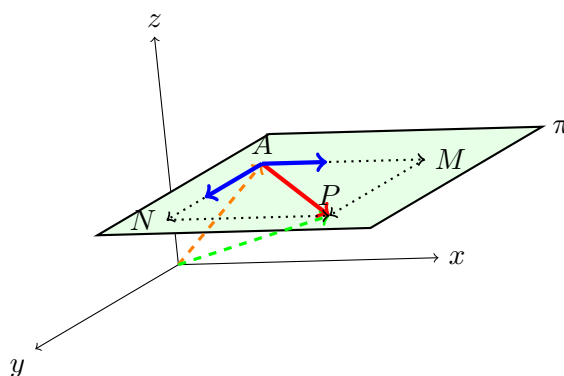


Figura 5.9: Representació de les equacions vectorials d'un pla

#### 5.4.1 Equacions paramètriques del pla

A partir de l'equació vectorial del pla (Equació 5.6), igualant coordenades s'obtenen les *equacions paramètriques del pla*: si  $\pi$  és un pla determinat pel punt  $A(x_1, y_1, z_1)$  i els vectors directores  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ , aleshores les equacions paramètriques de  $\pi$  són:

$$\left. \begin{aligned}x &= x_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= y_1 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= z_1 + \lambda u_3 + \mu v_3\end{aligned} \right\}, \quad (5.7)$$

on  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Recordeu que  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  són vectors no proporcionals entre si.

**Observació 20.** Si donam valors qualssevol als paràmetres  $\lambda$  i  $\mu$  i els substituïm a l'expressió anterior, aleshores trobarem punts del pla en qüestió.

**Exemple 79.** Sigui  $\pi$  el pla que conté el punt  $(2, 0, -3)$  i que els vectors  $(0, 3, -1)$  i  $(2, 5, 0)$  (els quals no són proporcionals entre si). Volem trobar dos punts de  $\pi$  a més del que ja sabem.

L'equació paramètrica de  $\pi$  és

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2 \\ y = 0 + \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 5 \\ z = -3 + \lambda \cdot (-1) + \mu \cdot 0 \end{array} \right\} \text{i.e., } \left. \begin{array}{l} x = 2 + 2\mu \\ y = 3\lambda + 5\mu \\ z = -3 - \lambda \end{array} \right\}$$

Si donam valors a  $\lambda$  i  $\mu$  obtenim altres punts del pla:

- Fent  $\lambda = 0$  i  $\mu = 1$ , obtenim que  $x = 4$ ,  $y = 5$  i  $z = -3$ . Per tant,  $(4, 5, -3)$  pertany a  $\pi$ .
- Fent  $\lambda = 1$  i  $\mu = 0$ , obtenim que  $x = 2$ ,  $y = 3$  i  $z = -4$ . Per tant,  $(2, 3, -4) \in \pi$ .

**Exercici 139.** Trobeu l'equació del pla que passa pel punt  $(0, 0, -8)$  i que és paral·lel als vectors  $\vec{u}(2, 0, -5)$  i  $\vec{v}(1, 1, 9)$ . Trobeu tres punts més del pla. Trobeu un vector més que pertanyi al pla (a partir dels punts que heu trobat o bé a partir de combinació lineal de  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ ).

#### 5.4.2 Equació general del pla

El darrer tipus d'equació del pla és l'*equació general*. L'equació general té la forma

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0,$$

on  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  són nombres qualssevol. Per trobar l'equació general d'un pla  $\pi$  determinat pels vectors  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  i que passa pel punt  $P = (a, b, c)$ , es pot emprar la fórmula següent ([Equació 5.8](#)):

$$\begin{vmatrix} x - a & u_1 & v_1 \\ y - b & u_2 & v_2 \\ z - c & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.8)$$

**Exemple 80.** Seguint amb el pla de l'exemple anterior ([exemple 79](#)), tenim que tots els seus punts compleixen l'equació

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 2 & 0 & 2 \\ y - 0 & 3 & 5 \\ z - (-3) & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calculant el determinant,

$$\pi \equiv -2y - 6(z + 3) + 5(x - 2) = 0,$$

és a dir,

$$\pi \equiv 5x - 2y - 6z - 28 = 0$$

**Exercici 140.** Trobeu l'equació general del plans:

- a) El pla  $\pi_1$  que té com a vectors directores  $\overrightarrow{(3, -2, 3)}$  i  $\overrightarrow{(1, 1, 1)}$  i passa pel punt  $(2, 2, 4)$
- b) El pla  $\pi_2$  que passa pel punt  $(0, 1, -2)$  i és paral·lel als vectors  $\vec{u} = (0, 2, 4)$  i  $\vec{v} = (4, 4, 2)$
- c) El pla que té vectors directores  $\vec{u}(1, 0, 0)$  i  $\vec{v}(0, 0, 1)$  i passa per  $(0, 2, 2)$ .

### 5.4.2.1 Pas de l'equació general a la paramètrica

Notem que, si tenim un pla  $\pi$  expressat mitjançant una equació paramètrica, aleshores és relativament senzill expressar  $\pi$  mitjançant l'equació general. El motiu és que en l'equació paramètrica del pla tenim els vectors directores i un punt de  $\pi$ . Per tant, simplement aplicarem la fórmula [Equació 5.8](#). Ara bé, si volem fer el procés invers llavors el procés és més llarg, ja que no *veiem* els vectors directores ni els punts per on passa  $\pi$  de l'equació general.

Existeixen dues maneres de passar de l'equació general a l'equació paramètrica, que podem usar indistintament.

**Mètode 1. Càlcul de punts** Donat  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  un pla qualsevol, si volem trobar la seva equació paramètrica el que hauríem de fer seria:

- a) Trobar tres punts del pla  $P$ ,  $Q$  i  $R$
- b) Amb aquests punts trobar dos vectors del pla: per exemple  $\overrightarrow{PQ}$  i  $\overrightarrow{PR}$ .
- c) Calcular l'equació paramètric amb els vectors anteriors i un punt del pla (per exemple  $P$ ).

**Exemple 81.** Suposem que tenim el pla  $\pi: 2x - 5y - z + 3 = 0$  i volem trobar la seva equació paramètrica.

- a) Trobem tres punts de  $\pi$ : substituïrem qualssevol dues variables per valors que vulguem.
- Si prenem  $y = 0$  i  $z = 1$ , tenim que  $x = -1$ . Per tant, el punt  $P(-1, 0, 1)$  pertany a  $\pi$
  - Si prenem  $x = 0$  i  $y = 0$ , tenim que  $z = 3$ . Per tant, el punt  $Q(0, 0, 3)$  pertany a  $\pi$
  - Si prenem  $x = 5$  i  $z = 3$ , tenim que  $y = 2$ . Per tant, el punt  $R(5, 2, 3)$  pertany a  $\pi$
- b) Trobem dos vectors que pertanyen a  $\pi$ :
- $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0, 2)}$  prenent  $P$  i  $Q$  com a extrems

- $\vec{v} = \overrightarrow{(6, 2, 2)}$  prenent  $P$  i  $R$  com a extrems

c) Calculem l'equació paramètrica de  $\pi$  (prenent  $P$  com a punt de  $\pi$ ):

$$\pi: \begin{cases} x = -1 + \lambda + 6\mu \\ y = 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda + 2\mu \end{cases}$$

**Mètode 2. Parametrització de variables** Donat  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  un pla qualsevol, per trobar la seva equació paramètrica procedirem de la manera següent:

- Triarem una variable qualsevol i la aïlarem
- Parametritzarem les altres dues variables
- Construirem l'equació paramètrica originada a partir de la informació anterior

**Exemple 82.** Suposem que tenim el pla  $\pi: 2x - 5y - z + 3 = 0$  i volem trobar la seva equació paramètrica.

- Triem per exemple la variable  $z$  (triem  $z$  perquè és més bona d'aïllar, ja que el valor absolut del seu coeficient és 1). De l'equació original, tenim que  $z = 3 + 2x + 5y$ .
- Ara parametritzem les altres dues variables:  $x = \lambda$  i  $y = \mu$ . Per tant,  $z = 3 + 2\lambda + 5\mu$ .
- Si ajuntem les informacions anteriors, tenim que l'equació paramètrica de  $\pi$  és:

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 + 2\lambda + 5\mu \end{cases}$$

D'aquí veim que els vectors directores del pla són  $\overrightarrow{(1, 0, 2)}$  i  $\overrightarrow{(0, 1, 5)}$  i un punt de  $\pi$  és  $(0, 0, 3)$ . Hem de notar que aquesta informació no ha de coincidir amb l'anterior, sinó que han de ser equivalents, ja que existeixen moltes equacions paramètriques equivalents d'un pla.

### 5.4.2.2 Vector normal al pla a partir de l'equació general

Donat un pla  $\pi$ , en aquesta secció trobarem un vector perpendicular a  $\pi$  a partir de la seva equació general, el qual anomenarem *vector normal*.

**Definició 41 (vector normal d'un pla).** Donat el pla  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ , definirem el seu *vector normal*, que denotarem habitualment per  $\vec{n}_\pi$  (o simplement  $\vec{n}$ ), com

$$\vec{n} = (A, B, C)$$



**Proposició 20** (perpendicularitat del vector normal). *Donat un pla qualsevol  $\pi$ ,  $\vec{n}$  és perpendicular a  $\pi$ , és a dir, el vector normal sempre és perpendicular al seu pla (Figura 5.10).*

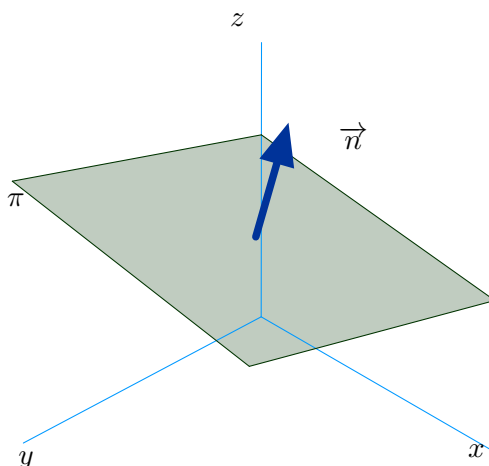


Figura 5.10: Vector normal a un pla

**Exemple 83.** Un vector perpendicular al pla  $\pi: 5x - 2y - 6z - 28 = 0$  és el vector  $\vec{n}(5, -2, -6)$ .

**Exercici 141.** Trobeu el vector normal al pla  $x - 5y + 8z + 4 = 0$ .

L'aplicació inversa del vector normal d'un pla és trobar un pla que és perpendicular a un vector donat. És a dir, donat  $\vec{u}$  un vector, trobar un pla  $\pi$  tal que  $\pi$  és perpendicular a  $\vec{u}$ . Sabem que un pla perpendicular a  $\vec{u}$  serà aquell que tenguí  $\vec{u}$  com al seu vector normal. Tot seguit, veurem un exemple.

**Exemple 84.** Volem trobar un pla  $\pi$  perpendicular al vector  $\vec{v}(3, -1, 7)$  i que passi pel punt  $A(2, -4, 0)$ .

Un pla perpendicular al vector  $\vec{v}(3, -1, 7)$ , és aquell que té l'equació general de la forma

$$\pi \equiv 3x - y + 7z + D = 0,$$

ja que tendria  $\vec{v}$  com al seu vector normal (vegi's [proposició 20](#)).

D'altra banda, sabem que el punt  $A$  és de  $\pi$ , per tant, compleix les equacions del pla. Llavors:

$$3 \cdot 2 - (-4) + 7 \cdot 0 + D = 0$$

D'aquí es té que  $D = -10$ , i l'equació del pla és

$$\pi \equiv 3x - y + 7z - 10 = 0$$

**Observació 21.** Hem vist abans una fórmula per a calcular el vector director d'una recta a partir de les seves equacions implícites ([proposició 19](#)). És el moment de justificar aquest resultat amb l'ús dels vectors normals: notem que si  $r$  és una recta donada per les seves equacions implícites

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases},$$

amb  $A, B, C, D, A', B', C'$  i  $D' \in \mathbb{R}$ , aleshores el seu vector director  $\vec{v}_r$  és el vector ortogonal als vectors normals dels plans que defineixen la recta  $r$ .

És a dir, podem veure la recta  $r$  com la intersecció de dos plans  $\pi$  i  $\rho$  d'equacions  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$  i  $\rho: A'x + B'y + C'z + D' = 0$ . En aquest sentit,  $\vec{v}_r$  tindrà la mateixa direcció que  $\vec{n}_\pi \wedge \vec{n}_\rho$ , on  $\vec{n}_\pi$  i  $\vec{n}_\rho$  són els vectors normals dels plans  $\pi$  i  $\rho$  respectivament ([Figura 5.11](#)).

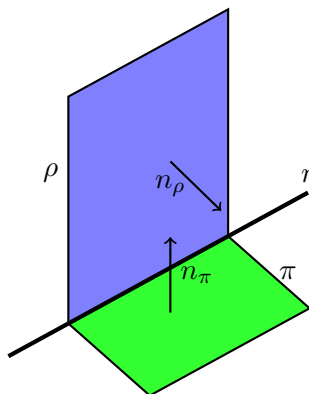


Figura 5.11: Vector director d'una recta com a producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen

### 5.4.3 Plans paral·lels

Donat un pla  $\pi_0$ , un pla *paral·lel*  $\pi_1$  és un pla tal que té els *mateixos* vectors directores<sup>5</sup> i passa per un punt que no pertany a  $\pi_0$  (en el cas que passàs per un punt de  $\pi_0$ , els plans serien *coincidentes*, és a dir, el mateix; vegi's [Secció 5.5](#)). Per tant, podem trobar les equacions paramètriques o generals de  $\pi_1$ , segons convengui, amb la informació proporcionada.

**Exemple 85.** Trobeu l'equació del pla paral·lel a  $\pi: 3x - y + z - 8 = 0$  que passa pel punt  $A(-2, -2, 6)$ .

<sup>5</sup>Realment, no tenen perquè ser els mateixos vectors directores. En general, dos plans són paral·lels quan els vectors directores de primer són combinació lineal dels vectors directores de segon i inversament. Ara bé, sempre podríem triar els mateixos vectors directores per als dos plans.

Si el pla que cercam és paral·lel al pla  $\pi$ , ambdós tendran el mateix vector normal. Per tant, la seva equació serà de la forma

$$3x - y + z + D = 0,$$

amb  $D$  un nombre. Com que el pla que volem trobar passa pel punt  $A$ , llavors  $A$  complirà l'equació del pla anterior:

$$3 \cdot (-2) - (-2) + 6 + D = 0;$$

Per tant,  $D = -2$ . Llavors el pla que cercam és  $3x - y + z - 2 = 0$ .

Exercici 142. Trobeu l'equació del pla que passa pel punt  $A(5, -1, 0)$  i és paral·lel al pla  $-x + 3y - 8 = 0$ .

## 5.5 Posició relativa entre rectes i plans

### 5.5.1 Posició relativa entre dues rectes

Podem suposar que tenim dues rectes  $r$  i  $s$  i que d'aquestes coneixem els seus vectors directores i un punt pel qual passen. Aquestes dades són bones d'obtenir si les rectes estan en forma de l'equació vectorial, paramètrica o contínua. Si alguna de les rectes es dóna en forma implícita, podem passar-la a forma paramètrica (Subsubsecció 5.3.3.2) o bé trobar el seu vector director i un punt usant el producte vectorial (Subsubsecció 5.3.3.1).

Per tant, suposarem que  $r$  té com vector director  $\vec{v}$  i passa per  $A$ , mentre que  $s$  té com a vector director  $\vec{w}$  i passa per  $B$ .

- Si  $rg(\vec{v}, \vec{w}) = 1$ , aleshores  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  són linealment dependents. Per tant, tenen la mateixa direcció. Llavors  $r$  i  $s$  poden ser *coincidentes* (si tenen una infinitat de punts en comú) o *paral·leles* (si no tenen cap punt en comú).

- Si són coincidents, llavors el vector  $\overrightarrow{AB}$  té la mateixa direcció que  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ , és a dir,  $rg(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 1$ .

- Si són paral·leles, llavors el vector  $\overrightarrow{AB}$  no té la mateixa direcció que  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  i, per tant,  $rg(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 2$ .

- Si  $rg(\vec{v}, \vec{w}) = 2$ , llavors  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  són linealment independents. Per tant, tenen diferent direcció. Llavors les rectes poden ser *secants* (es tallen en un punt) o bé es *creuen* (no tenen cap punt en comú)

Raonant de manera anàloga al cas anterior,

- Si són secants, llavors  $rg(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 2$ .

- Si es creuen, llavors  $rg(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}) = 3$ .

Tot això queda reflexat en les proposicions següents:

**Proposició 21** (posició relativa de dues rectes usant proporcionalitat de vectors). Donades dues rectes  $r$  i  $s$  amb vectors directores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  i que passen pels punts  $A = (a_1, a_2, a_3)$  i  $B = (b_1, b_2, b_3)$  respectivament, tenim que la seva posició relativa es pot determinar amb l'arbre de decisió següent:

- Si  $\vec{u}$  és proporcional a  $\vec{w}$  (vegeu [proposició 6](#)), aleshores les rectes poden ser coincidents o paral·leles.
  - Si  $\overrightarrow{AB}$  és proporcional a  $\vec{u}$  (i per tant a  $\vec{w}$ ), llavors  $r$  i  $s$  són coincidents
  - Si  $\overrightarrow{AB}$  no és proporcional a  $\vec{u}$  (i per tant tampoc a  $\vec{w}$ ), llavors  $r$  i  $s$  són paral·leles
- Sinó, llavors les rectes són secants o bé es creuen.
  - Si  $\overrightarrow{AB}$  és proporcional a  $\vec{u}$ , llavors  $r$  i  $s$  són secants
  - Sinó, si  $\overrightarrow{AB}$  és proporcional a  $\vec{w}$ , llavors  $r$  i  $s$  són secants
  - Si  $\overrightarrow{AB}$  no és proporcional ni a  $\vec{u}$  ni a  $\vec{w}$ , llavors  $r$  i  $s$  es creuen

**Proposició 22** (posició relativa de dues rectes usant matrius). Donades dues rectes  $r$  i  $s$  amb vectors directores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  i que passen pels punts  $A = (a_1, a_2, a_3)$  i  $B = (b_1, b_2, b_3)$  respectivament, tenim que la seva posició relativa ve donada pels rangs següents:

- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1$  i  $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 1$ ,  $r$  i  $s$  són coincidents
- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 1$  i  $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$ ,  $r$  i  $s$  són paral·leles
- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$  i  $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 2$ ,  $r$  i  $s$  es tallen
- $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$  i  $rg \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix} = 3$ ,  $r$  i  $s$  es creuen

Exercici 143. Determineu la posició relativa d'aquestes rectes:

$$a) r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad i \quad s: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$$b) r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \quad i \quad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{5}$$

$$c) r: x = y - 1 = \frac{z+2}{3} \quad i \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{6}$$

$$d) r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \quad i \quad s: \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x - 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$e) r: \begin{cases} -y - z = 3 \\ 2x - z = -1 \end{cases} \quad i \quad s: \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

### 5.5.2 Posició relativa d'una recta i un pla

Per a determinar la posició relativa entre un pla i una recta tenim dues opcions: estudiar la posició a partir de les equacions implícites de pla i recta o bé estudiar-la a partir de les posicions relatives entre el vector normal del pla i el vector director de la recta. Els dos estudis es resumeixen a les proposicions següents.

**Proposició 23** (posició relativa entre pla i recta (versió eq. implícita)). *Siguin*  $\pi \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $r \equiv \begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$  un pla i una recta de l'espai qualssevol. Podem construir les matrius de  $A$  i  $M$ :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

*Aleshores:*

- Si  $rgA = 3$  i  $rgM = 3$ , llavors el sistema és compatible determinat. Per tant, la recta talla al pla
- Si  $rgA = 2$  i  $rgM = 2$ , llavors el sistema és compatible indeterminat. Per tant, la recta està continguda en el pla
- Si  $rgA = 2$  i  $rgM = 3$ , llavors el sistema és incompatible. Per tant, la recta i el pla són paral·lels

**Proposició 24** (posició relativa entre pla i recta (versió vector normal)). *Siguin*  $\pi$  un pla i  $r$  una recta del pla. I sigui  $\vec{v}$  el vector director de  $r$  i  $A$  un punt de la recta. *Aleshores:*

- Si  $\vec{v}$  és perpendicular al vector normal del pla  $\vec{n}$  i  $A \in \pi$ , llavors  $r$  està continguda a  $\pi$
- Si  $\vec{v}$  és perpendicular al vector normal del pla  $\vec{n}$  però  $A \notin \pi$ , llavors  $r$  és paral·lela a  $\pi$
- Si  $\vec{v}$  no és perpendicular a  $\vec{n}$ , llavors la recta i el pla es tallen

Exemple 86. Determineu la posició relativa de  $r: \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$  i  $\pi: x + y - z + 3 = 0$ .

- Primer trobam les matrius de coeficients i ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calculem el rang de cada matriu. Després d'alguns càlculs tenim que  $rgA = 3$  i  $rgM = 3$ . Per tant, el sistema és compatible determinat i, per tant, el pla i la recta són secants.

Exemple 87. Siguin  $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{6}$  i  $\pi: 2x - 4y + 5z = 0$ . Determineu la seva posició relativa.

- Tenim que el vector director de  $r$ ,  $\vec{v}(3, 9, 6)$ , i el vector normal del pla,  $\vec{n}(2, -4, 5)$ , són perpendiculars:  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ . Per tant, la regla pot ser continguda al pla o bé paral·lela.
- Per discriminar, vegem si el pla conté o no un punt de la recta: sabem que  $A(1, 2, 0) \in r$ . Però si substituïm a les equacions de  $\pi$ , tenim que:  $2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = -6 \neq 0$ . Per tant,  $r$  és paral·lela a  $\pi$ .

Exercici 144. Determineu les posicions relatives entre aquests plans i aquestes rectes:

$$a) r: \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{i } \pi \equiv 4x - 3y + 7z - 7 = 0$$

$$b) r: \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ -x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{i } \pi \equiv x + z + 1 = 0$$

$$c) r: x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{i } \pi \equiv 2x - 5y + 3z + 3 = 0$$

$$d) r: \begin{cases} 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ -x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{i } \pi \equiv x + 4y - 3z + 3 = 0$$

Exercici 145. Trobeu el valor de  $\alpha$  per a què la recta  $r \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{\alpha} = \frac{z}{12}$  no talli al pla  $\pi: 2x - 4y + 5z = 0$ .

Exercici 146. Donats el pla  $\pi: x + y + mz = 1$  i la recta  $r: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ , discutiu quina és la posició relativa de  $r$  i  $\pi$  segons els valors de  $m$ .

## 5.5.3 Posició relativa entre dos plans

Finalment estudiarem la posició relativa entre dos plans. Suposarem que els plans sempre vénen donats mitjançant les seves equacions generals.

**Proposició 25** (posició relativa entre dos plans (versió rangs de matrius)).  
 Siguin  $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  dos plans qualssevol. Considerem les matrius de coeficients i ampliada,  $A$  i  $M$  respectivament:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Llavors:

- Si  $\text{rg}A = 2$ , llavors  $\text{rg}M = 2$  i, per tant, el sistema és compatible simplement indeterminat (2 equacions i 3 incògnites). Això significa que els plans es tallen
- Si  $\text{rg}A = 1$ :
  - Si  $\text{rg}M = 2$ , llavors el sistema és incompatible. Per tant, no tenen punts en comú. Llavors els plans són paral·lels
  - Si  $\text{rg}M = 1$ , llavors el sistema és compatible doblement indeterminat (1 equació i 3 incògnites). Això significa que els plans són coincidents.

Disposem d'una proposició que estudia la posició relativa a partir de la proporcionalitat dels seus vectors normals.

**Proposició 26** (posició relativa entre dos plans (versió vectors normals)).  
 Si guin  $\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  dos plans qualssevol. Considerem  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  i  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  els seus vectors normals.

- Si  $\vec{n}_1$  és proporcional a  $\vec{n}_2$ , llavors els plans són o bé coincidents o bé paral·lels.  
 Com que aquests vectors són proporcionals, llavors  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$  és igual a un nombre. Diguem-li  $R$ .
  - Si  $\frac{D_1}{D_2} = R$ , llavors  $\pi_1$  és coincident amb  $\pi_2$
  - Sinó,  $\pi_1$  és paral·lel a  $\pi_2$
- En cas contrari, els plans es tallen

Exercici 147. Determineu la posició relativa dels plans següents:

a)  $\pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2$  i  $\pi_2 = 2x + 3y - 5z = -8$

$$b) \pi_1 = -x + 2y - z = 0 \text{ i } \pi_2 = x - 2y + z = 0$$

$$c) \pi_1 = x - z = -11 \text{ i } \pi_2 = -2y - z = -11$$

$$d) \pi_1 = 3x - 2y + 4z = 2 \text{ i } \pi_2 = \begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}$$

## 5.6 Càlcul de la intersecció entre rectes i plans

En aquesta secció calcularem la intersecció entre rectes, plans i rectes i plans. No determinarem abans la seva posició relativa. Calcularem els punts (o rectes) d'intersecció *a pèl*.

### 5.6.1 Intersecció entre dos plans

**Exemple 88.** Trobeu l'equació de la recta determinada per la intersecció dels plans  $\pi_1: x - 2y + z + 3 = 0$  i  $\pi_2: 2x - y + z - 4 = 0$ .

La recta que cercam (veure ([Subsecció 5.3.3](#))) és

$$r: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases},$$

que, com es veu, ve definida per la intersecció de dos plans (si volem es pot passar a la forma paramètrica ([Subsubsecció 5.3.3.2](#))).

**Exercici 148.** Trobeu la intersecció entre els plans següents:

$$a) \pi_1: x + 3y + z - 5 = 0 \text{ i } \pi_2: x - 2z - 2 = 0$$

$$b) \pi_1: x + 2y + 3z - 5 = 0 \text{ i } \pi_2: x + 2y - 3z - 2 = 0$$

$$c) \pi_1: 2x + y + 5z = 0 \text{ i } \pi_2: y - 2z - 10 = 0$$

$$d) \pi_1: 2x + 4y + 8z - 10 = 0 \text{ i } \pi_2: 2x + 4y - 8z - 10 = 0$$

### 5.6.2 Intersecció entre dues rectes

**Exemple 89.** Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes  $r: \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$  i  $s: \{2x - 2y + 3z - 19 = 0, x - y + z - 4 = 0\}$ .

Una de les maneres de trobar el punt d'intersecció entre ambdues rectes és resoldre el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \\ 2x - 2y + 3z - 19 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right\}.$$



Com es veu, resoldre'l pels mètodes habituals pot ser bastant engorros (només els utilitzarem quan el sistema presenti un aspecte senzill). Per aquest motiu, passarem una de les rectes a la seva forma paramètrica i substituïrem les seves equacions a les equacions de l'altra recta.

- Passam en primer lloc la recta  $r$  a la forma paramètrica:

$$r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{cases}$$

- Substituïm ara aquestes expressions a les equacions de  $s$ , i ens queda el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2(-\lambda) - 2(7 + \lambda) + 3(11 + 3\lambda) - 19 &= 0 \\ -\lambda - (7 + \lambda) + (11 + 3\lambda) - 4 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

la solució del qual és, per a cadascuna de les dues equacions,  $\lambda = 0$ . Notem la importància de què la solució sigui la mateixa a les dues equacions. En cas contrari, el sistema seria incompatible i, per tant, no tendria solució.

- Substituïm ara aquest valor de  $\lambda$  a les equacions de la recta  $r$  i en queda

$$r : \begin{cases} x = -0 \\ y = 7 + 0 \\ z = 11 + 3 \cdot 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 \\ z = 11 \end{cases}$$

El punt d'intersecció és, aleshores,  $A(0, 7, 11)$ .

**Exemple 90.** Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes  $r: \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$  i  $s: \{2x - 2y + 3z = 0, x - y + z - 4 = 0\}$ .

- Passam la recta  $r$  a la forma paramètrica:

$$r : \{x = -\lambda, y = 7 + \lambda, z = 11 + 3\lambda\}$$

- Substituïm aquestes expressions a les equacions de  $s$ , i ens queda el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2(-\lambda) - 2(7 + \lambda) + 3(11 + 3\lambda) &= 0 \\ -\lambda - (7 + \lambda) + (11 + 3\lambda) - 4 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

la solució del qual és, per a la primera de les equacions,  $\lambda = 19/5$ , i  $\lambda = 0$  per a la segona. Per tant, el sistema no té solució, del que deduïm que les dues rectes no tenen punts en comú: o bé es creuen o

bé són paral·leles. Per saber quina de les dues possibilitats és la bona, mirarem si els seus vectors directors són paral·lels o no:

$$\vec{d}_r = (-1, 1, 3), \quad \vec{d}_s = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (1, 1, 0)$$

Aleshores:

$$\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{0} \Rightarrow \vec{d}_r \text{ i } \vec{d}_s \text{ no són paral·lels}$$

- Per tant, com les rectes no s'intersequen i no tenen la mateixa direcció. Llavors es creuen.

**Exercici 149.** Calculeu el punt d'intersecció entre aquestes rectes:

- a)  $r: \{x + 2y + 3z + 1 = 0, x - y + z = 0\}$  i  $s: \{2x + y + 4z + 1 = 0, x - y + z + 3 = 0\}$   
 b)  $r: \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$  i  $s: \{3x - 3y + 2z - 1 = 0, x + y - 7 = 0\}$   
 c)  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$  i  $s: \{2x - 6y + z - 1 = 0, x - z + 3 = 0\}$

### 5.6.3 Punt d'intersecció entre una recta i un pla

**Exemple 91.** Calculeu el punt d'intersecció entre la recta

$$r: \{x - 2y + z + 3 = 0, 2x - y + z - 4 = 0\}$$

i el pla  $\pi: 3x - y + 2z - 1 = 0$ .

- El punt d'intersecció que cercam és la solució del sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Una altra manera de trobar-lo és resoldre el sistema passant la recta a la forma paramètrica en primer lloc; queda, aleshores:

$$\left. \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

- Substituint:

$$3(-\lambda) - (7 + \lambda) + 2(11 + 3\lambda) - 1 = 0; \quad 2\lambda + 14 = 0; \quad \lambda = -7$$

Llavors el punt d'intersecció és

$$\left. \begin{array}{l} x = -(-7) = 7 \\ y = 7 + (-7) = 0 \\ z = 11 + 3(-7) = -10 \end{array} \right\} = (7, 0, -10)$$

Exercici 150. Calculeu el punt d'intersecció entre les rectes i plans següents:

a)  $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+2}{5}$  i  $\pi : 3x - y + 2z - 1 = 0$

b)  $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$  i  $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$

c)  $r : \{x + 2y + 3z - 1 = 0, y - z - 3 = 0\}$  i  $\pi : x + 2y + 3z + 3 = 0$

## 5.7 Exercicis proposats

### 5.7.1 Vectors

Exercici 151. Quins dels vectors següents tenen la mateixa direcció?

$$\vec{a}(1, -3, 2), \quad \vec{b}(2, 0, 1), \quad \vec{c}(-2, 6, -4), \quad \vec{d}(5, -15, 10), \quad \vec{e}(10, -30, 5)$$

Exercici 152. Donats els vectors  $\vec{a}(1, -3, 2)$  i  $\vec{b}(2, 0, 1)$ , calculeu:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b)  $|\vec{a}|$  i  $|\vec{b}|$

c) l'angle que formen entre si  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$

Exercici 153. Donats  $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$  i  $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ , calculeu  $m$  per a què els vectors siguin:

a) paral·lels,

b) ortogonals.

Exercici 154. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors  $\vec{a}(1, 2, 3)$  i  $\vec{b}(2, -2, 1)$ .

Exercici 155. Calculeu  $m$  per a què el vector  $\vec{a}(1, 3, m)$  sigui ortogonal al vector  $\vec{b}(1, -2, 3)$ .

Exercici 156. Calculeu l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors  $\vec{a}(1, -3, 2)$  i  $\vec{b}(2, 0, 1)$ .

Exercici 157. Trobeu un vector perpendicular a  $\vec{u}(2, 3, 1)$  i a  $\vec{v}(-1, 3, 0)$  i que sigui unitari.

Exercici 158. Trobeu un vector ortogonal a  $\vec{u}(1, -1, 0)$  i  $\vec{v}(2, 0, 1)$  i el mòdul del qual sigui  $\sqrt{24}$ .

Exercici 159. Calculeu  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , amb  $\vec{u}(1, -1, 0)$ ,  $\vec{v}(2, 0, 1)$  i  $\vec{w}(2, 0, -2)$ .

Exercici 160. Calculeu el volum del paral·lelepípede determinat pels vectors  $\vec{u}(1, -1, 0)$ ,  $\vec{v}(2, 0, 1)$  i  $\vec{w}(2, 0, -2)$ .

Exercici 161. Calculeu el valor de  $m$  perquè  $\vec{u}(2, -3, 1)$ ,  $\vec{v}(1, m, 3)$  i  $\vec{w}(-4, 5, -1)$  siguin coplanaris.

Exercici 162. Donat el vector  $\vec{v}(-2, 2, -4)$ , trobeu les coordenades dels vectors següents:

- a) unitari i de la mateixa direcció que  $\vec{v}$
- b) paral·lel a  $\vec{v}$  i de mòdul 6.

Exercici 163. Trobeu un vector ortogonal a  $\vec{u}(2, 3, -1)$  i a  $\vec{v}(1, 4, 2)$  la tercera component del qual sigui 1.

Exercici 164. Calculeu les coordenades d'un vector  $\vec{u}$  que sigui ortogonal a  $\vec{v}(1, 2, 3)$  i  $\vec{w}(1, -1, 1)$  i tal que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$ .

### 5.7.2 Punts

Exercici 165. Comproveu si els punts  $A(1, -2, 1)$ ,  $B(2, 3, 0)$  i  $C(-1, 0, -4)$  estan alineats o no.

Exercici 166. Trobeu el punt simètric del punt  $A(-2, 3, 0)$  respecte del punt  $M(1, -1, 2)$ .

Exercici 167. Calculeu  $a$  i  $b$  per a què els punts  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(3, 0, -2)$  i  $C(4, a, b)$  estiguin alineats.

### 5.7.3 Rectes i plans

Exercici 168. Associeu els conceptes de punt, vector, recta i pla al pla o a l'espai amb qualcuna o qualcunes de les expressions següents:

a)  $\vec{A}(2, -3, 1)$

b)  $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$

d)  $A(2, -3, 1)$

e)  $x + y = 2$

f)  $\begin{cases} x = -2\lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$

g)  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

h)  $\frac{x-1}{0} = y + 3 = \frac{z}{-6}$

Exercici 169. Escriviu les equacions de la recta  $r$  que passa pels punts  $A(-3, 2, 1)$  i  $B(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ .

Exercici 170. Trobeu les equacions de la recta que passa pel punt  $A(-4, 2, 5)$  i és paral·lela a l'eix  $OZ$ .

Exercici 171. Comproveu si els punts  $A(1, -2, 1)$ ,  $B(2, 3, 0)$ ,  $C(-1, 0, -4)$  i  $D(4, 0, -5)$  es troben en un mateix pla o no.

Exercici 172. Trobeu les equacions paramètrica i contínua la recta

$$\left. \begin{aligned} -x + 3y - z + 10 &= 0 \\ 2x + y - z - 6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

#### 5.7.4 Posició relativa de rectes

Exercici 173. Estudieu la posició relativa de les rectes següents, i trobeu el seu punt de tall quan sigui possible:

a)  $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$  i  $s : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$

b)  $r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$  i  $s : \frac{x-4}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$

c)  $r : \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{3}$  i  $s : \{x - 2y - 1 = 0, 3y - z + 1 = 0\}$

d)  $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$  i  $s : \{x = 3 + 4\lambda, y = 3 + 6\lambda, z = 4 + 8\lambda\}$

Exercici 174. Calculeu el valor de  $a$  per a què les rectes  $r$  i  $s$  es tallin, i trobeu el seu punt de tall:

$$\begin{aligned} r &: x = y = z - a \\ s &: \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0} \end{aligned}$$

Exercici 175. Calculeu els valors de  $m$  i  $n$  per a què les rectes  $r$  i  $s$  siguin paral·leles:

$$r : \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \quad s : \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

#### 5.7.5 Plans

Exercici 176. Calculeu les equacions dels plans següents:

a) passa pel punt  $P(2, -3, 1)$  i el vector normal del qual és  $\vec{n}(5, -3, -4)$

b) perpendicular a la recta  $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$  i que passa pel punt  $(1, 0, 1)$

Exercici 177. Trobeu l'equació implícita dels plans següents:

- Pla que passa pels punts  $P_1 = (1, 0, -1)$ ,  $P_2 = (1, 3, 0)$  i  $P_3 = (2, -1, 3)$
- Pla que passa pel punt  $Q = (3, 0, 1)$  i és paral·lel al pla  $3x - 2y + 5z + 1 = 0$

Exercici 178. Calculeu  $m$  i  $n$  per a què els plans  $\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0$  i  $\beta: 2x + ny - z - 3 = 0$  siguin paral·lels. Poden ser coincidents?

Exercici 179. Determineu l'equació del pla que conté el punt  $P(2, 1, 2)$  i la recta  $x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$ .

Exercici 180. Comproveu que les rectes  $r: \frac{x-1}{2} = y = z - 2$  i

$$s: \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

són paral·leles, i troba l'equació del pla que les conté.

Exercici 181. Determineu el valor de  $a$  per a què les rectes  $r$  i  $s$  siguin coplanàries:

$$r: x = y - a = \frac{z}{0}, \quad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Trobeu l'equació del pla que les conté.

Exercici 182. Estudieu la posició relativa de la recta  $r: \frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z}{-1}$  i el pla  $\pi: x - y + z - 3 = 0$ .

Exercici 183. Trobeu l'equació del pla que passa pels punts  $A(1, 3, 2)$  i  $B(-2, 5, 0)$  i és paral·lel a la recta

$$r: \{x = 3 - \lambda, y = 2 + \lambda, z = -2 - 3\lambda\}$$

Exercici 184. Trobeu l'equació del pla que conté la recta

$$r: \{x = 2 + 3\lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda\}$$

i és paral·lel a  $s: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ .

Exercici 185. Calculeu el valor de  $m$  per a què els punts  $A(m, 0, 1)$ ,  $B(0, 1, 2)$ ,  $C(1, 2, 3)$  i  $D(7, 2, 1)$  estiguin en un mateix pla. Quina és l'equació d'aquest pla?

Exercici 186. Donat el pla  $\pi: 2x - 3y + z = 0$  i la recta  $r: x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ , trobeu l'equació del pla que conté la recta  $r$  i és perpendicular al pla  $\pi$ .

Exercici 187. Escriviu l'equació del pla que passa pels punts  $A(1, -3, 2)$  i  $B(0, 1, 1)$  i és paral·lel a la recta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Exercici 188. Estudieu la posició relativa de la recta  $r : \{x = 3, y = 2\}$  i el pla  $z = 1$ .

Exercici 189. Estudieu les posicions relatives del pla  $\pi : x + ay - z = 1$  i la recta

$$r : \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

segons els valors de  $a$ .

Exercici 190. Trobeu la recta que passa pel punt  $A = (1, 1, -1)$ , és paral·lela al pla  $\pi \equiv x - y + z = 5$  i talla a l'eix de coordenades  $OZ$ .

Exercici 191. Estudieu la posició relativa dels plans  $\pi \equiv x + 3y - 2z = 7$ ,  $\pi' \equiv x + 2t - az = 5$  i  $\pi'' \equiv ax + z = b$ , segons els valors d' $a$  i de  $b$ . Quan es tallen en una recta? Quina d'elles és la que passa pel punt  $(-1, 4, 2)$ ?

Exercici 192. Donats el punt  $P = (2, 1, 2)$  i la recta resultant de la intersecció dels plans  $4x - y = 12$  i  $z - x = 2$ , trobeu l'àrea del triangle determinat pel punt  $P$ , el punt de la recta més proper a  $P$  i el punt  $Q = (1, 0, -1)$ .

Exercici 193. Donada la recta de l'equació  $\frac{x}{2} = 1 - y = \frac{2z+2}{6}$  i el pla  $\pi$  d'equació  $x + 3y - 3z = -3$ , trobeu:

- El pla que conté a  $r$  i és perpendicular a  $\pi$
- El volum del tetraedre determinat per  $\pi$  i els plans coordenats

Exercici 194. Sigui un pla qualsevol  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ . Proveu que el vector  $\vec{n} = (A, B, C)$  és un vector perpendicular al pla  $\pi$ .

Exercici 195. Sigui  $\pi$  el pla d'equació  $3x + 2y - z = 1$  i  $r$  la recta d'equacions  $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ . Estudieu si els punts  $P = (1, 0, 0)$ ,  $Q = (2, -3, -4)$ ,  $R = (0, 1, 1)$  i  $S = (0, 0, -1)$  pertanyen al pla  $\pi$  o a la recta  $r$ .

Exercici 196. Trobeu les posicions relatives entre aquests plans. En cas de que es tallin, trobeu l'equació contínua de la recta:

- $\pi_1 : 3x + 3y + z - 1 = 0$  i  $\pi_2 : x - 5y + 5z = 0$
- $\pi_1 : x + 2y + z = 0$  i  $\pi_2 : x + 2yz - 2 = 0$
- $\pi_1 : 2x + 4y + z = 0$  i  $\pi_2 : 10x + 20y + 5z + 2 = 0$
- $\pi_1 : 2x + 8z - 10 = 0$  i  $\pi_2 : 2x + 8y - 10 = 0$

### 5.7.6 Altres

Exercici 197. Estudieu la posició relativa de les rectes

$$r : \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \quad \text{i} \quad s : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

i trobeu l'angle que formen entre si.

Exercici 198. Trobeu, en cada cas, l'angle que formen la recta i el pla:

$$a) r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2}, \pi : x - 2y - z + 1 = 0$$

$$b) r : \{x = \lambda, y = 1 + 2\lambda, z = -2\}, \pi : 2x - y + z = 0$$

$$c) r : \frac{x-1}{2} = y - 3 = z \pi : x + z = 17$$

Exercici 199. Calculeu l'angle que formen els plans  $\alpha : z = 3$  i  $\beta : x - y + 2z + 4 = 0$ .

## 5.8 Exercicis resolts de geometria de l'espai

Exemple 92. Trobeu un punt qualsevol de la recta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

i calculeu el seu vector director.

*Solució.* Qualsevol punt de la recta ha de complir les equacions que la defineixen. Per a trobar-ne un, donem un valor qualsevol a les variables. Per exemple  $y = 0$  i substituïm aquest valor en les equacions de la recta:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 \cdot 0 + z + 3 = 0 \\ 2x - 0 + z - 4 = 0 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x + z + 3 = 0 \\ 2x + z - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

Les solucions d'aquest sistema són  $x = 7, z = -10$ , per la qual cosa el punt que cercam és

$$(7, 0, -10)$$

El vector director de la recta és

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1, -2, 1) \wedge (2, -1, 1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1, 1, 3) \end{aligned}$$

■

Exemple 93. Trobeu un punt qualsevol del pla  $\pi : -x + 5y + 2z - 1 = 0$  i un vector perpendicular a ell.



*Solució.* Un punt qualsevol del pla ha de satisfer la seva equació. Per tant, donem valors qualssevol a les variables, per exemple  $y = 0$  i  $z = 0$ , i substituïm aquests valors a l'equació del pla:

$$-x + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 = 0; -x - 1 = 0; x = -1$$

Per tant, un punt del pla és

$$(-1, 0, 0)$$

Un vector perpendicular al pla és el seu vector normal:  $\vec{n} = (-1, 5, 2)$ . ■

**Exemple 94.** Passeu a forma paramètrica la recta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

*Solució.* Per poder escriure una recta en forma paramètrica necessitem un vector director d'ella i un punt qualsevol dels seus punts.

Calculem el vector director de la recta:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1, -2, 1) \wedge (2, -1, 1) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1, 1, 3) \end{aligned}$$

Cerquem ara un punt de la recta. Aquest punt ha de complir les equacions  $x - 2y + z + 3 = 0$  i  $2x - y + z - 4 = 0$ . Fem, per exemple,  $x = 0$ . Aleshores, substituint aquest valor a les dues equacions anteriors queda el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} -2y + z &= -3 \\ -y + z &= 4 \end{aligned} \right\},$$

la solució del qual és  $y = 7, z = 11$ . Així, un punt de la recta és  $A(0, 7, 11)$ .

L'equació en forma paramètrica és, aleshores

$$r : \begin{cases} x = 0 + (-1)\lambda \\ y = 7 + 1\lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{cases} = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 7 + \lambda \\ z = 11 + 3\lambda \end{cases}$$

■

## 5.9 Recull de fórmules de geometria de l'espai

1. La suma de dos vectors  $\vec{u}(a, b, c)$  i  $\vec{w}(a', b', c')$ :

$$\vec{u} + \vec{w} = (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$

2. La diferència de dos vectors,  $\vec{u}(a, b, c)$  i  $\vec{w}(a', b', c')$ :

$$\vec{u} - \vec{w} = (a, b, c) - (a', b', c') = (a - a', b - b', c - c')$$

3. El producte d'un nombre  $k$  per un vector  $\vec{u}(a, b, c)$ :

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (a, b, c) = (ka, kb, kc)$$

4. Els components del vector d'origen en el punt  $P(x_1, y_1, z_1)$  i extrem en el punt  $Q(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

5. El mòdul del vector  $\vec{u}(a, b, c)$  :

$$|\vec{u}| = |(a, b, c)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

6. El producte escalar de dos vectors,  $\vec{u}(a, b, c)$  i  $\vec{w}(a', b', c')$ , en una base ortonormal:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + bb' + cc'$$

D'altra banda, es compleix que

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha$$

on  $\alpha$  és l'angle que formen  $\vec{u}$  i  $\vec{w}$ .

7. El producte vectorial de dos vectors,  $\vec{u}(a, b, c)$  i  $\vec{w}(a', b', c')$ , en una base ortonormal:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{w} &= (a, b, c) \wedge (a', b', c') \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \\ &= \left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

A més,

$$|\vec{u} \wedge \vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \alpha$$

on  $\alpha$  és l'angle que formen  $\vec{u}$  i  $\vec{w}$ .

8. El producte mixt de tres vectors:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

També es pot calcular amb la fórmula

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

9. El valor absolut de  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  dóna el volum del paral·lelepípede definit pel vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , i  $\vec{w}$ , és a dir:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

10. El volum del tetraedre format pel vectors  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  és igual a

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

11. El punt mitjà del segment definit pels punts  $P(x_1, y_1, z_1)$  i  $Q(x_2, y_2, z_2)$ :

$$P_M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

12. L'equació paramètrica d'una recta:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + \lambda d_x \\ y = y_1 + \lambda d_y \\ z = z_1 + \lambda d_z \end{cases},$$

on  $P(x_1, y_1, z_1)$  és qualsevol punt de la recta i  $\vec{d}_r(d_x, d_y, d_z)$  és el vector director de la recta.

13. L'equació en forma contínua d'una recta:

$$r: \frac{x - x_1}{d_x} = \frac{y - y_1}{d_y} = \frac{z - z_1}{d_z},$$

on  $P(x_1, y_1, z_1)$  és qualsevol punt de la recta i  $\vec{d}_r(d_x, d_y, d_z)$  és el vector director de la recta.

14. L'equació paramètrica d'un pla:

$$\pi: \begin{cases} x = x_1 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_1 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_1 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases},$$

on  $P(x_1, y_1, z_1)$  és qualsevol punt del pla i  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  i  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  són vectors paral·lels al pla i que no són paral·lels entre si.

15. L'equació implícita d'un pla es pot trobar amb

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & u_x & v_x \\ y - y_1 & u_y & v_y \\ z - z_1 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0,$$

on  $P(x_1, y_1, z_1)$  és qualsevol punt del pla i  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  i  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  són vectors paral·lels al pla i que no són paral·lels entre si.

16. L'equació implícita d'un pla és de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on  $\vec{n}(A, B, C)$  és un vector perpendicular al propi pla, que s'anomena vector normal del pla.

17. El vector director d'una recta expressada com la intersecció de dos plans, és a dir, expressada de la forma

$$r : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

és igual a

$$\vec{d}_r = (A, B, C) \wedge (A', B', C') =$$

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right)$$

18. Un vector perpendicular al pla d'equació  $Ax + By + Cz + D = 0$  és el vector

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

19. L'angle entre dues rectes,  $r$  i  $s$ :

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|},$$

on  $\vec{d}_r$  i  $\vec{d}_s$  són els vectors directors de cadascuna de les rectes.

20. L'angle entre dos plans,  $\pi_1$  i  $\pi_2$ :

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|},$$

on  $\vec{n}_{\pi_1}$  i  $\vec{n}_{\pi_2}$  són els vectors normals a cadascun dels plans.

21. L'angle entre una recta i un pla:

$$\alpha = \arcsin \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|},$$

on  $\vec{d}_r$  és el vector director de la recta i  $\vec{n}_\pi$  és el vector normal al pla.

22. Per calcular els productes escalars o l'angle que formen plans i rectes, convé tenir present la taula següent (Taula 5.1).

	0 rad	$\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad	$\pi/3$ rad	$\pi/2$ rad	$\pi$ rad	$3\pi/2$ rad
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0
$\tan \alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\bar{\exists}$	0	$\bar{\exists}$

Taula 5.1: Valors dels sinus, cosinus i tangent pels angles més usuals

Encara que qualsevol d'aquests valors es pot calcular amb una calculadora científica.

## 5.10 Solucions

- 151  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  i  $\vec{d}$  són paral·lels.
- 152 a) 4, b) El mòdul de  $\vec{a}$  és  $\sqrt{14}$  i el mòdul de  $\vec{b}$  és  $\sqrt{5}$ , c) l'angle que formen és, aproximadament, de  $61,43^\circ$
- 153 a)  $m = -2$ , b)  $m = \frac{2}{5}$
- 154  $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{280}} \sim 86,57^\circ$
- 155  $m = \frac{5}{3}$
- 156  $\sqrt{54}$
- 157  $\frac{1}{\sqrt{91}} \overrightarrow{(-3, -1, 9)}$
- 158  $\overrightarrow{(-2, -2, 4)}$  o  $\overrightarrow{(2, 2, -4)}$
- 159  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -6$
- 160  $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |-6| = 6$
- 161  $m = -4$
- 162 a)  $1/\sqrt{24} \overrightarrow{(-2, 2, -4)}$ , b)  $\overrightarrow{(-12/\sqrt{24}, 12/\sqrt{24}, -24/\sqrt{24})}$
- 163  $\overrightarrow{(2, -1, 1)}$
- 164  $\overrightarrow{(95/30, 57/45, -57/30)}$
- 165 No estan alineats
- 166 El punt és  $A' = (4, -5, 4)$
- 167  $a = -1$  i  $b = \frac{-5}{2}$
- 168 a) vector b) punt al pla (és una intersecció de dues rectes) i recta a l'espai (és la intersecció de dos plans a l'espai) c) recta en forma paramètrica a l'espai d) punt a l'espai e) recta al pla i pla a l'espai f) pla a l'espai en forma paramètrica g) punt al pla h) recta a l'espai en forma contínua.
- 169 a) Forma vectorial  $r \equiv (-3, 2, 1) + \lambda \overrightarrow{(-2, 1, -1)}$ , b) Forma paramètrica
- $$r \equiv \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad c) \text{ Forma contínua } r \equiv \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1},$$
- d) Forma implícita  $r \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -y - z + 3 = 0 \end{cases}$

- 170 a) Forma vectorial  $r \equiv (-4, 2, 5) + \lambda \overrightarrow{(0, 0, 1)}$ , b) Forma paramètrica  
 $r \equiv \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$  c) Forma contínua  $r \equiv \frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$ , d) Forma  
 implícita  $r \equiv \begin{cases} x + 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$
- 171 No estan en el mateix pla.
- 173 a) S'encreuen, b) s'encreuen, c) s'encreuen, d) coincidents
- 174 Es tallen
- 175  $m = 12$  i  $n = -3$
- 176 a)  $\pi: 5x - 3y + 4z - 23 = 0$ , b)  $2x - y + 3z + 1 = 0$
- 177 a)  $\pi \equiv 13x - y - 3z - 16 = 0$ , b)  $\pi \equiv 3x - 2y + 5z - 14 = 0$
- 178 Per ser paral·lels  $m = 6$  i  $n = \frac{1}{3}$ . No són coincidents.
- 179  $\pi: 2x - y + z - 5 = 0$ .
- 180 L'equació del pla que les conté és  $2x + 16y - 20z + 38 = 0$ .
- 181  $a = -2$ ; el pla que les conté és  $\pi: x - y - 2z - 2 = 0$ .
- 182  $r$  és paral·lela a  $\pi$ .
- 183  $4x + 7y + z - 27 = 0$
- 184  $x + 14y + 11z + 12 = 0$
- 185  $m = -1$ ;  $\pi: -x + 4y - 3z + 2 = 0$
- 186  $-5x - 3y + z + 12 = 0$
- 187  $11x - 4y + 5z - 1 = 0$
- 188 Secants.
- 189 Si  $a \neq -1$  o  $a \neq 2$ , llavors són secants. Si  $a = -1$ , llavors són paral·lels. Si  $a = 2$ , llavors  $r$  està continguda a  $\pi$ .
- 197 S'encreuen. L'angle que formen és, aproximadament,  $54, 74^\circ$
- 198 a) Aproximadament  $41, 81^\circ$  b)  $0$  c)  $60^\circ$





Part III

Probabilitat



## 6

# Experiències aleatòries

En aquest capítol ens ocuparem de les definicions, més o menys formals, que permeten definir el concepte de probabilitat.

**Definició 42 (experiència).** Una *experiència* o *experiment* és qualsevol procediment, pràctica o simplement aconteixement en el que les regles de joc, és a dir, com s'ha de realitzar aquest, estan clares des d'un principi i en el que es mesura cert resultat final.

En principi existeixen variables rellevants a l'experiment i altres de negligibles.

**Exemple 95.** Exemples d'experiments serien:

- a) Llançar una moneda i mirar-ne el resultat

En aquest experiment les variables rellevants serien, per exemple, la distribució de pesos de les cares, la forma de la moneda i el mètode de tir.

- b) Accelerar un vehicle fins a una velocitat concreta i després frenar bruscament i mirar la distància recorreguda

En aquest experiment les variables rellevants seiren la velocitat just abans de frenar, el pes del vehicle, la pendent del terreny i la força de fregament.

- c) Comptar la freqüència absoluta dels colors dels cotxes en un aparcament per a determinar el color més freqüent.

En aquest darrer experiment, les variables rellevants serien, per exemple, el nombre de cotxes de cada tipus de color a l'aparcament.

**Definició 43 (experiment determinista).** Un *experiment determinista* és aquell experiment la repetició del qual produeix idèntics resultats, és a dir, per al mateix valor de les variables rellevants, s'obté el mateix resultat<sup>1</sup>. Per tant, el resultat de l'experiment es pot conèixer abans de dur-lo a terme una vegada estudiat aquest prèviament.

**Definició 44 (experiment aleatori).** Un *experiment aleatori* és aquell experiment que es caracteritza per la imprevisibilitat del seu desenllaç, a pesar de què s'executi sempre amb les mateixes condicions. En general, depèn de l'atzar.

Els experiments aleatoris tenen les característiques següents:

- En la realització de cada repetició, el seu resultat pot diferir
- Si repetim les proves calculant les seves freqüències relatives<sup>2</sup> de cadascun dels resultats possibles, llavors aquestes freqüències tendeixen a estabilitzar-se cap a un nombre fix, que és el que anomenarem *probabilitat*

**Exemple 96.** En l'exemple anterior, [exemple 95](#), el llançament de la moneda seria un experiment aleatori, l'experiment de la frenada del vehicle seria un experiment determinista i l'experiment dels colors dels vehicles es consideraria un experiment aleatori.

En aquesta part ens ocuparem dels experiments aleatoris.

## 6.1 Espai mostral i esdeveniments

**Definició 45 (espai mostral).** S'anomena *espai mostral* al conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori. Es sol designar per  $E$  o per  $\Omega$ .

**Exemple 97.** Si llançam un dau, l'espai mostral és  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Si llançam una moneda, l'espai mostral és  $E = \{C, X\}$  (hem obviat que ens pugui sortir cantó).

**Exemple 98.** En l'experiment corresponent a extreure una bola d'una urna amb tres bolles vermelles ( $V$ ), dues de blaves ( $B$ ) i 4 de negres ( $N$ ), l'espai mostral és  $E = \{V, B, N\}$ .

<sup>1</sup>Tècnicament, si les condicions inicials són les mateixes, les condicions finals també ho són.

<sup>2</sup>Recordem que la freqüència relativa no és res més que la divisió entre el nombre de vegades que apareix un resultat dividit pel nombre total de proves. És el tant per u d'aparició.

Hi ha exemples d'espais mostrals més complicats.

**Exemple 99.** Si llançam dues monedes l'espai mostral és

$$E = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

Recordem que la notació  $(a, b)$  denota un parell ordenat. Per tant, el resultat  $(C, X)$  no és el mateix que el resultat  $(X, C)$ . En el primer cas, voldria dir que la moneda és cara i el segona moneda ha donat creu. El segon cas és totalment el contrari.

Si no tenguéssim en compte l'ordre, és a dir, si per a nosaltres les monedes fossin indistingibles<sup>3</sup>, llavors l'espai mostral seria

$$E = \{CC, CX, XX\}$$

De forma intuïtiva està clar que la probabilitat de  $CX$  en el segon cas seria major que la probabilitat de  $(C, X)$  en el primer, ja que *compta doble*. Per tant, hem d'anar molt alerta de si prenem els resultats amb ordre o no.

**Exemple 100.** Si llançéssim dos daus, l'espai mostral seria

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & (1, 5), & (1, 6), \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & (2, 5), & (2, 6), \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), & (3, 5), & (3, 6), \\ (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4), & (4, 5), & (4, 6), \\ (5, 1), & (5, 2), & (5, 3), & (5, 4), & (5, 5), & (5, 6), \\ (6, 1), & (6, 2), & (6, 3), & (6, 4), & (6, 5), & (6, 6) \end{array} \right\}$$

**Exemple 101.** En l'experiment consistent en llançar una moneda i posteriorment un dau, l'espai mostral és

$$E = \left\{ \begin{array}{cccccc} (C, 1), & (C, 2), & (C, 3), & (C, 4), & (C, 5), & (C, 6), \\ (X, 1), & (X, 2), & (X, 3), & (X, 4), & (X, 5), & (X, 6) \end{array} \right\}$$

Notem que si l'experiment consistís en tirar primer el dau i després la moneda, llavors l'espai mostral seria:

Si no s'especifica l'ordre amb el qual llancem les coses, l'ordre amb el qual escrivim els resultats no té importància, però una vegada decidit s'ha de mantenir al llarg de tot l'exercici.

**Exercici 200.** Escriviu l'espai mostral corresponent als experiments següents:

- a) Un dau de quatre cares
- b) Tres monedes

**Definició 46 (esdeveniment).** S'anomena *esdeveniment* (o *succés*) a qualsevol subconjunt de  $E$ .

<sup>3</sup>Ho sigui si només comptéssim el nombre de cares i el nombre de creus.

**Exemple 102.** a) En l'experiment aleatori del llançament d'una moneda, tenim que els seus esdeveniments són:  $\{C, X\}$ ,  $\{C\}$ ,  $\{X\}$  i  $\emptyset$ .  $\emptyset$  denota el *conjunt buit*, el qual no té cap element.

b) Els esdeveniments de l'experiment consistent en llançar un dau serien  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ , ...,  $\{1, 2\}$ , ...,  $\{1, 2, 3\}$ , ...,  $\{3, 5, 6\}$ , ...,  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Exercici 201.** Escriviu tots els possibles esdeveniments corresponents als experiments següents:

- a) Llançar un dau de 4 cares
- b) Llançar dues monedes ([exemple 99](#))
- c) Extreure una bolla d'una urna de l'[exemple 98](#)

**Exercici 202.** Escriviu quatre esdeveniments corresponents als experiments:

- a) Llançar dos daus ([exemple 100](#))
- b) Llançar una moneda i un dau ([exemple 101](#))

**Proposició 27.** En un experiment aleatori, si el seu espai mostral  $E$  és finit i té  $n$  elements, llavors hi ha  $2^n$  possibles esdeveniments.

**Definició 47 (esdeveniment elemental).** Un *esdeveniment elemental* és qualsevol esdeveniment que té un sol element. En cas contrari, quan l'esdeveniment tengui més d'un element, es diu *esdeveniment compost*.

**Exemple 103.** Referint-nos al llançament d'un dau de sis cares, els seus esdeveniments elementals són  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{5\}$ ,  $\{6\}$ . Esdeveniments compostos són, per exemple  $\{2, 3, 6\}$  i  $\{1, 5\}$  o el mateix  $E$ .

En el llançament d'una moneda, els seus esdeveniments elementals són  $\{C\}$  i  $\{X\}$  i els seus esdeveniments compostos són  $\{C, X\}$ .

**Definició 48 (esdeveniment impossible).** S'anomena *esdeveniment impossible* a aquell esdeveniment que mai pot ocórrer. És el conjunt buit,  $\emptyset$ .

**Definició 49 (esdeveniment segur).** S'anomena *esdeveniment segur* al que sempre es verifica. Correspon a l'espai mostral,  $E$ .

**Exemple 104.** En el llançament de dues monedes l'esdeveniment segur és

$$\{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

**Exercici 203.** Trobeu els esdeveniments segurs i impossibles dels exercicis [exercici 201](#) i [exercici 202](#).

## 6.2 Operacions amb esdeveniments

**Definició 50 (unió d'esdeveniments).** La *unió* de dos esdeveniments,  $A$  i  $B$ , és aquell esdeveniment, denotat per  $A \cup B$ , format per cada element que hi ha en  $A$  o en  $B$ .

Col·loquialment, la unió de dos esdeveniments és aquell esdeveniment que ocorre quan ocorre, al menys, un dels dos. De la definició es veu que  $A \cup B$  és el mateix que  $B \cup A$ .

Gràficament, aquest concepte es pot representar mitjançant un *diagrama de Venn* (Figura 6.1a):

**Definició 51 (intersecció d'esdeveniments).** La *intersecció* de dos esdeveniments,  $A$  i  $B$ , és aquell esdeveniment, denotat per  $A \cap B$ , format per aquells elements que estan simultàniament a  $A$  i a  $B$ . Dos esdeveniments són *incompatibles* si la seva intersecció és el conjunt buit. En cas contrari, es diu que són *compatibles*.

De manera informal, l'esdeveniment intersecció de dos esdeveniments és aquell que ocorre quan ocorren ambdós. De la definició es veu que  $A \cap B$  és el mateix que  $B \cap A$  (Figura 6.1b).

**Definició 52 (esdeveniment contrari).** Donat un esdeveniment  $A$ , el seu *esdeveniment contrari* o *complementari*, que es denota per  $A^c$  o  $\bar{A}$ , és l'esdeveniment format per tots els elements de l'espai mostral que no són de  $A$ . És a dir, l'esdeveniment contrari de  $A$  es verifica quan no ocorre  $A$  (Figura 6.1d).

**Definició 53 (diferència d'esdeveniments).** Donats dos esdeveniments,  $A$  i  $B$ , la *diferència* entre  $A$  i  $B$ , que es denota per  $A \setminus B$  (o  $A - B$ ), és l'esdeveniment format pels elements de  $A$  que no estan en  $B$  (Figura 6.1c).

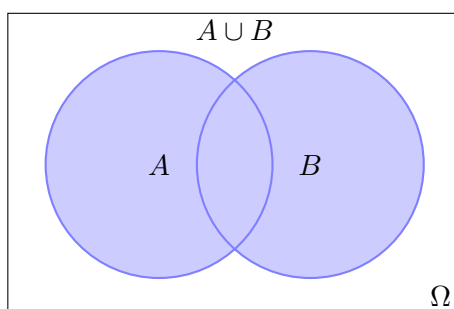
**Exemple 105.** En l'experiment de llançar un dau i mirar el resultat, tenim que  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Si agafam  $A =$  que surti parell i  $B =$  que surti un nombre menor que 5, tenim que:

- $A \cup B =$  que surti parell o menor que 5  $= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ . Per tant,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .
- $A \cap B =$  que surti parell i menor que 5  $= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$ . Per tant,  $A \cap B = \{2, 4\}$ .
- $A \setminus B = \{6\}$
- $B \setminus A = \{1, 2\}$
- $A^c =$  el contrari de què surti parell  $= \{1, 3, 5\}$
- $B^c =$  el contrari de què surti un nombre menor que 5  $= \{5, 6\}$

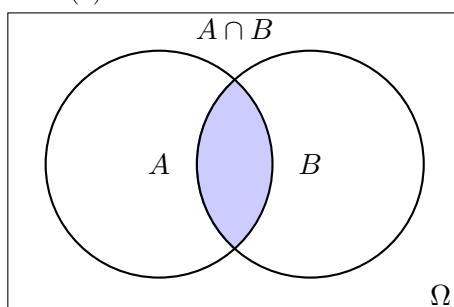
### 6.2.1 Propietats de les operacions

Les operacions sobre el conjunt d'esdeveniments anteriorment descrites satisfan certes propietats. Si  $A$ ,  $B$  i  $C$  són esdeveniments qualssevol i  $E$  denota l'espai mostral, aleshores:

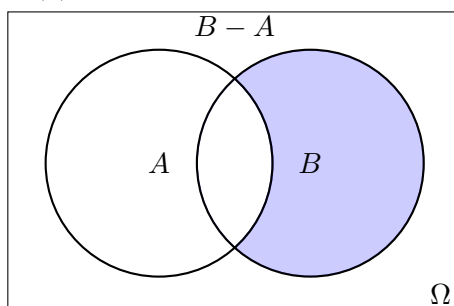
a)  $A \cup E = E$ ;  $A \cup \emptyset = A$ ;  $A \cup A^c = E$



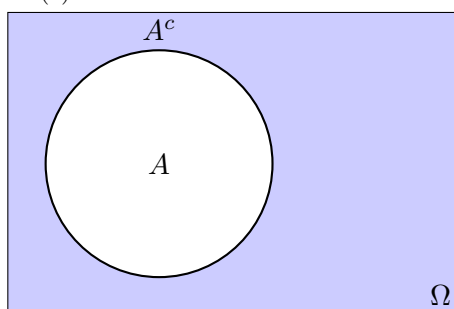
(a) Unió de dos esdeveniments



(b) Intersecció de dos esdeveniments



(c) Diferència de dos esdeveniments



(d) Complementari d'un esdeveniment

Figura 6.1: Operacions entre esdeveniments representats mitjançant diagrames de Venn



- b)  $A \cap E = A$ ;  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $A \cap A^c = \emptyset$
- c)  $A \setminus B = A \cap B^c$
- d)  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$
- e) Idempotència:  $(A^c)^c = A$
- f) Commutatives:
- (a)  $A \cup B = B \cup A$
- (b)  $A \cap B = B \cap A$
- g) Associatives:
- (a)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- (b)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- h) Distributives:
- (a)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

En particular:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

i) *Lleis de De Morgan*

- (a)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- (b)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

**Observació 22.** Les més importants són les propietats distributives i les lleis de De Morgan.

**Exercici 204.** Es disposa d'una urna amb bolles numerades de l'1 al 16, de la qual s'extreu una bolla. Considerem els esdeveniments següents:

- a)  $A =$  treure un 7
- b)  $B =$  treure un nombre menor que 7
- c)  $C =$  treure un nombre parell
- d)  $D =$  treure un múltiple de 3

Calculeu a)  $\Omega$ , b)  $A \cap B$ , c)  $A \cup B$ , d)  $B \cap C$ , e)  $C \cap D$ , f)  $C \cup D$ , g)  $B^c$ , h)  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ . Existeixen esdeveniments incompatibles entre si?

Exercici 205. Es llança una ruleta de 10 costats, numerats de la següent manera: 2, 4, 6, 8, ..., 20, i s'observa el resultat obtingut.

- a) Trobeu l'espai mostral.
- b) Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:
  - (a)  $A =$  “obtenir un nombre parell”
  - (b)  $B =$  “obtenir un nombre senar”
  - (c)  $C =$  “obtenir un múltiple de 3”
  - (d)  $D =$  “obtenir un múltiple de 5”
  - (e)  $E =$  “obtenir un nombre major que 4”
  - (f)  $F =$  “obtenir un nombre menor que 6”
  - (g)  $G =$  “obtenir un múltiple de 3 i 4”
- c) Calculeu els seus esdeveniments contraris.
- d) Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d' $A$  amb cadascun dels altres esdeveniments.
- e) Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

Exercici 206. Aplicant les propietats anteriors, demostreu que:

- a)  $A \cap (A \cap B) = A \cap B$
- b)  $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
- c)  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
- d)  $(A^c \cap B) \cup A = A \cup B$
- e)  $(A \cup B^c) \cap B = A \cap B$
- f)  $((A \setminus B) \cup (B \setminus A))^c = A \cap B$

Exemple 106. D'entre els habitants d'un poble es tria una persona a l'atzar. Considerem els esdeveniments següents:  $A =$  ser soci del casino,  $B =$  ser soci del club de futbol local i  $C =$  ser soci d'alguna associació juvenil.

- a) Expressen en funció de  $A$ ,  $B$  i  $C$  les situacions següents:
  - (a) “ser soci d'alguna d'aquestes associacions”:  $A \cup B \cup C$
  - (b) “ser soci de les tres associacions”:  $A \cap B \cap C$
  - (c) “ser soci només del casino”:  $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
  - (d) “ser soci de, com a màxim, una o dues associacions:  $A \cup B \cup C - (A \cap B \cap C)$ ”
  - (e) “no ser soci de cap de les associacions”:  $\overline{(A \cap B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
  - (f) “ser soci d'una sola associació”:  $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

b) Expressiu el significat dels esdeveniments següents:

- (a)  $A \cup B \cup C$ : “pertànyer a, almenys, ua associació”
- (b)  $\overline{(A \cup B \cup C)}$ : “no ser soci de cap associació”
- (c)  $A \cup B - C$ : “no ser soci de juvenil però sí d’alguna de les altres dues”
- (d)  $\overline{(A \cap B \cap C)}$ : “no ser soci de les tres alhora”
- (e)  $C - (A \cup B)$ : “ser soci, només, de l’associació juvenil”
- (f)  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ : “ser soci de, almenys, dues associacions”

Per ajudar-nos a resoldre cadascun dels apartats, hem fet servir el diagrama de Venn de tres esdeveniments (Figura 6.2).

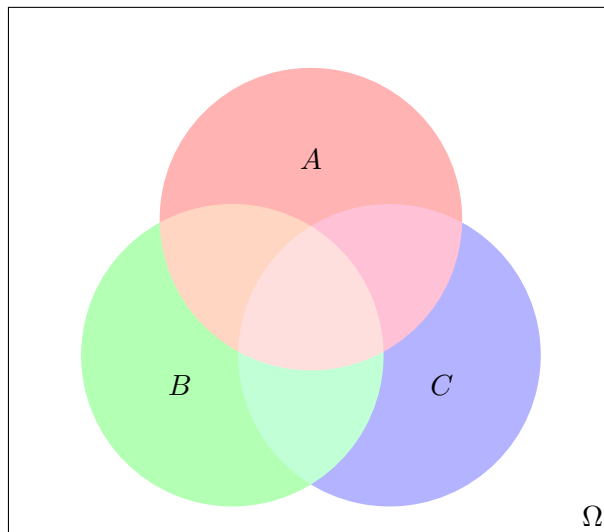


Figura 6.2: Diagrama de Venn de tres esdeveniments

**Exercici 207.** Siguin els esdeveniments següents:  $A =$  “plou avui”,  $B =$  “plou demà” i  $C =$  “plou passat-demà”. Expressiu mitjançant operacions entre esdeveniments:

- a) Plou un dels tres dies, almenys
- b) Plou avui però no demà ni passat-demà
- c) No plou cap dels tres dies
- d) Plou com a màxim dos d’aquests tres dies
- e) Plou avui però no demà

Expliqueu el significat de

a)  $(A \cap B) - C$

d)  $(A \cap B) \cup (C \cap A)$

b)  $(A \cup B) - C$

c)  $A \cup B \cup \overline{C}$

e)  $\overline{A \cup B}$

Exercici 208. Considerem els esdeveniments “ser oient de RNE”, “ser oient de la SER”, “ser oient de M80”. Expreseu, mitjançant operacions amb esdeveniments, els esdeveniments següents: a) “ser oient de només dues emissores”, b) “ser oient de RNE però no de la SER ni de M80”, c) “ser oient de, almenys, una emissora”, d) “escollar alguna emissora però no les tres”, e) “no escollar més d’una emissora”

## 7

# Probabilitat

La probabilitat és la mesura de la certesa de què ocorri un cert esdeveniment aleatori, és a dir, la probabilitat mesura la *facilitat* de què l'esdeveniment tengui lloc: a major probabilitat, majors són les possibilitats de què l'esdeveniment ocorri. A cada esdeveniment se li associa un nombre, de 0 a 1:

- Si la probabilitat d'un esdeveniment és 0, llavors és impossible que ocorri dit esdeveniment
- Si la probabilitat és 1, llavors l'esdeveniment és segur que passarà, en qualsevol cas
- En els altres casos, el valor de la probabilitat indica el tant per u de possibilitats de què l'esdeveniment ocorri.

De manera més formal,

**Definició 54 (probabilitat).** La *probabilitat* és una aplicació que associa a cada esdeveniment  $A$  un nombre,  $p(A)$ , anomenat la probabilitat de  $A$ , que satisfà les propietats següents:

- a)  $p(A) \geq 0$  per a qualsevol esdeveniment  $A$ . És a dir, la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol no pot ser negativa.

- b)  $p(E) = 1$ . La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1.
- c)  $p(\emptyset) = 0$ . La probabilitat de l'esdeveniment impossible és 0.
- d) Si  $A$  i  $B$  són esdeveniments incompatibles, llavors  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .<sup>1</sup>

## 7.1 Propietats de la probabilitat

La definició anterior, té una sèrie de conseqüències: si  $A$  és un esdeveniment qualsevol, llavors:

- a)  $p(A^c) = 1 - p(A)$
- b) Si  $A$  és un subconjunt de  $B$ , llavors  $p(A) \leq p(B)$
- c)  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- d)  $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$  <sup>2</sup>

Amb aquestes propietats podem trobar probabilitats de certs esdeveniments, encara no coneguem quin és l'experiment aleatori que s'ha realitzat, ni fins i tot el seu espai mostral.

**Exemple 107.** Donats els esdeveniments  $A$  i  $B$ , i les probabilitats  $p(A) = 0.1$ ,  $p(B) = 0.2$  i  $p(A \cup B) = 0.25$ , calculeu a)  $p(A^c)$  b)  $p(A \cap B)$ .

- a) Tenim que  $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0.1 = 0.9$
- b) Aplicant la probabilitat de la unió:  $0.25 = 0.1 + 0.2 - p(A \cap B)$ . Per tant,  $p(A \cap B) = 0.1 + 0.2 - 0.25 = 0.05$ .

**Exercici 209.** Si sabem que la probabilitat dels esdeveniments  $A$ ,  $B$  i  $A \cap B$  és  $p(A) = 1/3$ ,  $p(B) = 2/5$  i  $p(A \cap B) = 1/15$ , trobeu les probabilitats de: a) que es compleixi algun dels esdeveniments  $A$  o  $B$  b) que no es compleixi  $A$  però sí  $B$ , c) que es compleixi, només, un esdeveniment d) que no es compleixi ni  $A$  ni  $B$

*Solució.* a)  $2/3$ , b)  $1/3$ , c)  $3/5$ , d)  $1/3$  ■

**Exercici 210.** En un banc hi ha dues alarmes,  $A$  i  $B$ . En cas d'atracament, la probabilitat de què s'activi  $A$ ,  $B$  o ambdues és:  $p(A) = 0,75$ ,  $p(B) = 0,85$  i  $p(A \cap B) = 0,65$ . Trobeu la probabilitat de què: a) s'activi alguna de les dues b) s'activi només una c) no se n'activi cap

<sup>1</sup>La definició axiomàtica de la probabilitat s'escapa de l'abast d'aquest manual. Conceptes com el de  $\sigma$ -àlgebra i  $\sigma$ -additivitat són necessaris per introduir-la.

<sup>2</sup>Es pot demostrar de manera senzilla aquest fet: sabem que  $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$  i  $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ . Aplicant la propietat anterior per  $A \setminus B$  i  $A \cap B$ , tenim que  $p(A) = p((A \setminus B) \cap (A \cap B)) + p(A \cap B) - p(\emptyset)$ . Pel que  $p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$ .

Exercici 211. Determineu si són compatibles o incompatibles els esdeveniments  $A$  i  $B$ , sabent que  $p(A) = 1/4$ ,  $p(B) = 1/2$  i  $p(A \cup B) = 2/3$ .

Exercici 212. Dels esdeveniments  $A$  i  $B$  se sap que  $p(A) = 2/5$ ,  $p(B) = 1/3$  i  $p(A^c \cap B^c) = 1/3$ . Calculeu  $p(A \cup B)$  i  $p(A \cap B)$ .

## 7.2 Regla de Laplace

La *regla de Laplace* permet calcular la probabilitat d'un experiment si els esdeveniments elementals que el formen tenen tots la mateixa probabilitat. En altres paraules, si no hi ha cap biax. En aquest cas, la probabilitat que ocorri un esdeveniment  $A$  és:

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a } A}{\text{nombre de casos possibles}},$$

Exemple 108 (aplicació de la regla de Laplace). Una urna conté 5 bolles blanques, 7 bolles negres i 3 bolles verdes. Se n'extreu una a l'atzar. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui negra?

Tenim que la probabilitat de treure una bolla concreta és la mateixa (les bolles no estan trucades), per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{negra}) = \frac{\text{nombre de bolles negres}}{\text{nombre total de bolles}} = \frac{7}{15}$$

Exemple 109 (aplicació de la regla de Laplace). D'un joc de cartes espanyoles en triam una a l'atzar<sup>3</sup>. Quina és la probabilitat de què aquesta sigui una figura, és a dir un 10, un 11 o un 12?

Treure una carta és un esdeveniment equiprobable, per tant podem aplicar la llei de Laplace:

$$p(\text{figura}) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Exercici 213. En el llançament d'un dau, calculeu la probabilitat de què:

- a) surti un cinc,
- b) surti un nombre parell,
- c) no surti un nombre parell,
- d) surti múltiple de 3.

Exercici 214. A una oficina, un 30% del personal són homes. Es tria una persona a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què aquesta sigui una dona.

Exercici 215. En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

<sup>3</sup>A la baralla espanyola, hi ha 48 cartes: 12 cartes de bastos, 12 d'ors, 12 d'espases i 12 de copes. El 10 s'anomena *sota*, l'11 s'anomena *cavall* i el 12, *rei*.





$p(A | B)$  i es calcula com

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)},$$

amb  $p(B) \neq 0$ .

### 7.3.1 Propietats de la probabilitat condicionada

Si  $A$  i  $B$  són esdeveniments qualssevol, llavors:

a)  $p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ , si  $p(A) \neq 0$ .

b)  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B | A) = p(B) \cdot p(A | B)$

c) Dos esdeveniments són *independents* quan  $p(A | B) = p(A)$ . En aquest cas,  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

**Proposició 28.** Si  $A$  i  $B$  són independents, llavors també ho són  $A^c$  i  $B^c$

Exemple 110 (probabilitat condicionada). En una bossa tenim:

- tres bolles verdes, numerades de l'1 al 3,
- quatre bolles vermelles, numerades del 4 al 7,
- una bolla negra, amb el nombre 8.

de la qual extraïem una bolla. Calculeu  $p(\text{parell}|\text{verda})$ ,  $p(\text{parell}|\text{vermella})$  i  $p(\text{parell}|\text{negra})$ .

Hem de calcular les probabilitats condicionades següents:

$$\begin{aligned} p(\text{parell} | \text{verda}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{verda})}{p(\text{verda})} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} \\ p(\text{parell} | \text{vermella}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{vermella})}{p(\text{vermella})} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2} \\ p(\text{parell} | \text{negra}) &= \frac{p(\text{parell} \cap \text{negra})}{p(\text{negra})} = \frac{1/8}{1/8} = 1 \end{aligned}$$

Exercici 220. D'un joc de cartes se'n treu una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què:

- a) sigui un rei,
- b) sigui una figura,
- c) sigui el rei d'espases,
- d) sigui un rei sabent que ha sortit una figura,

- e) sigui una figura sabent que ha sortit un rei,
- f) sigui el rei d'espases sabent que ha sortit una figura.

**Exemple 111.** A l'exemple anterior (exemple 110), els esdeveniments “parell” i “vermella” són independents, ja que

$$p(\text{parell} \mid \text{vermella}) = p(\text{parell}) = \frac{1}{2}$$

**Exemple 112.** Una enquesta ha revelat que el 40% dels habitants d'una regió disposen de tauleta tàctil; el 20% disposa d'un portàtil; i un 5% disposa d'ambdós mitjans.

- a) Quina probabilitat hi ha que un individu, triat a l'atzar i que duu un portàtil davall el braç, tengui també una tauleta?
- b) I si duu una tauleta, quina és la probabilitat que tengui portàtil?
- c) Quin percentatge de les persones no té tauleta però disposa d'un portàtil?

*Solució.* Si notem per  $T$  l'esdeveniment “disposar d'una tauleta tàctil” i per  $P$  l'esdeveniment “disposar d'un portàtil”, llavors tenim que  $p(T) = 0,40$ ,  $p(P) = 0,20$  i  $p(T \cap P) = 0,05$ .

- a) Hem de calcular  $p(T \mid P) = \frac{p(T \cap P)}{p(P)} = \frac{0,05}{0,2} = \frac{1}{4}$
- b) En aquest cas,  $p(P \mid T) = \frac{p(P \cap T)}{p(T)} = \frac{0,05}{0,4} = \frac{1}{8}$
- c) Volem saber  $p(T^c \cap P) = p(P \setminus T)$ . Per les propietats de la probabilitat (vegeu Secció 7.1), això és igual a  $p(P) - p(P \cap T) = 0,2 - 0,05 = 0,15$ .

■

Aquest exemple també es pot resoldre usant taules de contingència (vegeu Subsecció 7.4.2)

## 7.4 Experiments compostos: tècniques de resolució

**Definició 56 (experiment compost).** Un experiment es diu *compost* si està format per més d'una part, la qual dóna lloc a un resultat. Si l'experiment només té una part es diu *experiment simple*.

Fins ara només hem vist experiments simples.

**Exemple 113 (exemple d'experiments compostos).** Exemple d'experiment compost és:

- a) Tirar dos daus

- b) Extreure dues (o més) bolles d'una urna, amb o sense reposició (la reposició és si tornam la bolla extreta a l'urna).
- c) Extreure una bolla d'una urna i, segons el color de la bolla, extreure'n una altra d'una altra.

Existeixen diverses tècniques per a calcular les probabilitats dels experiments compostos, les quals de forma general podem emprar indistintament. El millor és veure'ls amb exemples.

### 7.4.1 Diagrama d'arbre

**Exemple 114.** A una casa hi ha tres clauers,  $A$ ,  $B$  i  $C$  amb 5, 7 i 8 claus respectivament, de les quals només una de cada clauer obri la porta del rebost. Es tria un clauer a l'atzar i, d'aquest, una clau per intentar obrir el rebost.

- a) Quina és la probabilitat d'obrir el rebost?
- b) Quina és la probabilitat de què es triï el tercer clauer i la que la clau triada no obri el rebost?
- c) Quina és la probabilitat de què s'hagi triat el clauer  $C$  sabent que s'ha obert el rebost?

*Solució.* En primer lloc, fem un *diagrama d'arbre* (Figura 7.1).

D'aquesta manera, tenim que

- a) La probabilitat d'obrir el rebost és:

$$p(O) = p(A \cap O) + p(B \cap O) + p(C \cap O) = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} = \frac{131}{840}$$

- b) La probabilitat de triar el clauer  $C$  i no obrir el rebost és  $p(C \cap \bar{O}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24}$ .

- c) La probabilitat de què s'hagi triat el clauer  $C$  sabent que s'ha obert el rebost és  $p(C | O)$ :

$$p(C | O) = \frac{p(C \cap O)}{p(O)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{131}{840}} = \frac{1/24}{131/840} = \frac{840}{3144} = \frac{35}{131}$$

Notem diverses coses:

- a) Per calcular la probabilitat d'una *fulla* del diagrama d'arbre, hem de multiplicar cadascun dels valors de les probabilitats que té cada *branca*. Així hem calculat la probabilitat  $p(C \cap \bar{O})$ .

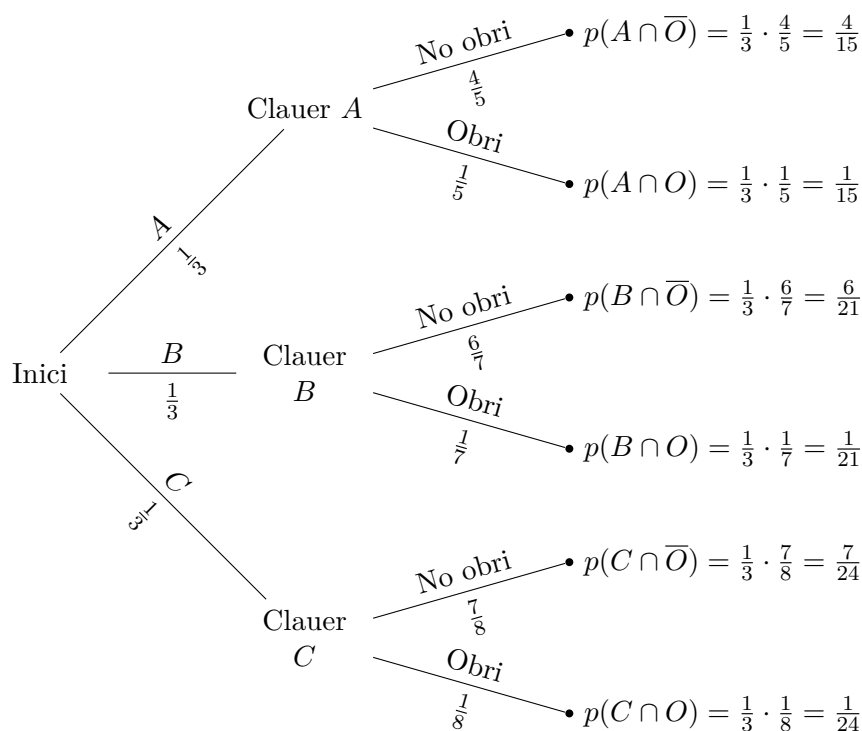


Figura 7.1: Diagrama d'arbre

b) Cada branca és disjunta, és a dir, la seva intersecció és buida. D'aquesta manera, la probabilitat de què passin esdeveniments que estan a diferents fulles es calcula sumant les seves probabilitats. Així hem calculat  $p(O)$ .

c) Notem que l'espai mostral d'aquest experiment compost seria

$$\Omega = \{(a, a_1), \dots, (a, a_5), (b, b_1), (b, b_2), \dots, (b, b_7), (c, c_1), \dots, (c, c_8)\},$$

on, per exemple,  $(b, b_5)$  denota que s'ha triat el clauer B i s'ha triat la cinquena clau d'aquest clauer. D'aquesta manera, triar el clauer A seria l'esdeveniment

$$A = \{(a, a_1), (a, a_2), (a, a_3), (a, a_4), (a, a_5)\}$$

De forma anàloga es definirien els esdeveniments B, triar el clauer B, i C, triar el clauer C. L'esdeveniment "la clau triada obri el rebost", O, seria

$$O = \{(a, a_2), (b, b_3), (c, c_4)\},$$

si suposem que  $a_2$ ,  $b_3$  i  $c_4$  serien les claus que obririen el rebost. Noteu que el diagrama d'arbre serveix per a trobar fàcilment les probabilitats de A, B, C i O sense haver de manejar conjunts.

d) Als apartats *a*) i *c*) hem aplicat, sense saber-ho, la probabilitat total de l'esdeveniment  $O$  i el teorema de Bayes.

**Proposició 29 (probabilitat total).** *Sigui un esdeveniment  $B$  que pot dependre d'altres esdeveniments  $A_1, A_2, \dots, A_n$  incompatibles entre si ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  per a tots els  $i, j$ ) i tals que la seva unió és  $\Omega$  ( $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ). Aleshores la probabilitat de  $B$  es pot calcular com*

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B | A_1) + p(A_2) \cdot p(B | A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B | A_n)$$

*Aquesta igualtat es coneix com a probabilitat total de  $B$ .*

**Teorema 30 (teorema de Bayes).** *Amb els mateixos termes que el teorema de la probabilitat total,*

$$p(A_i | B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B | A_i)}{p(A_1) \cdot p(B | A_1) + \dots + p(A_n) \cdot p(B | A_n)}$$

■

Exercici 221. Llançam una moneda dues vegades. Quina és la probabilitat d'obtenir: *a*) Dues cares? *b*) Almenys una cara? *c*) Una cara i una creu?

Exercici 222. Un moix encalça un ratolí. Aquest pot fugir per tres carrerons diferents, que designarem per  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Les probabilitats de què el ratolí entri en els carrerons  $A$ ,  $B$  i  $C$  són, respectivament, de 0.3, 0.5 i 0.2. Se sap que la probabilitat de què el moix caci al ratolí després de què aquest entri al carreró  $A$  és de 0.4, de 0.6 si entra en el carreró  $B$ , i de 0.1 si ho fa pel carreró  $C$ . Calculeu *a*) la probabilitat de què el moix caci al ratolí *b*) la probabilitat de què el ratolí hagi entrat en el carreró  $A$  si sabem que finalment el moix l'ha caçat

Exercici 223. D'un joc de cartes espanyoles, n'extraïem dues (sense reemplaçament). Quina és la probabilitat de què ambdues siguin d'espases?

*Solució.* Exercici 221 *a*) 1/4 *b*) 3/4 *c*) 1/2 Exercici 222 *a*) 0.44 *b*) 0.273 Exercici 223 11/188 ■

Exercici 224. A certa floristeria varen rebre quantitats iguals de roses i gladiols, de color groc i blanc. El 60% dels gladiols són de color groc, mentre que el 70% de les roses són de color blanc.

- a*) Si triem una rosa, quina probabilitat tenim que sigui de color groc?
- b*) Quina proporció de flors són de color blanc?
- c*) Si es varen comprar un total de 2000 flors i prenem dos gladiols, quina és la probabilitat de què aquests siguin de diferent color?

Exercici 225. Una màquina ha produït 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

- a) Trobeu la proporció de peces que no són defectuoses
- b) Calculeu la probabilitat de què, si examinem dues peces, ambdues resultin defectuoses
- c) Calculeu la probabilitat de què, sabent que la segona peça és defectuosa, la primera també ho sigui.

Exercici 226. Un estoig conté 15 llàpissos de color vermell i 10 de color blau.

- a) Si triem un llapis a l'atzar, quina probabilitat es té que sigui vermell?
- b) Si n'extraïem dos, quina és la probabilitat de què ambdós siguin blaus?
- c) Calculeu la probabilitat de què, sabent que el segon és vermell, el primer hagi estat blau

#### 7.4.2 Taules de contingència

Exemple 115. En una empresa hi ha 300 empleats, amb 200 dones i 100 homes. D'aquests, un 30% dels homes i un 40% de les dones tenen un contracte indefinit. Trobeu la probabilitat de què a) una persona elegida a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit b) una persona tengui un contracte indefinit c) sigui dona sabent que té un contracte indefinit

*Solució.* En comptes de fer un diagrama d'arbre, realitzarem una *taula de contingència* (Taula 7.1).

	Homes	Dones	
Contracte indefinit	30	80	110
Altres contractes	70	120	190
Total	100	200	300

Taula 7.1: Taula de contingència del sexe i tipus de contracte

Per saber, per exemple, el nombre d'homes amb contracte indefinit hem calculat el 30% de 100:  $\frac{30}{100} \cdot 100 = 30$ . De forma anàloga, per saber el nombre de dones amb contracte indefinit:  $\frac{40}{100} \cdot 200 = 80$ . Per saber els homes i dones amb diferent contracte, hem restat el total menys el nombre de contractes indefinits per sexes.

Amb aquesta taula podem veure fàcilment que

- a) La probabilitat de què una persona triada a l'atzar sigui dona amb contracte indefinit és  $80/300 = 4/15$
- b) La probabilitat de què una persona tengui contracte indefinit és de  $110/300 = 11/30$

- c) La probabilitat de què una persona sigui dona sabent que té contracte indefinit és

$$p(\text{dona} \mid \text{indefinit}) = \frac{p(\text{dona} \cap \text{indefinit})}{p(\text{indefinit})} = \frac{80/300}{110/300} = \frac{80}{110} = \frac{8}{11}.$$

■

**Observació 23.** En el cas de no saber el nombre total d'empleats, podríem suposar que fossin 100, per exemple.

**Exercici 227.** En una determinada població hi ha un 53% de dones. Un 20% dels homes té afició per la lectura. Aquesta afició augmenta fins al 30% en el cas de les dones. Es tria una persona a l'atzar. *a)* Quina és la probabilitat de què sigui dona i no tengui afició a la lectura? *b)* Quina és la probabilitat de què la persona triada sigui una dona sabent que té afició per la lectura?

*Solució.* *a)* 0,371 *b)* 0,63 ■

**Exercici 228.** En una oficina, el 70% dels empleats són estrangers. De entre aquests, el 50% són dones, mentre que, dels nacionals, són homes el 20%.

- a)* Quin percentatge d'empleats nacionals són dones?  
*b)* Calculeu la probabilitat de què un empleat de l'oficina sigui dona  
*c)* En Ferran fa feina a l'oficina. Quina és la probabilitat de què sigui estranger?

*Solució.* *a)* 80% *b)* 0,59 *c)* 35/41 ■

**Exercici 229.** Una ciutat ha remodelat el seu passeig marítim i en diari local ha aparegut l'enquesta, realitzada a 200 persones, sobre si el resultat ha estat satisfactori. Els resultats varien depenent de la zona on viuen els enquestats: dels qui viuen al centre, el 30% li ha agradat el resultat final de les obres. Si viuen a les afores, aquest percentatge ha pujat a un 50%. Dels 200 enquestats, 120 viuen en el centre.

- a)* Quina és la probabilitat de què a una persona li hagin agradat les obres?  
*b)* Si sabem que la persona li han agradat les obres, quina probabilitat hi ha que visqui en el centre?

**Exercici 230.** S'ha realitzat un estudi entre els estudiants d'un curs ofimàtica: d'entre els estudiants, un 40% ja havia cursat anteriorment un curs de ofimàtica. D'aquests, un 20% té un ordinador a casa, mentre que dels que no havien cursat anteriorment ofimàtica, aquest percentatge baixa al 10%.

- a)* Quina és la probabilitat de què un estudiant tengui ordinador a casa?

- b) Si un estudiant té ordinador a casa, quina és la probabilitat de què no hagi rebut abans formació d'ofimàtica?

Amb aquesta tècnica també podem resoldre exercicis referents a propietats de la probabilitat o probabilitat condicionada. Intentem resoldre l'exercici de l'exemple 112 amb taules de contingència:

*Solució.* Basta fer una taula com aquesta (Taula 7.2). Indiquem amb negreta les dades copiades talment de l'enunciat. Les altres entrades s'han obtingut restant o usant el càlcul de la probabilitat d'un esdeveniment contrari.

	Tauleta	Tauleta <sup>c</sup>	
Portàtil	<b>5</b>	15	<b>20</b>
Portàtil <sup>c</sup>	35	45	80
Total	<b>40</b>	60	100

Taula 7.2: Taula de contingència corresponent a la tinença de tauleta informàtica i portàtil

Amb aquesta taula, tenim que

$$a) p(T | P) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$b) p(P | T) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$c) p(T^c \cap P) = \frac{15}{100}.$$

■

### 7.4.3 Diagrames de Venn

Aquest mètode és convenient aplicar-lo quan sabem informació sobre esdeveniments excloents, com per exemple tenir una afició o una altra.

**Exemple 116.** En un poble, el 55% dels habitants consumeix pa integral, el 30% pa multicereal i el 20% d'ambdós tipus. Quina és la probabilitat de què una persona triada a l'atzar no consumeixi cap dels dos tipus de pa?

*Solució.* Elaborarem un diagrama de Venn dels consumidors de pa (Figura 7.2). Per fer-ho, suposarem que hi ha 100 habitants al poble (tenim tants per cent al problema, per tant no és una suposició descabellada):

- a) Si hi ha 55 habitants que consumeixen pa integral i 20 que també consumeixen multicereal, aleshores n'hi ha 35 que *només* consumeixen pa integral.
- b) De la mateixa manera, hi ha 10 persones que només consumeixen pa multicereal.



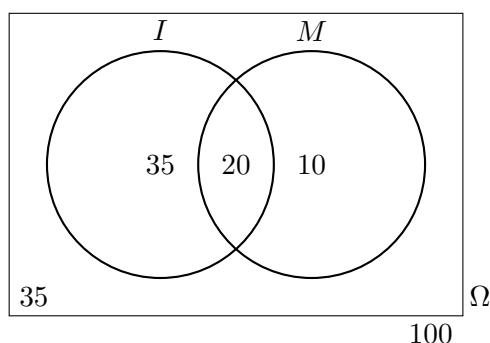


Figura 7.2: Diagrama de Venn dels consumidors de pa

- c) Si en total hi ha 100 persones, tenim que hi ha 35 persones que no consumeixen cap tipus de pa.

Per tant, la probabilitat de triar un habitant que no consumeixi cap tipus de pa és  $p(\bar{I} \cap \bar{M}) = 35/100 = 0.35$ .<sup>4</sup>

■

**Exercici 231.** En una població, es sap que el 30% escolta els informatius per la radio, el 60% per la televisió i el 20% pels dos mitjans. Si es tria una persona a l'atzar, determineu la probabilitat de què:

- a) escolti algun dels mitjans de comunicació
- b) escolti la radio i no vegi la televisió
- c) sabent que no veu la televisió, que escolti la radio
- d) escolti només un mitjà de comunicació

**Exemple 117.** En una ciutat es publiquen tres diaris:  $A$ ,  $B$  i  $C$ . El 50% de la gent està subscripta al diari  $A$ , el 40% a  $B$  i el 30% a  $C$ . El 20% està subscript a  $A$  i a  $B$ , el 10% a  $A$  i  $C$ , el 20% a  $B$  i  $C$  i el 5% a tots els diaris. Si triem una persona a l'atzar d'aquesta ciutat, calculeu la probabilitat de què:

- a) estigui subscript almenys a un diari
- b) no estigui subscript a cap diari
- c) estigui subscript exactament a un diari

**Solució.** Facem un diagrama de Venn de tres conjunts: subscriptors de  $A$ , de  $B$  i de  $C$  (Figura 7.3). Hem marcat en negreta les dades donades. Per calcular les dades que falten, hem procedit de la manera següent:

<sup>4</sup>Haguéssim pogut obtenir aquest resultat usant les propietats de les operacions d'esdeveniments:  $p(\bar{I} \cap \bar{M}) = p(\overline{(I \cup M)}) = 1 - p(I \cup M) = 1 - (p(I) + p(M) - p(I \cap M)) = 1 - (0.55 + 0.30 - 0.20) = 0.35$

- a) Hem suposat que hi ha 100 persones en total.
- b) Sabem que  $|A \cap B \cap C| = 5$  i  $|A \cap B| = 20$ . Per tant, els subscriptors de  $A$  i  $B$  però que no estan subscriptats a  $C$ , i.e.,  $A \cap B \cap \bar{C}$ , són  $20 - 5 = 15$ . De la mateixa manera,  $|A \cap C \cap \bar{B}| = 5$  i  $|B \cap C \cap \bar{A}| = 15$ .
- c) Com que  $|A| = 50$ , per l'apartat anterior, tenim que  $|A \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 50 - (5 + 5 + 15) = 25$ . De la mateixa manera,  $|B \cap \bar{C} \cap \bar{A}| = 40 - (5 + 15 + 15) = 5$  i  $|C \cap \bar{A} \cap \bar{B}| = 30 - (5 + 5 + 15) = 5$ .
- d) Per últim,  $|(\overline{A \cup B \cup C})| = 100 - 75 = 25$ .

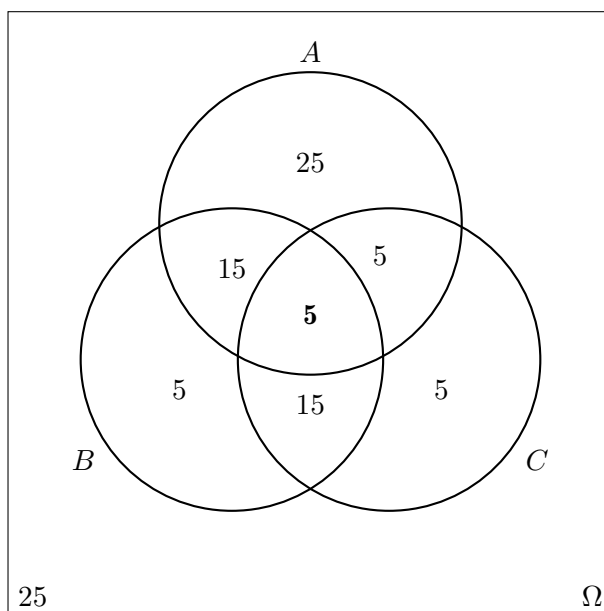


Figura 7.3: Diagrama de Venn dels subscriptors de diaris

Per tant, amb tot,

- a)  $p(\text{almenys un diari}) = \frac{25+15+5+5+15+5+5}{100} = 75/100 = 0.75$
- b)  $p(\text{cap diari}) = 25/100 = 0.25$
- c)  $p(\text{exactament 1 diari}) = \frac{25+5+5}{100} = 35/100 = 0.35$

■

**Exercici 232.** En un grup de matrimonis heterosexuales s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris. En un 30% tant l'home com la dona els té i, finalment, el 37,5% dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris i la dona no els té.

- a) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni heterosexual l'home tengui estudis universitaris?
- b) En quin percentatge de matrimonis heterosexuals en els que la dona té estudis universitaris, l'home també els té?
- c) Quin percentatge correspon a matrimonis en el que l'home no té estudis universitaris i la dona sí?

*Solució.* a) 0,675, b) 60%, c) 20% ■

**Exercici 233.** Un estudiant fa dues proves el mateix dia. La probabilitat de què passi la primera és de 0,6, la que passi la segona és de 0,8 i de què passi ambdues és de 0,5. Es demana:

- a) la probabilitat de què passi almenys una prova
- b) la probabilitat de què no passi cap prova
- c) són les proves esdeveniments independents?
- d) la probabilitat de què passi la segona prova en cas de no haver superat la primera

*Solució.* a) 0,9, b) 0,1, c) no són independents d) 0,75 ■

**Exercici 234.** Un aparell elèctric està constituït per dos components:  $A$  i  $B$ . Sabent que hi ha una probabilitat de 0,58 de què no falli cap element, i que en el 32% dels casos falla  $B$  però no  $A$ , determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component  $A$ .

*Solució.* 0,9 ■

## 7.5 Exercicis proposats

**Exercici 235.** Un restaurant té contractats a dos cambrers: Javier i Ana per atendre el servei del menjador. Ana posa el servei el 70% dels dies i es fon al col·locar els coberts només el 5% dels dies. Mentre, Javier col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

- a) Aquest matí, l'encarregat del restaurant ha passat revista al servei. Quina és la probabilitat de què trobi algun servei mal col·locat?
- b) Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i vol trobar quina és la probabilitat de què hagi estat en Javier

*Solució.* a) 0,11 b) 15/22 ■

**Exercici 236.** Certa persona compra tots els dies el diari local, comprant-lo indistintament en un de les botigues,  $A$  i  $B$ , que estan més pròximes a casa seva. El 80% dels dies el compra a la botiga  $A$ .

- a) Quina proporció dels dies compra el diari a la botiga  $B$ ?
- b) Quina probabilitat hi ha de què compri dos dies el diari a la botiga  $A$ ?
- c) Quina és la probabilitat de què dos dies consecutius compri el diari a dues botigues diferents?

*Solució.* a) 0,20 b) 0,64 c) 0,32 ■

**Exercici 237.** La probabilitat de què un aficionat al futbol vagi al camp municipal a veure un partit és del 90% quan es disputa en cap de setmana i el 50% si té lloc en un dia laborable. La probabilitat de què un partit es jugui en cap de setmana és la mateixa que se jugui entre setmana.

- a) Cert partit es celebrarà la setmana que ve en un dia encara sense determinar. Calculeu la probabilitat de què els aficionats vagin a veure'l al camp
- b) Si finalment un aficionat va anar a veure el partit, quina és la probabilitat de què aquest hagi estat en cap de setmana?

*Solució.* a) 0,7 b) 45/70 ■

**Exercici 238.** En una capsula estan desats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

- a) Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?
- b) Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, quina és la probabilitat de què funcionin els dos correctament?
- c) Si el segon no funciona correctament, quina és la probabilitat de què el primer tampoc ho faci?

*Solució.* a) 15/20 b) 21/38 c) 4/19 ■

**Exercici 239.** El 25% de les famílies de certa comunitat autònoma espanyola no surt fora de la mateixa durant les vacances d'estiu. El 65% estiujeja per la resta de l'estat i el 10% restant se'n va a l'extranger. Dels qui queden a la seva comunitat, només un 10% no usa cotxe en els desplaçaments. Aquesta quantitat augmenta al 30% entre els que surtin per la resta d'Espanya, i al 90% entre els que viatgen a l'extranger.

- a) Calculeu el percentatge de famílies d'aquesta comunitat que utilitza el cotxe en els seus desplaçaments d'estiu
- b) Una família no usa cotxe en les seves vacances d'estiu. Quina és la probabilitat de què surti de la comunitat movent-se per la resta d'Espanya?

*Solució.* a) 69% b) 13/20 ■

Exercici 240. Un grup de 40 persones acabar de prendre un bus. D'aquests, només 10 són fumadors. Entre els fumadors, el 70% es mareja durant el viatge. I entre els qui no fumen, aquesta quantitat baixa al 40%.

- a) Quina probabilitat hi ha que dues persones siguin fumadores ambdues?
- b) Quina és la probabilitat de què un viatger no es maregi?

*Solució.* a) 3/52 b) 0,525 ■

Exercici 241. Dos joves aficionats als jocs d'atzar es troben realitzant un solitari amb una baralla espanyola. Extreuen una carta de la baralla i volen saber quina és la probabilitat d'obtenir rei condicionat a què s'hagi tret figura

*Solució.* 1/3 ■

Exercici 242. En un país s'ha constituït una comissió parlamentària integrada per deu membres, dels quals set pertanyen al partit governant i la resta al partit de l'oposició. Entre els set membres del partit governant hi ha quatre homes; dos entre els del partit de l'oposició. El president de la comissió s'elegeix per sorteig entre els seus integrants. Celebrat el sorteig, es sap que el president triat ha estat un home. Quin partit té més possibilitats de dirigir la comissió?

*Solució.* 2/3 ■

Exercici 243. S'ha fet un estudi d'un nou tractament sobre 120 persones que pateixen certa enfermetat. Trenta d'elles ja han patit l'enfermetat amb anterioritat. Entre les persones que l'han patida anteriorment, el 80% ha reaccionat positivament al nou tractament. De les que no la han patida amb anterioritat, el percentatge de la reacció positiva ha estat del 90%.

- a) Si triem a l'atzar un pacient, quina és la probabilitat de què no reaccioni positivament al nou tractament?
- b) Si un pacient ha reaccionat positivament al tractament, quina és la probabilitat de què no hagi patit l'enfermetat amb anterioritat?

*Solució.* a) 1/8 b) 27/35 ■

Exercici 244. A cert curs d'un centre d'ensenyament, el 62.5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. D'altra banda, d'entre els qui varen aprovar Matemàtiques, el 80% també varen aprovar Física. Es sap igualment que només el 33,3% dels qui no varen aprovar Matemàtiques varen aprovar Física.

- a) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures alhora?
- b) Quin va ser el percentatge d'aprovats a l'assignatura de Física?

- c) Su un estudiant no aprovà Física, quina és la probabilitat de què aprovàs Matemàtiques?

Exercici 245. El 70% dels sol·licitants d'un lloc de feina té experiència i a més formació adient amb el lloc de treball. Malgrat això, hi ha un 20% que té experiència i no una formació adient. Es sap també que entre els sol·licitants que tenen formació adient amb el lloc, un 88,5% té experiència.

- a) Quina és la probabilitat de què un sol·licitant no tengui experiència?
- b) Si un sol·licitant té experiència, quina és la probabilitat de què la seva formació sigui adient amb el lloc de treball?
- c) Calculeu la probabilitat de què un sol·licitant tengui formació adient amb el lloc.

Exercici 246. Un grup d'amics ha estat parlant sobre els seus gusts musicals. La música clàssica agrada al 20% d'ells. Es sap també que el percentatge dels qui els agrada la música moderna d'entre els que els agrada la música clàssica és del 75% i que el percentatge de qui els agrada la música moderna d'entre els qui no els agrada la música clàssica és del 87,5%.

- a) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi la música moderna?
- b) Quina és la probabilitat de què a un individu del grup li agradi tant la música clàssica com la moderna?
- c) Si a una persona li agrada la música moderna, quina és la probabilitat de què també li agradi la música clàssica?
- d) Si a una persona no li agradi la música moderna, quina és la probabilitat de què li agradi la clàssica?

Exercici 247. En un grup de matrimonis heterosexuales s'ha observat que en el 50% dels casos la dona té estudis universitaris; en un 30% tant l'home com la dona els tenen; finalment, en el 37,5% dels matrimonis en els que l'home té estudis universitaris, la dona també els té. En aquest grup de matrimonis:

- a) Quina probabilitat hi ha de què en un matrimoni el marit tengui estudis universitaris?
- b) En quin percentatge de matrimonis en els que la muller té estudis universitaris el marit també els té?
- c) En quin percentatge de matrimonis el marit no té estudis universitaris i la muller sí?

Exercici 248. En un grup de persones, al 50% els hi han posat alguna vegada una multa de trànsit. D'altra banda, al 12,5% no els hi han posat mai cap multa però sí han sofert alguna vegada un accident. Finalment, al 60% dels qui mai han tengut un accident no els hi han posat mai una multa.

- a) Quin percentatge de persones no han tengut mai un accident ni els hi han posat una multa?
- b) Quin percentatge de persones no han tengut mai cap accident?
- c) Entre les persones que mai han tengut cap multa, quin percentatge no ha tengut mai un accident?

Exercici 249. L'urna  $S$  conté 4 bolles blanques i 3 negres, i l'urna  $T$  conté 3 bolles blanques i dues negres. Prenem a l'atzar una bolla de l'urna  $S$  i, sense mirar-la, la introduïm a l'urna  $T$ . A continuació, extraïem amb reemplaçament dues bolles de l'urna  $T$ . Trobeu la probabilitat de què:

- a) les bolles siguin del mateix color
- b) les bolles siguin de distint color

Exercici 250. Un banc concedeix tres tipus de crèdits: hipotecaris, empresarials i personals. Es sap que el 30% dels crèdits concedits són hipotecaris; el 50%, empresarials; i el 20% restant són personals. Han resultat impagats el 20% dels crèdits hipotecaris, el 25% dels crèdits empresarials i el 50% dels crèdits personals. Es demana:

- a) Representar la situació mitjançant un diagrama d'arbre
- b) Selecció d'un crèdit a l'atzar, calcular la probabilitat de què es pagui
- c) Un crèdit determinat ha resultat impagat. Calculeu la probabilitat de què sigui un crèdit hipotecari

Exercici 251. En un trajecte entre dues ciutats pròximes, un automobilista ha d'atravesar tres zones que estan en obres i en les que es regula el trànsit mitjançant semàfors. La probabilitat de trobar el semàfor en vermell per a cadascuna de les tres zones és 0,3, 0,7 i 0,5. Calculeu la probabilitat de què el conductor:

- a) Trobi els tres semàfors en vermell
- b) Trobi els tres semàfors en vermell
- c) Trobi exactament un semàfor en vermell
- d) Trobi almenys un semàfor en vermell

Exercici 252. En un determinat barri d'una ciutat s'ha observat que el 70% dels seus habitants té més de 50 anys i que d'aquests el 60% és propietari de la vivenda que habita. També es sap que el percentatge de propietaris és del 30% entre aquelles persones que no superen els 50 anys. Es demana:

- a) Trobar la probabilitat de què un veïnat del barri, el qual ha estat triat a l'atzar, sigui propietari de la vivenda en la qual habita.
- b) Triat un veïnat a l'atzar, que és propietari de la vivenda on habita, calculeu la probabilitat de què tengui més de 50 anys.

Exercici 253. Provem una vacuna contra el grip en un grup de 400 persones, de les quals 180 són homes i 220 dones. De les dones, 25 es contagien de grip i, dels homes, ho fan 23. Determineu les probabilitats de què:

- a) Al seleccionar una persona a l'atzar, resulti que no té grip
- b) Al seleccionar una persona a a l'atzar, resulti ser una dona que no té grip
- c) Seleccionada una persona que no té grip, resulti que sigui un home
- d) Seleccionada una dona, resulti que no té grip

Exercici 254. El 20% dels empleats d'una empresa són enginyers i un altre 20% són economistes. Tres de quatre enginyers ocupa un càrrec directiu, mentre que només ho fa el 50% dels economistes. De la resta dels empleats, només ocupen càrrecs directius un 20%. Calculeu les probabilitats de què:

- a) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti ser un enginyer que no ocupa càrrec directiu
- b) Al seleccionar un empleat a l'atzar resulti no ser ni enginyer ni economista, però que ocupi un càrrec directiu
- c) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser economista
- d) Al seleccionar un càrrec directiu a l'atzar resulti ser enginyer o economista

Exercici 255. El 15% dels habitants d'un país pateix certa enfermetat. Per a diagnosticar-la es disposa d'un procediment, el qual no és completament fiable: dona positiu en el 90% dels casos de persones realment malaltes, però també dona positiu en el 5% de les persones sanes (el que es coneix com *fals positius*). Determineu la probabilitat de què:

- a) estigui sana una persona el diagnòstic de la qual ha donat positiu
- b) estigui malalta una persona el diagnòstic del qual ha estat negatiu



Exercici 256. Tres tiradors disparsen simultàniament a un blanc. Si els dispars són independents l'uns dels altres i la probabilitat que un tirador encerti al blanc és 0,6, llavors calculeu la probabilitat que el blanc sigui destruït.

Exercici 257. Una caixa conté 100 peces, entre les que hi ha 20 defectuoses pel que fa a la longitud, 12 defectuoses pel que fa a l'amplada i 15 defectuoses pel que fa a l'altura. D'altra banda, sabem que hi ha 7 peces defectuoses en longitud i altura, 4 peces defectuoses en longitud i amplada, 5 que ho són en amplada i altura i 2 defectuoses en els tres aspectes. Es demana:

- a) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar presenti un sol defecte.
- b) La probabilitat de què una peça triada a l'atzar sigui defectuosa només pel que respecte a la longitud

Exercici 258. De 150 pacients, 90 tenen una enfermetat cardíaca, 50 tenen càncer i 20 tenen ambdues enfermetats. Determineu la probabilitat de què un pacient triat a l'atzar tengui només una de les dues enfermetats.

Exercici 259. Una màquina es compon de dos components:  $A$  i  $B$ . La probabilitat de què el component  $A$  falli és de 0,05 mentre que la probabilitat de què  $B$  arribi a fallar és de 0,03. La màquina funciona correctament sempre que ho fan ambdós components i també en el 30% dels casos en què ambdós components es comportin erròniament. En cas contrari, la màquina falla. Calculeu la probabilitat de què la màquina no funcioni correctament.

Exercici 260. Els habitants d'un poble poden votar entre dos partits polítics:  $A$  i  $B$ . El 55% dels habitants són menors de 30 anys; d'ells, el 80% són del partit  $B$ . Dels majors de 30 anys, només ho són 1 de 10 persones. Escollim una persona a l'atzar.

- a) Calculeu la probabilitat de què sigui del partit  $A$
- b) La persona triada resulta ser del partit  $A$ . Quina probabilitat hi ha de què tengui menys de 30 anys?

Exercici 261. N'Aina, en Bartomeu i en Cristòfol sortegen a l'atzar l'ordre en què entraran per una porta.

- a) Calculeu la probabilitat de què els dos darrers en entrar siguin homes
- b) Determineu si són independents els esdeveniments 'la dona entra abans que algun dels homes' i 'els dos homes entren consecutivament'.

Exercici 262. Es tenen dues urnes,  $U_1$  i  $U_2$ , el contingut del qual és el següent:

- en l'urna  $U_1$  hi ha 4 bolles blaves, 3 vermelles i 3 verdes
- en l'urna  $U_2$  hi ha 4 bolles vermelles, 5 blaves i 1 verda

Es llancen tres monedes a l'aire i si s'obtenen dues cares, s'extreu una bolla de l'urna  $U_1$ ; en qualsevol cas, s'extreu una bolla de l'urna  $U_2$ . Trobeu la probabilitat de què la bolla extreta sigui blava. Ajudeu-vos d'un diagrama d'arbre.

Exercici 263. Un aparell elèctric està constituït per dos components,  $A$  i  $B$ . Sabent que hi ha una probabilitat de 0,58 que no falli cap dels dos components, i que en el 32% dels casos falla  $B$  no havent fallat  $A$ , determineu la probabilitat de què en un d'aquests aparells no falli el component  $A$ .

Exercici 264. Una urna,  $A$ , conté 5 bolles blanques i 3 de negres. Una altra urna,  $B$ , en té 6 de blanques i 4 de negres. Elegim una urna a l'atzar i extraïem dues bolles, que resulten ser negres. Trobeu la probabilitat de què l'urna elegida hagi estat la  $B$ .

Exercici 265. La probabilitat que un missatge de correu electrònic sigui *spam* varia depenent de la llengua en la qual està escrita: si el missatge està escrit en català, la probabilitat és de 1 de cada 20, mentre que si el missatge està escrit en anglès, la probabilitat augmenta a un 10%. En la bústia de correu electrònic d'una persona només trobam missatges en aquestes dues llengües: hi ha 300 missatges en català i 100 missatges en anglès.

- a) Si es tria un missatge de correu electrònic a l'atzar, quina probabilitat hi ha que sigui *spam*
- b) Sabent que un missatge no és *spam*, quina probabilitat tenim que estigui escrit en català?

Exercici 266. La probabilitat que cert article estigui fabricat per dues màquines  $A$  i  $B$  és de 0,7 i 0,3, respectivament. La màquina  $A$  produeix articles defectuosos amb una probabilitat de 0,02 i la  $B$  amb 0,06. S'observa un article i resulta que és defectuós. Quina probabilitat tenim que hagi estat fabricat per la màquina  $A$ .

*Solució.* 0,4375 ■

Exercici 267. Disposam de dues monedes: una correcta i l'altra amb dues cares. També tenim una urna amb 10 bolles: quatre blanques i sis negres. Extraïem dues bolles de l'urna: si són del mateix color, triem la moneda correcta i la tiram en l'aire; altrament, elegim la moneda incorrecta i la llancem a l'aire. Trobeu la probabilitat que

- a) Que les bolles siguin del mateix color
- b) Obtenir cara en el llançament de la moneda
- c) Si el resultat del llançament de la moneda ha estat creu, trobeu la probabilitat que les dues bolles siguin de distint color

*Solució.* 42/90, 23/30 i 1 ■

Exercici 268. Es tiren dos daus. Siguin  $S$  l'esdeveniment que la suma dels punts obtinguts sigui senar; i  $U$  l'esdeveniment que almenys un d'ells mostri un 1. Trobeu la probabilitat que  $p(S \cap U)$  i  $p(S \cup U)$ .

*Solució.*  $1/6$  i  $23/36$  ■

Exercici 269. Dos escaquistes d'igual mestratge juguen als escacs. Què és més probable: guanyar dues partides de quatre jugades o bé guanyar-ne tres de sis?

*Solució.* És més probable guanyar-ne dos de quatre:  $p(\text{guanyar-ne 2 de 4}) = 6/16$  i  $p(\text{guanyar-ne 3 de 6}) = 5/16$ . Hem fet servir permutacions per trobar aquests resultats, encara que es pot fer servir un diagrama d'arbre. ■

Exercici 270. En una àrea geogràfica determinada, el 60% dels vots han estat pel partit  $A$ . Si es consideren 3 votants d'aquesta àrea, es demana  $a)$  la probabilitat que l'hagin votat exactament dos votants  $b)$  la probabilitat que no l'hagi votat cap votant  $c)$  la probabilitat que l'hagin votat, almenys, dos votants

Exercici 271. En una ciutat, el 40% dels habitants té un cotxe vermell, el 25% té una moto vermella i el 15% té el cotxe i la moto vermells. Es tria una persona a l'atzar.

- Si té el cotxe vermell, quina és la probabilitat que tengui la moto vermella?
- Si té la moto vermella, quina és la probabilitat que tengui el cotxe vermell?
- Quina és la probabilitat que no tengui ni la moto ni el cotxe vermells?

*Solució.* El més ràpid és fer una taula de contingència amb les dades anteriors.  $a)$   $15/40$   $b)$   $10/25$   $c)$   $50/100$  ■

Exercici 272. Una persona ha de prendre un avió per anar a Barcelona. Existeixen tres companyies:  $A$ ,  $B$  i  $C$  que fan el trajecte. Les probabilitats que els avions de les companyies  $A$ ,  $B$  i  $C$  compleixin el seu horari previst és de 0,7, 0,8 i 0,9, respectivament. El comportament de cada avió no depèn dels altres. La probabilitat que aquesta persona triï un avió de la companyia  $A$ ,  $B$  i  $C$  és del 50%, 20% i 30%, respectivament. Quina probabilitat té aquesta persona d'arribar a l'hora al seu destí.



Part IV  
Apèndixs



# A

## Recordatori de matemàtica elemental

Aquí es fa un recordatori de alguns continguts de matemàtiques elementals.

### A.1 Operacions amb nombres

#### A.1.1 Sumes i restes

Si en una expressió només hi apareixen sumes i restes de nombres sencers, el valor final d'aquesta expressió es calcula de la manera següent:

1. es sumen per separat els nombres positius i els nombres negatius
2. es resten els resultats de l'apartat anterior i es posa el signe del que tingui major valor absolut.

Exemple 118.

$$-2 + 8 - 15 - 3 + 7 = 15 - 20 = -5$$

#### A.1.2 Producte i quocient de dos nombres

Per multiplicar o dividir *dos* nombres es segueix la regla següent: si els dos nombres tenen el mateix signe, el resultat del producte o de la divisió és positiu, i si els dos nombres tenen signes diferents, el resultat és negatiu.

Exemple 119.

$$-2 \cdot (-3) = 6$$

$$20 : (-4) = -5$$

### A.1.3 Jerarquia d'operacions

Per a calcular expressions aritmètiques que tenen diverses operacions, s'aplica un ordre en la que certes operacions es calculen abans que unes altres. S'anomena *jerarquia d'operacions* a l'ordre en el que s'efectuen les operacions. Aquesta és:

1. Parèntesis
2. Potències
3. Productes i divisions
4. Sumes i restes

Exemple 120. Calculeu

$$3 + 4 \cdot 5$$

Per a calcular aquesta expressió, hem de calcular en primer lloc el producte, encara que l'operació no sigui la primera en aparèixer. En posterioritat, calcularíem la suma. Per tant,

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cdot 5 &= 3 + 20 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Exemple 121. Calculeu

$$(3 + 4) \cdot 5 + \frac{1}{2} - (3^2 - 5 \cdot 2)^2 + 2^2$$

En primer lloc, calcularem els parèntesis. S'ha de dir que com que el resultat d'un no influeix al resultat de l'altre, llavors es poden calcular de forma simultània. En general, podem fer això sempre que les subexpressions siguin sumands d'una expressió més general (tècnicament es diuen *termes*). Així, calcularíem l'expressió numèrica de la forma:



$$\begin{aligned}
(3 + 4) \cdot 5 + \frac{1}{2} - (3^2 - 5 \cdot 2)^2 + 2^2 &= 7 \cdot 5 + \frac{1}{2} - (9 - 10) + 4 \\
&= 35 + \frac{1}{2} - (-1) + 4 \\
&= 35 + \frac{1}{2} + 1 + 4 \\
&= 40 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{81}{2}
\end{aligned}$$

#### A.1.4 Càlcul del mínim comú múltiple

**Definició 57 (múltiple d'un nombre).** Donat dos nombres  $a$ ,  $b$ , direm que  $b$  és un *múltiple* de  $a$  si, i només si, existeix un altre nombre  $r$  tal que  $a \cdot r = b$  o dit d'altra manera si quan dividim  $b$  entre  $a$  el reste és 0.

**Exemple 122.** 60 és múltiple de 2 perquè  $2 \cdot 30 = 60$ . També és múltiple de 3, 5, 10, 20, 30 i 60. Però 60 no és múltiple de 40 perquè 60 entre 40 no dona reste 0.

Es pot fer una llista de *tots* els múltiples d'un nombre multiplicant aquest nombre consecutivament per 1, 2, etc. Per exemple, els múltiples de 60 són:  $60 \cdot 1 = 60$ ,  $60 \cdot 2 = 120$ ,  $60 \cdot 3 = 180$ , etc.

**Definició 58 (mínim comú múltiple).** Donats els nombres  $a_1, a_2, \dots, a_r$  el seu *mínim comú múltiple* és el menor de tots els seus múltiples comuns. El mínim comú múltiple s'abreuja mcm.

**Exemple 123.** Els nombres 10 i 12 tenen com a mínim comú múltiple. La raó és que:

- Els múltiples de 10 són: 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120, ...
- Els múltiples de 12 són: 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, ...

Per tant, els múltiples comuns són 60, 120, etc. Llavors 60 és el menor d'aquests múltiples i, per tant, és el mcm.

Existeixen diversos procediments per a calcular el mínim comú múltiple de diversos nombres:

**Algorisme 6 (càlcul del mcm amb la llista de múltiples).** Pel càlcul del mcm dels nombres  $a_1, a_2, \dots, a_r$  es procedeix de la manera següent:

1. Es llisten els múltiples de cada nombre
2. Es selecciona el múltiple més petit

L'exemple anterior (exemple 123) exemplifica aquest procediment.

S'ha de dir que aquest procediment és molt lent, sobretot per nombres grans.

**Algorisme 7** (càlcul del mcm amb la factorització de nombres). *Pel càlcul del mcm dels nombres  $a_1, a_2, \dots, a_r$  es procedeix de la manera següent:*

1. *Es factoritzen els nombres en factors primers<sup>1</sup>*
2. *El mínim comú múltiple s'obté prenent tots els factors elevats al màxim exponent*

Aquest és el procediment *estàndard* per al càlcul del mínim comú múltiple.

Exemple 124. Calculeu el mcm de 20, 12 i 100:

1. Factoritzem els nombres
2. Per tant,  $20 = 2^2 \cdot 5$ ,  $12 = 2^2 \cdot 3$  i  $100 = 2^2 \cdot 5^2$
3. Llavors el mcm és igual a  $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

**Algorisme 8** (càlcul del mcm de forma ràpida per nombres petits). *Aquest algorisme és ràpid sobretot per nombres petits. Si  $a, b, c$  i  $d$  són els nombres dels quals volem trobar el mínim comú múltiple, aleshores:*

1. *Es selecciona el nombre més gran. Suposem que és  $a$*
2. *Es generen els seus múltiples*
3. *Per a cada múltiple es comprova si aquest és múltiple dels altres nombres, és a dir, si la seva divisió dóna exacte*
4. *Si és així, llavors aquest és el mínim comú múltiple. En cas contrari, es genera el múltiple següent de  $a$ .*

El més usual és que necessitem el mínim comú múltiple per resoldre equacions de primer grau que tinguin fraccions. En aquest cas però no és necessari calcular el mínim comú múltiple. Bastaria calcular un múltiple (vegi's Secció A.2).

Exercici 273. Calculeu el mínim comú múltiple per als conjunts de nombres següents:

- |            |            |                |
|------------|------------|----------------|
| a) 20 i 8  | d) 12 i 21 | g) 20 i 36     |
| b) 12 i 42 | e) 30 i 65 | h) 15, 20 i 30 |
| c) 8 i 12  | f) 10 i 12 | i) 6, 8 i 12   |

<sup>1</sup>La llista de primers és infinita, però els sis primers primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

- j) 30, 45 i 60                      l) 17, 68 i 34                      n) 25, 75 i 200  
 k) 12, 18, 20 i 32                      m) 10, 105 i 22

*Solució.* a) 40, b) 84, c) 24, d) 84, e) 390, f) 60, g) 180, h) 60, i) 24, j) 180, k) 1440, l) 68, m) 2310, n) 600 ■

## A.2 Equacions de primer grau

Per resoldre una *equació de primer grau* es segueixen les passes de l'exemple següent:

Exemple 125. Resol l'equació

$$5x - \frac{3x + 1}{8} = x + \frac{5x - 3}{4} - \frac{3}{2}$$

Resolució:

1. Primer:

$$\frac{5x}{1} - \frac{3x + 1}{8} = \frac{x}{1} + \frac{5x - 3}{4} - \frac{3}{2}$$

2. Segon (càlcul del mcm):  $mcm(8, 4, 2) = 8$

3. Tercer (reducció a comú denominador):

$$\frac{40x}{8} - \frac{3x + 1}{8} = \frac{8x}{8} + \frac{2 \cdot (5x - 3)}{8} - \frac{12}{8}$$

4. Quart (eliminem els denominadors):

$$40x - (3x + 1) = 8x + 2 \cdot (5x - 3) - 12$$

5. Cinquè (eliminem els parèntesis):

$$40x - 3x - 1 = 8x + 10x - 6 - 12$$

6. Sisè (transposició de termes):

$$40x - 3x - 8x - 10x = -6 - 12 + 1$$

7. Setè (operar):

$$19x = -17$$

8. Vuitè (aïllar l'incògnita):

$$x = \frac{-17}{19}$$

**Nota 4.** Normalment es passa del segon al cinquè pas quan es té suficient soltura.

**Nota 5.** D'altra banda, es pot no calcular el mínim comú múltiple dels denominadors i només calcular-ne *un* múltiple. Per exemple es podria calcular el múltiple sorgit de la multiplicació dels denominadors, o sigui,  $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ . I realitzar tots els càlculs amb 64 en comptes de 8. L'equació resultant tendria les mateixes solucions, encara que els nombres sorgits (dels passos tercer al vuitè) serien majors.

**Exercici 274.** Resoleu les equacions següents:

$$\begin{array}{lll}
 a) \ x + 1 = 5 & f) \ \frac{x}{2} + 1 = 8 & k) \ 5x - 2 = 13 + 3x \\
 b) \ x - 10 = 50 & g) \ \frac{x}{3} - 4 = 8 & \\
 c) \ 3x - 10 = 30 & h) \ 2x + 1 = 7 - x & l) \ 2x + 1 = 5 \\
 d) \ 5x - 2 = 13 & i) \ 3x + 10 = 22 + x & \\
 e) \ \frac{x}{2} = 8 & j) \ 4x + 2 = 10 + 2x & m) \ 2x + 10 = 2(7 - x)
 \end{array}$$

*Solució.* a) 5, b) 60, c)  $\frac{4}{3}$ , d) 3, e) 16, f) 14, g) 36, h) 2, i) 6, j) 4, k)  $\frac{15}{2}$ , l) 2, m) 0 ■

**Exercici 275.** Resoleu les equacions següents:

$$\begin{array}{ll}
 a) \ -(3x + 10) = 1 - (21 + x) & d) \ 1 - (3x + 10) = 1 - (14 - x) \\
 b) \ 2(x + 2) = 24 - 2x & \\
 c) \ 2(x - 2) = 3(1 - x) - 7 & e) \ 3 - 2(x - 2) = -5 - 3(1 - x)
 \end{array}$$

*Solució.* a) 5, b) 0, c) 1, d) 3 ■

**Exercici 276.** Resoleu les equacions següents:

$$\begin{array}{ll}
 a) \ (x + 2) - (x + 3) = 2 - 3(1 - x) & d) \ 2(x + 2) - (x + 3) = 1 - 3x \\
 b) \ 2x + 1 + (2x - 3) = 2 + 3(1 - x) & e) \ -(2x + 1) + (2x - 3) = -2 - 3(1 - x) \\
 c) \ x + 1 + (3 - x) = -3(1 - 2x) - 5 & f) \ 3x - (x - 2) = -3(1 + x) + 20
 \end{array}$$

*Solució.* a) 0, b) 1, c) 2, d) 0, e) 1, f) 2 ■

### A.3 Extracció de factor comú

El factor comú d'una expressió pot ser un nombre, una lletra, o bé ambdues coses:

Exemple 126.

$$\begin{aligned} -8 + 12 - 6 + 2 &= 2 \cdot (-4 + 6 - 3 + 1) \\ -x^5 + 4x^3 - x^2 &= x^2 \cdot (-x^3 + 4x - 1) \\ 5x^6 - 10x^4 - 15x^3 &= 5x^3 \cdot (x^3 - 2x - 3) \end{aligned}$$

## A.4 Equacions de segon grau

Les *equacions de segon grau* són aquelles que involucren una  $x^2$ . Formalment es formen igualant un polinomi de segon grau a zero (vegeu [Secció A.5](#)).

Les equacions de segon grau són de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ amb } a \neq 0 \tag{A.1}$$

La solució d'aquestes equacions es calcula amb la fórmula següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{A.2}$$

Exemple 127. La solució de l'equació  $x^2 - 5x + 6 = 0$  és

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les *equacions incompletes* de segon grau, és a dir, aquelles en les quals  $b = 0$  o  $c = 0$  (o tots dos valen zero) es poden resoldre d'una altra manera, encara que també es poden resoldre amb la fórmula de segon grau. Aquí en donem dos exemples (les equacions de segon grau que tenen tots els termes diferents de zero, s'anomenen *equacions completes*).

Exemple 128.

$$-3x^2 + 12 = 0; \quad -3x^2 = -12; \quad x^2 = \frac{-12}{-3} = 4; \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Exemple 129.

$$2x^2 - 5x = 0; \quad x(2x - 5) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 5 = 0; \quad x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

En general, les equacions de segon grau poden no ser de la forma (A.1), encara que sempre es poden reduir a aquesta forma.

**Exemple 130.** Resoleu l'equació  $-3x^2 - 2x + 15 = -15 + 2x + 2x^2 + x$ .

Aquesta equació és equivalent a  $-3x^2 - 2x + 15 + 15 - 2x - 2x^2 - x = 0$ . Sumant els termes semblants, tenim que això és equivalent a  $-5x^2 - 5x + 30 = 0$ . Aplicant la fórmula de segon grau (A.2), obtenim que les solucions són 2 i -3.

**Exercici 277.** Resoleu les equacions de 2n grau següents:

$$\begin{array}{ll} a) 4x^2 + 2x - 4 = -2x + 4 & d) -2x^2 + 4x - 3 = -2x + x^2 \\ b) 9x^2 - 63x + 90 = 0 & e) 2x^2 + 4x + 1 = -1 \\ c) -x^2 - 3x + 10 = x^2 + 3x - 10 & f) 2x + 1 = -2 - x^2 \end{array}$$

*Solució.* a) -2 i 1, b) 2 i 5, c) -5 i 2, d) 1, e) -1, f) no té solució ■

**Exercici 278.** Resoleu les equacions de 2n grau següents:

$$\begin{array}{ll} a) 3x^2 + 2x = 5x - 2 & f) 3(x + 4)^2 = 10 \\ b) 10x - 8x = x^2 - 5 & g) (x - 2)^2 - 8 = 20x \\ c) 9x - 8 = 7 - x^2 & h) 5(x - 1)^2 = 2 \\ d) 8x^2 - 2 = 10x^2 - 5x & i) (x - 1)^2 = -4 \\ e) (x - 2)^2 - 5 = 10 & j) (x - 5)^2 = 5x^2 \end{array}$$

*Solució.* a) no té solucions, b) no té solucions, c)  $-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{141}}{2}$ , d) 2 i  $\frac{1}{2}$ , e)  $2 \pm \sqrt{15}$ , f)  $-4 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$ , g)  $6 \pm 2\sqrt{37}$ , h)  $1 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$ , i) no té solució, j)  $-\frac{5}{4} \pm 5\frac{\sqrt{5}}{4}$  ■

**Nota 6.** Recordeu que  $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

## A.5 Arrels de polinomis

**Definició 59 (monomi).** Un *monomi* és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre real i una o diverses lletres. Al nombre se l'anomena *coeficient* del monomi; a la part que conté les lletres de l'anomena *part literal*. Les diverses lletres s'anomenen *variables*.

**Exemple 131.** Les expressions següents són monomis:

- $5x^3$
- $2x^2y^5$

- $-4xy$
- $\frac{-6}{5}x^4$
- $6x$
- $8$

En canvi aquestes expressions no són monomis:

- $\frac{5}{x}$
- $5x^3\sqrt{y}$
- $3x^{-2}$

**Definició 60 (polinomi).** Un *polinomi* és una expressió algebraica formada per la suma de diversos monomis. Els monomis que formen part del polinomi s'anomenen *termes*.

Aquí només veurem polinomis d'una variable, usualment  $x$ , com per exemple  $4x^2 - 5x + 2$  o  $5x^4 + 2x^2$ .

**Definició 61 (grau d'un polinomi).** El *grau* d'un polinomi d'un variable és el major exponent de la variable de cadascun dels seus termes

**Exemple 132.** El grau del polinomi  $4x^5 - 2^3 - 5x + 8$  és 5 i el grau de  $x^{10} - 2x^2 - 5x$  és 10.

**Definició 62 (terme independent d'un polinomi).** El *terme independent* d'un polinomi és el monomi de grau 0 del polinomi. Pot no tenir-ne.

**Exemple 133.** El terme independent del polinomi  $4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$  és  $-7$ ; en canvi el polinomi  $4x^3 - 2x^2 - 5x$  no en té.

**Notació 3.** Els polinomis en una variable  $x$ , es denoten per  $p(x)$ ,  $q(x)$ , etc. que es llegeix “ $p$  de  $x$ ”, “ $q$  de  $x$ ”, etc. Així per exemple si  $p(x) = 5x^2 - 2x$  i  $q(x) = x^2 - 2x$ , tenim que la seva suma és  $p(x) + q(x) = 6x^2 - 4x$ .

Les *operacions amb polinomis* bàsiques són:

- a) Suma. Per sumar dos polinomis, es sumen els termes del mateix grau. Així per exemple si  $p(x) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7$  i  $q(x) = -7x^5 + 3x^4 + 6x^3 - x^2 - 4x - 15$ , la seva suma és  $p(x) + q(x) = -6x^5 + 3x^4 + 7x^2 - 14x - 8$ . Aquesta suma es pot fer verticalment:

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad -6x^3 \quad +8x^2 \quad -10x \quad +7 \\
 -7x^5 \quad +3x^4 \quad +6x^3 \quad -x^2 \quad -4x \quad -15 \\
 \hline
 -6x^5 \quad +3x^4 \qquad \qquad +7x^2 \quad -14x \quad -8
 \end{array}$$

- b) Resta. La resta  $p(x) - q(x)$  es calcula sumant el polinomi  $p(x)$  amb el polinomi  $q(x)$  amb tots els coeficients canviats, és a dir,  $p(x) + (-q(x))$ . Si  $p(x) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7$  i  $q(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + x^2 - 6x$ , llavors  $p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x)) = x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 10x + 7 - x^5 + 7x^4 - 9x^3 - x^2 + 6x = 7x^4 - 15x^3 + 7x^2 - 4x + 7$ .

També es pot fer verticalment:

$$\begin{array}{r} x^5 \qquad \qquad -6x^3 \quad +8x^2 \quad -10x \quad +7 \\ -x^5 \quad +7x^4 \quad -9x^3 \quad -x^2 \quad +6x \\ \hline \qquad +7x^4 \quad -15x^3 \quad +7x^2 \quad -4x \quad +7 \end{array}$$

- c) Producte de polinomis. Es calcula multiplicant cada terme del primer polinomi per cada terme del segon: si  $p(x) = 7x^2 - 4x + 7$  i  $q(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2$ , llavors  $p(x) \cdot q(x)$  és igual a:

$$\begin{aligned} (7x^2 - 4x + 7) \cdot (2x^4 - 5x^3 + x^2) &= \\ 14x^6 - 35x^5 + 7x^4 - 8x^5 + 20x^4 - 4x^3 + 14x^4 - 35x^3 + 7x^2 &= \\ 14x^6 - 43x^5 + 41x^4 - 39x^3 + 7x^2 & \end{aligned}$$

- d) No tractarem la divisió de polinomis en general. Només tractarem el *mètode de Ruffini*, que permet dividir un polinomi qualsevol  $p(x)$  per un polinomi de la forma  $x - a$ , amb  $a$  un nombre enter positiu. Veurem un exemple: volem dividir el polinomi  $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$  per  $x - 1$ :

- (a) En primer lloc, escrivim els coeficients del polinomi  $p(x)$  de major a menor grau a una taula, posant-hi zeros allà on el polinomi no tengui termes:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ 1 & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -6 \end{array}$$

- (b) El primer coeficient del polinomi  $p(x)$  baixa sempre directament, tal com indica la fletxa,  
(c) A continuació, el divisor (l'1), que l'hem escrit a l'esquerra de la línia vertical, multiplica el primer coeficient ( $1 \cdot 1 = 1$ ) i el resultat es col·loca davall del segon coeficient del polinomi,  
(d) Llavors es suma el resultat d'aquesta multiplicació amb el segon coeficient del polinomi ( $1 + 1 = 2$ )



- (e) Ara, el divisor multiplica aquesta suma i el resultat es col·loca davall del tercer coeficient del polinomi  $p(x)$
- (f) Es repeteix aquest procés fins que no quedin coeficients.
- (g) El darrer nombre és el reste de la divisió (en aquest cas  $-6$ ); el quocient de la divisió l'hem d'extreure dels nombres del final de la taula  $10 - 4 \rightarrow x^2 + 0x - 4$ . El grau del polinomi quocient és sempre un menys que el grau de  $p(x)$  (en aquest cas  $3 - 1 = 2$ ).
- (h) Per tant, la divisió de  $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 4$  per  $x - 1$  dona com a quocient  $x^2 - 4$  i reste  $-6$ ; en altres paraules  $(x^2 - 4)(x - 1) + (-6) = x^3 - x^2 - 4x - 4$ .

El mètode de Ruffini serveix per a factoritzar un polinomi en polinomis irreductibles i per a trobar les seves arrels enteres.

**Definició 63 (arrel d'un polinomi).** Donat un polinomi  $p(x)$ , un nombre  $a$  és una *arrel* seva si substituint la  $x$  pel valor de  $a$ , dona 0.

**Teorema 31 (teorema fonamental de l'Àlgebra).** Donat un polinomi, el nombre d'arrels reals d'aquest polinomi és com a màxim el seu grau

**Exemple 134.** Són arrels de  $p(x) = 2x^2 - 7x + 6$  són 2 i  $\frac{3}{2}$ , ja que l'equació de segon grau  $2x^2 - 7x + 6 = 0$  té com a solucions aquests nombres (vegeu [Secció A.4](#)); en altres paraules  $p(\frac{3}{2}) = 0$  i  $p(2) = 0$ .

En general trobar les arrels d'un polinomi és un problema irresoluble, però existeix una manera de trobar les seves arrels enteres.

**Algorisme 9 (procediment per trobar les arrels enteres d'un polinomi).** Donat un polinomi  $p(x)$ , les arrels

- a) Si té terme independent, calculam els seus divisors enters
- b) Per a cada divisor  $d$  del terme independent, dividim  $p(x)$  per  $x - d$ . Si el reste de la divisió és 0, llavors  $d$  és una arrel de  $p(x)$ . Si el reste de la divisió no és 0, llavors  $d$  no és una arrel de  $p(x)$ .
- c) En cas de no tenir terme independent, llavors 0 és una arrel i podem factoritzar  $p(x)$  com un polinomi  $q(x)$  multiplicat per  $x^r$ , per qualche  $r > 0$ . En aquest cas, apliquem l'anterior a  $q(x)$ : totes les arrels de  $q(x)$  ho seran de  $p(x)$ .

**Exemple 135.** Trobeu les arrels del polinomi  $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ .

1. Els divisors enters de  $-4$  són 1,  $-1$ , 2,  $-2$ , 4,  $-4$ .
2. Provam de fer Ruffini amb  $p(x)$  i  $x - 1$ :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
 & \downarrow & + & + & + \\
 \mathbf{1} & & 1 & 2 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -2 & || -6
 \end{array}$$

Com que el reste és  $-6$  vol dir que  $1$  no és arrel de  $p(x)$

3. Ara provem amb  $-1$ :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \| & 0 \end{array}$$

Ara sí que hem obtingut un  $0$  al final. Per tant,  $-1$  és arrel de  $p(x)$ .

4. Ara provem de fer Ruffini amb  $2$ :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ 2 & & 2 & 6 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \| & 0 \end{array}$$

Per tant,  $2$  és arrel de  $p(x)$ .

5. Igualment, si aplicam el mètode de Ruffini amb  $-2$  també tendrem reste  $0$ , pel que  $-2$  també és una arrel.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & \downarrow & + & + & + \\ -2 & & -2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \| & 0 \end{array}$$

6. Com que ja tenim 3 arrels, ja no hem de intentar trobar-ne més ([teorema 31](#)).

**Nota 7.** En general, l'ordre en el que provem si els divisors senzers són o no arrels enteres és indistint

**Nota 8.** Pot ser que un polinomi no tengui arrels enteres però sí arrels reals: per exemple  $x^2 - 2$  no té arrels enteres (proveu de fer Ruffini per als divisors de  $-2$ ) però sí té arrels reals ( $\sqrt{2}$  i  $-\sqrt{2}$ ).

També pot ser que no tengui arrels reals: per exemple  $x^2 + 2$  no té arrels reals (es veu aplicant la fórmula de segon grau).

**Exercici 279.** Trobeu les arrels dels polinomis següents:

a)  $x^4 + 3x^3 - 40x^2$

b)  $2x^3 - x^2 - 118x - 315$

c)  $x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x$

d)  $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$

e)  $3x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 90x$

f)  $x^4 + 28x^3 - 60x^2$

Solució. a)  $-8, 0$  i  $5$ , b)  $-5, \frac{-7}{2}$  i  $9$ , c)  $0, 2$  i  $\sqrt[3]{3}$ , d)  $\pm\sqrt{2}, 2$  i  $-3$ , e)  $2, -3, 0$  i  $5$ , f)  $0$  (doble),  $2$  i  $-30$  ■

Exercici 280. Resoleu les equacions següents:

a)  $x^4 + 3x^3 - 40x^2 = 0$

b)  $2x^3 - x^2 - 118x = 315$

c)  $x^3 - \frac{5x^2}{2} + x = 0$

d)  $12x^4 - 39x^2 + 27 = 0$

Solució. a)  $-8, 0$  i  $5$ , b)  $-5, -\frac{7}{2}$  i  $9$ , c)  $0, \frac{1}{2}$  i  $2$ , d)  $\pm\frac{3}{2}, \pm 1$ . ■

## A.6 Factorització de polinomis

**Definició 64 (polinomi irreductible).** Un polinomi és *irreductible* si no es pot escriure com a producte de polinomis de menor grau. En altre cas, s'anomena *reductible*

- a) Els polinomis de primer grau són irreductibles. És a dir, tots els polinomis de l'estil  $ax + b$  són irreductibles. Per exemple  $2x - 4$  i  $x + 4$  són irreductible.
- b) Els polinomis de segon grau són irreductibles si, i només si, no tenen cap arrel real. És a dir  $p(x) = ax^2 + bx + c$  és irreductible si, i només si, l'equació  $ax^2 + bx + c = 0$  no té solució (vegeu [Secció A.4](#)). Per exemple,  $x^2 + 9$  és irreductible, però  $x^2 - 9$  i  $x^2 - 2x + 1$  són reductibles.
- c) Els polinomis de grau major o igual que 3 mai són irreductibles.

**Definició 65 (factorització de polinomis).** *Factoritzar* un polinomi  $p(x)$  és descompondre  $p(x)$  com a producte de polinomis irreductibles.

No existeix cap procediment per a factoritzar polinomis, ja que és equivalent a trobar arrels reals de polinomis de qualsevol grau. Encara que existeix un algorisme per factoritzar polinomis trobant arrels enteres.

**Algorisme 10 (procediment per factoritzar els polinomis).** *Donat un polinomi  $p(x)$ , s'han de seguir les passes següents*

1. Treure factor comú, si és possible (vegeu [Secció A.3](#))
2. Trobarem els divisors del terme independent

3. Per a cada divisor  $d$  del terme independent, provarem si  $d$  és arrel del polinomi  $p(x)$
4. Si  $d$  és arrel del polinomi, llavors  $p(x)$  es pot expressar com a producte de  $(x - d)$  i un polinomi  $q(x)$  de grau  $d - 1$ . En aquest cas, repetirem aquest algorisme des del primer pas amb el polinomi  $q(x)$ .  
Si  $d$  no és arrel, seguirem provant amb els altres divisors.
5. Si cap divisor del terme independent és arrel, llavors no podem factoritzar  $p(x)$ .
6. Al final, haurem de d'ajustar el coeficient de major grau per a què quedi el coeficient del terme de major grau de  $p(x)$ .

Exemple 136. Factoritzem el polinomi  $30x^4 + 35x^3 - 45x^2 + 10x$ .

1. Podem treure factor comú perquè tots el termes són múltiples de 5 i de  $x$ :

$$5x(6x^3 + 7x^2 - 9x + 2)$$

2. Aplicam el mètode de Ruffini al polinomi que queda dins el parèntesi (després de provar els divisors, l'únic que va bé és el  $-2$ ):

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ -2 & & -12 & 10 & -2 \\ \hline & 6 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

Cap dels divisors permet factoritzar per Ruffini el polinomi  $6x^2 - 5x + 1$ . Així, en aquest punt, la factorització és

$$5x(x + 2)(6x^2 - 5x + 1)$$

3. Com que el polinomi  $6x^2 - 5x + 1$  és de segon grau, resoldrem l'equació corresponent (sempre farem això amb els polinomis de segon grau):

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

4. Per tant, la factorització final obtinguda és

$$5x \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) (x + 2).$$

Ara bé, volem tenir 30 com a coeficient de major grau (30 és el coeficient de major grau del polinomi original) i no 5 (observa que  $5x \cdot x \cdot x \cdot x = 5x^4$  és el terme de major grau).

Llavors, hem de multiplicar per 6. D'aquesta manera, la factorització final és  $6 \cdot 5x \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) (x + 2)$ , és a dir,

$$30x \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) (x + 2).$$

Exercici 281. Factoritzeu els polinomis següents:

a)  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b)  $2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

c)  $x^3 - x^2 + 9x - 9$

d)  $15x^3 + 25x^2 - 10x$

e)  $3x^3 - 3x^2 - 6x$

f)  $2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 8x + 12$

g)  $-x^3 + x^2 + 4x - 4$

h)  $-5x^4 + 20x^2 - 20$

i)  $3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x$

*Solució.* a)  $(x-1)(x+2)(x-3)$ , b)  $2(x-1)(x+2)(x-3)$ , c)  $(x-1)(x^2+9)$ , d)  $15x(x-\frac{1}{3})(x+2)$ , e)  $3x(x-2)(x+1)$ , f)  $2(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+3)$ , g)  $-(x-1)(x+2)(x-2)$ , h)  $-5(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$  (resoleu l'equació biquadrada  $-5t^2 + 20t - 20 = 0$ ), i)  $3(x-2)x(x-3)(x+3)$  ■



## *B*

### Exercicis dels exàmens oficials

Exercicis dels [exàmens oficials](#)<sup>1</sup> des de l'any 2010 classificats per blocs.

#### B.1 Àlgebra lineal

Exercici 282 (2010.a). Donada una matriu quadrada  $A$ , com es diu una matriu quadrada  $B$  tal que  $A \cdot B = B \cdot A = I$ , on  $I$  és la matriu identitat? Quina condició ha de satisfer la matriu quadrada  $A$  perquè existeixi l'anterior matriu  $B$ ?

Exercici 283 (2010.b). Donat el següent sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - z = -2 \\ 2x + \lambda y = 0 \\ x - 2y + z = 3 \end{array} \right\}$$

Es demana:

- a) Discutir el seu caràcter per a tots els valors de  $\lambda \in \mathbb{R}$
- b) Resoldre'l en els casos en què sigui possible

---

<sup>1</sup>[https://estudis.uib.cat/grau/acces/mes\\_grans25/models\\_examen/](https://estudis.uib.cat/grau/acces/mes_grans25/models_examen/)

Exercici 284 (2011.a). Siguin  $A$  i  $B$  dues matrius quadrades d'ordre  $2 \cdot 2$ , tals que  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Si el determinant de la matriu  $A$  val 4,  $\det(A) = 4$ , quant val  $\det(B)$  el determinant de la matriu  $B$ ?

Donada la matriu  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  escriu la seva matriu transposada  $C^t$ .

Escriu una matriu  $X$ , que no sigui la identitat, de tal manera que  $X^t = X$ .

Exercici 285 (2011.b). Una nació importa 21.000 vehicles mensuals de les marques  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , al preu de 1,2; 1,5 i 2 milions d'euros respectivament. Si el total de la importació ascendeix a 33.200 milions, i de la marca  $X$  s'importa el 40% de la suma de les altres dues marques, quants vehicles de cada marca entren en el país?

Exercici 286 (2012.a). Determinau els valors de  $k$  per als quals la matriu  $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$  admet inversa

Exercici 287 (2012.b). Determinau les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercici 288 (2013.a). Determinau els valors de  $t$  per als quals la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix} \text{ admet inversa}$$

Exercici 289 (2013.b). Determinau les solucions del sistema d'equacions indicant si el sistema és o no compatible determinat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 290 (2014.a). Determinau els valors de  $a$  i  $b$  de manera que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \text{ verifiqui que } A^2 = A.$$

Exercici 291 (2014.b). Calculau les arrels del polinomi  $p(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ . Expressau la descomposició factorial del polinomi anterior.

Exercici 292 (2015.a). Determinau els valors de  $a$  per als quals la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ no admet inversa}$$



Exercici 293 (2015.b). Determinau si el sistema  $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  és o no compatible (determinat o no) quan  $a = 1$  i  $a = -2$ .

Exercici 294 (2016.a). Els sous del pare, la mare i un fill sumats donen 16.250 euros. La mare guanya el doble que el fill. El pare guanya  $\frac{2}{3}$  del que guanya la mare. Utilitzant un sistema d'equacions que s'ajusti al problema i resolent-ho, determinau quant guanya cadascun d'ells

Exercici 295 (2016.b). Determinau el conjunt de valors de  $x$  per als quals la matriu següent

$$\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

no admet inversa. Per a quins valors de  $x$  la matriu té rang 3?

Exercici 296 (2017.a). Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; calculau  $(A+B)^t$  o  $(A \cdot B)^{-1}$ . Nota  $A^t$  vol dir la transposada de la matriu  $A$ .

Exercici 297 (2017.b). Resoleu el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + x \\ 2x - y - 3z = 4x - 2 \\ -2x + y = 6 - z. \end{cases}$$

Exercici 298 (2018). Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ , es demana:

- Calculau  $A \cdot B$
- Calculau  $A^{-1}$  i  $B^{-1}$
- Calculau  $(A \cdot B)^{-1}$
- Calculau  $A^{-1} \cdot B^{-1}$
- Quina relació hi ha entre  $(A \cdot B)^{-1}$  i  $B^{-1} \cdot A^{-1}$ ?

Exercici 299 (2019.a). Determinau les matrius  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  que satisfan l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercici 300 (2019.b). a) Donat el següent sistema d'equacions 
$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + ay = 0 \\ x - 2y + z = 3, \end{cases}$$
 discuteix el seu caràcter en funció del paràmetre real  $a$ . b) Resoleu-lo quan  $a = 2$ .

Exercici 301 (2020.a). Sigui  $A$  i  $B$  dues matrius quadrades d'ordre  $2 \cdot 2$ , tals que  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Si  $\det(A) = 4$ , quan val  $\det(B)$ ? Donada la matriu  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ , escriu la seva matriu transposada  $C^t$ . Escriu una matriu  $X$ , que no sigui la identitat, de tal manera que  $X^t = X$ .

Nota:  $\det(A)$  indica el determinant de la matriu  $A$  i  $X^t$  indica la matriu transposada de la matriu  $X$ .

Exercici 302 (2020.b). Un agricultor té repartides 10 hectàrees de terreny en guaret, cultiu d'ordi i cultiu de blat. La superfície dedicada a l'ordi ocupa 2 hectàrees més que la dedicada a l'ordi ocupa 2 hectàrees més que la dedicada al blat, mentre que en guaret té 6 hectàrees menys que la superfície total dedicada al cultiu de l'ordi i del blat. Quantes hectàrees té dedicades a cadascun dels cultius i quantes estan dedicades al guaret?

Exercici 303 (2021.a). Sigui  $A$  i  $B$  dues matrius, inverses l'una de l'altra. Si  $\det(A) = 10$ , què val  $\det(B)$ ? Per a quins valors de  $a$  la matriu  $\begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$  no té inversa?

Exercici 304 (2021.b). Demostrau que el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + y + az &= 6 \end{aligned} \right\}$$

té solució única si  $a \neq 8$ . Calculeu les solucions quan  $a = 8$ .

Exercici 305 (2022.a). Els sous del pare, la mare i un fill sumats donen 3.250 euros. La mare guanya el doble que el fill. El pare guanya  $\frac{2}{3}$  del que guanya la mare. Quant guanya cadascun?

Exercici 306 (2022.b). Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## B.2 Geometria

Exercici 307 (2010). Una recta  $r$  passa pel punt  $(3, 4, 7)$  i és paral·lela a la recta  $s$  d'equació

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}$$

Es demana:

- a) Determinar les equacions contínues i paramètriques de la recta  $r$
- b) Determinar l'equació d'un pla  $\pi$  que és perpendicular a  $r$  i passa pel punt  $(1, 1, 1)$

Exercici 308 (2011). Calculau l'equació implícita del pla que passa pel punt  $P = (2, 3, 5)$  i és paral·lel als vectors  $\vec{u} = (-1, -2, -3)$  i  $\vec{v} = (1, 3, 5)$ . Calculau  $n$  perquè el punt  $A = (1, n, 6)$  pertanyi al pla trobat

Determinau l'equació contínua de la recta que té per vector director el vector normal del pla trobat i que passa pel punt  $P = (2, 3, 5)$ .

Exercici 309 (2012.a). Calculau el valor del pendent de la recta  $y = mx + 3$  sabent que passa pel punt d'intersecció de les rectes  $y = 2x + 1$  i  $y = x + 5$

Exercici 310 (2012.b). Determinau l'equació del pla que passa pels punts  $A = (2, 3, 4)$ ,  $B = (7, 2, 5)$  i  $C = (2, 3, 1)$ .

Exercici 311 (2013). Els punts  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 1)$  i  $C = (3, 3)$  són vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram de vèrtexs  $ABCD$ . Trobeu les coordenades del vèrtex que falta, les equacions de les rectes que passen per les diagonals i les mesures d'aquestes diagonals.

Exercici 312 (2014.a). Determinau el pla  $\pi$  que és perpendicular al vector  $\vec{v} = (4, -2, 2)$  i que passa pel punt  $A = (1, 2, 4)$ .

Exercici 313 (2014.b). Donat el punt  $D = (1, 1, 3)$  calculau el vector  $\vec{AD}$ , on  $A = (1, 2, 4)$ . Està el vector  $\vec{AD}$  dins el pla  $\pi$ , determinat a l'apartat anterior?

Exercici 314 (2015.a). Determinau el punt d'intersecció de la recta  $\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + 6\lambda \end{cases}$

amb el pla  $x - 3y + 5z + 11 = 0$

Exercici 315 (2015.b). Calculau  $b$  en el punt  $(5, -3, b)$  perquè sigui un punt del pla  $x - 3y + 5z + 11 = 0$ .

Exercici 316 (2016). 1. Determinau la intersecció de la recta  $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$  i el pla  $\pi \equiv x - y + z = 7$ . 2. Determinau l'equació del pla que és paral·lel al pla  $\pi$  i passa pel punt d'intersecció obtingut a l'apartat anterior

Exercici 317 (2017). 1. Donat el pla  $\pi \equiv x + y + z = 4$ , determinau la recta  $r$  que passa pel punt  $P = (1, 2, 4)$  i és perpendicular a  $\pi$ . 2. Calculau el punt d'intersecció de  $r$  amb  $\pi$ .

Exercici 318 (2018.a). Calculau unes equacions paramètriques del pla d'equació implícita  $\pi \equiv x + y + z = 3$ , i indicau un dels seus punts i dos vectors directores independents.

Exercici 319 (2018.b). Donada la recta d'equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$$

Està la recta continguda en el pla d'equació  $x + y + z = 3$ ?

Exercici 320 (2019). Se sap que un pla  $\pi$  és perpendicular al vector  $\vec{v} = (2, 3, -1)$  i que passa pel punt  $(2, -1, 3)$ . Aleshores:

- Determinau l'equació del pla  $\pi$
- Determinau l'equació de la recta que és perpendicular al pla  $\pi$  i passa pel punt  $P = (3, 0, -2)$ .

Exercici 321 (2020.a). Calculeu l'equació implícita del pla que passa pel punt  $P = (2, 3, 5)$  i és paral·lel als vectors  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  i  $\vec{v} = (-1, -3, -5)$ . Calculeu  $n$  per a què el punt  $A = (n, 3, 6)$  pertanyi al pla trobat.

Determinau l'equació contínua de la recta que té per vector director el vector normal del pla trobat i que passa pel punt  $P = (2, 3, 5)$ .

Exercici 322 (2021). Donat el punt  $P = (2, -1, 3)$ , calculeu les equacions dels plans següents:

- Paral·lel al pla que té per equació  $2x + 3y - z + 4 = 0$  i conté  $P$
- Perpendicular a la recta  $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+2}{-1}$  i conté  $P$

Exercici 323 (2022.a). Calculeu l'equació del pla perpendicular al vector que uneix els punts  $P = (2, -1, 3)$  i  $Q = (-4, 2, 2)$  i que passa pel seu punt mitjà.

Exercici 324 (2022.b). Determinau les equacions implícites de la recta que és paral·lela al vector que uneix els punts  $P = (2, -1, 3)$  i  $Q = (-4, 2, 2)$  i que passa pel punt  $R = (-1, 1, 1)$ .

## B.3 Probabilitat

Exercici 325 (2010). Una enquesta ha revelat que el 23% dels habitants de Barcelona llegeix *La Vanguardia*, el 14% llegeix *El País* i el 6% llegeix ambdós diaris.

- Quina probabilitat hi ha que un individu, triat a l'atzar i que duu *El País* sota l'aixella, sigui lector de *La Vanguardia*?
- I, si duu *La Vanguardia*, quina és la probabilitat que llegeixi *El País*?
- Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats anteriors en percentatge de lectors.

Exercici 326 (2011). En una determinada fàbrica d'automòbils, el 6% dels cotxes tenen defectes en el motor, el 8% tenen defectes en la carrosseria i el 2% té defectes en ambdós [components]. Sigui  $A$  el succés "el cotxe té defecte en el motor" i  $B$  el succés "el cotxe té defecte en la carrosseria". Es demana:

- a) Expressar les dades proporcionades a l'enunciat com a probabilitats relacionades amb els successos  $A$  i  $B$ .
- b) Quina és la probabilitat que un cotxe tingui almenys un defecte?
- c) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós?
- d) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats b) i c) en percentatge de cotxes

Exercici 327 (2012). Donats dos successos  $A$  i  $B$ , se sap que  $p(A) = 0,5$ ,  $p(B) = 0,3$  i  $p(A \cap B) = 0,1$ .

- a) Calculau  $p(A | B)$  i  $p(A | A \cap B)$
- b) Calculau  $p(A \cap B | A \cup B)$  i  $p(A | A \cup B)$

Exercici 328 (2013). Donades tres urnes,  $U1$ ,  $U2$  i  $U3$ , amb la següent composició de bolles blanques i negres:

$U1$ : 3 blanques i 2 negres;  $U2$ : 4 blanques i 2 negres;  $U3$ : 1 blanca i 3 negres,

- a) Calculeu la probabilitat d'extreure una bolla negra
- b) Determinau la probabilitat que una bolla negra que s'ha extret procedeixi de la segona urna

Exercici 329 (2014). Una caixa conté 15 boles negres i 10 boles blanques. Es demana:

1. Si en triam una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui negra? I que sigui blanca?
2. Si extraïem dues boles, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que ambdues siguin blanques?
3. Si extraïem dues boles, sense reemplaçament, calculau la probabilitat que la primera sigui blanca i la segona negra

Exercici 330 (2015). Dels successos  $A$  i  $B$  se sap que  $p(A) = 0,4$ ,  $p(B) = 0,5$  i  $p(A \cup B) = 0,7$ . 1. Calculau  $p(A \cap B)$  i  $p(A^c \cap B^c)$ . 2. Són els successos  $A$  i  $B$  independents?. Nota: per  $A^c$  denotam el succés complementari de  $A$ .

Exercici 331 (2016.a). En una aula de dibuix hi ha 40 cadires, 30 amb respatllet i 10 sense. Entre les cadires sense respatllet n'hi ha 3 de noves, i entre les cadires amb respatllet n'hi ha 7 de noves. Triada a l'atzar una cadira, quina és la probabilitat que sigui nova?

Exercici 332 (2016.b). En un experiment se sap que  $p(B) = 0,3$  i  $p(A | B) = 0,1$ . Determinau  $p(A \cap B)$ .

Exercici 333 (2017). Un CEO d'una empresa balear té una reunió a Madrid i ha de triar de forma equiprobable entre dues companyies aèries. La probabilitat d'arribar amb retard amb la companyia  $A$  és de  $0,25$  i amb la companyia  $B$  és de  $0,10$ .

- a) Triada a l'atzar una companyia, quina és la probabilitat que el CEO arribi amb retard a la reunió?
- b) Si el CEO ha arribat tard a la reunió, quina és la probabilitat que hagi utilitzat la companyia  $A$ ?

Exercici 334 (2018). D'una baralla espanyola<sup>2</sup> de 48 cartes es considera l'experiment aleatori "extreure una carta". Calculau la probabilitat dels successos següents:

- a) Treure una carta que sigui un nombre primer
- b) Que la carta que extraïem no sigui un as
- c) Que sigui una figura d'espases
- d) Treure una carta de copes
- e) Treure una carta que sigui una figura i que no sigui de copes

Exercici 335 (2019). El 70% dels clients d'una companyia d'assegurances d'automòbils té més de 25 anys. Un 5% dels clients d'aquest grup té algun accident al llarg de l'any. En el cas de clients més joves de 25 anys, aquest percentatge és del 20%.

- a) Si s'escull un assegurat a l'atzar, calculau la probabilitat que tingui algun accident aquest any
- b) Si una persona va tenir algun accident, calculau la probabilitat que sigui més jove de 25 anys.

---

<sup>2</sup>Una baralla espanyola de 48 cartes està formada per quatre colls de 12 cartes cada coll: oros, bastos, espases i copes. Les cartes dins de cada coll van numerades de l'1 al 12. Una figura és una carta marcada amb un 10, 11 o un 12. Un as és una carta marcada amb un 1.

Exercici 336 (2020). En una determinada fàbrica d'automòbils, el 6% dels cotxes tenen defectes al motor, el 8% tenen defectes a la carrosseria i el 2% tenen defectes en ambdós. Sigui  $A$  el succés 'el cotxe té defecte al motor' i  $B$  el succés 'el cotxe té defecte a la carrosseria'. Es demana:

- a) Expressau les dades proporcionades a l'enunciat com a probabilitats relacionades amb els successos  $A$  i  $B$
- b) Quina és la probabilitat que un cotxe tengui almenys un defecte?
- c) I la probabilitat que un cotxe no sigui defectuós?
- d) Expressau i interpretau els resultats obtinguts als apartats b) i c) en percentatge de cotxes.

Exercici 337 (2021). En una cada hi ha tres clauers,  $A$ ,  $B$  i  $C$ . El primer té 5 claus; el segon, 7, i, el tercer, 8, de les quals només una de cada un obri la porta del rebost. Es tria a l'atzar un clauer i, d'aquest, una clau per intentar obrir el rebost. Feu un diagrama en arbre que representi les dades i probabilitats del problema

- a) Quina serà la probabilitat que s'encerti la clau?
- b) Quina serà la probabilitat que no s'encerti la clau?
- c) Quina serà la probabilitat que el clauer triat sigui el tercer i la clau no obri?
- d) I si la clau triada és la correcta, quina serà la probabilitat que pertanyi al primer clauer,  $A$ ?

Exercici 338 (2022). Es disposa d'una moneda amb cara i creu, completament equilibrada i que no presenta cap problema. Tres amics, Pep, Tomeu i Cristòfol, es disposen a llançar la moneda per aquest ordre. Quan un treu cara, s'interromp el joc.

- a) Quina és la probabilitat que Cristòfol llanci la moneda i tregui cara?
- b) Calculau les probabilitats que Pep i Tomeu en llançar la moneda treguin cara.
- c) Quina és la probabilitat que Tomeu llanci la moneda i tregui creu?





## Bibliografia

- [1] María E. BALLVÉ, Ana M. PORTO, Miguel DELGADO, Teresa ULECIA, *Problemas de Matemáticas Especiales*. Sanz y Torres, Madrid, 2a edició, 2004.
- [2] Miguel DE GUZMÁN, *Selectividad. Matemáticas I. Pruebas de 1995*. Anaya, Madrid, 1996.
- [3] Angélica ESCOREDO, María Dolores GÓMEZ, José LORENZO, Pedro MACHÍN, Carlos PÉREZ, José DEL RÍO, Domingo SÁNCHEZ, *Matemàtiques II 2 Batxillerat*. Edicions Voramar, Santillana, València, 2009.
- [4] Alicia ESPUIG BERMELL *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior. Matemàtiques*. 2009. Disponible [en línia](#)<sup>3</sup>. Aquest material es distribueix sota llicència Reconeixement No-Comercial CompartirIgual 3.0 de Creative Commons (CC-BY-NC-SA 3.0)
- [5] Agustín ESTÉVEZ ANDREU, Juan ENCISO PIZARRO, *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Schaum, McGraw-Hill, Madrid, 2005.
- [6] Francisco Javier GONZÁLEZ ORTIZ, *Proyecto MaT<sub>E</sub>X* (versió 1.00). 2004. Disponible en [línia](#) (accedit el novembre de 2014).

---

<sup>3</sup><http://somenxavier.github.io/cepasud/acfgs-alicia-espuig.html>

- 
- [7] Javier SÁNCHEZ, *Apunts de Curs d'Orientació a la Universitat (COU)*. Notes manuscrites de Xavier Bordoy. Palma, 1996. No publicat.
- [8] Ángel VEGAS PÉREZ, Manuel LÓPEZ CACHERO, *Elementos de matemáticas para economistas 1*. Ediciones Pirámide, Madrid, 2a edició, 1982.

# Índex de figures

1.1	Regla pneumotècnica per a recordar la regla de Sarrus . . . . .	14
4.1	Pla cartesià . . . . .	64
4.2	Diversos punts al pla cartesià . . . . .	64
4.3	Diversos vectors al pla . . . . .	66
4.4	Components d'un vector . . . . .	67
4.5	Regla del paral·lelogram per al càlcul de la suma de vectors . . . . .	69
4.6	Exemple d'un producte d'un escalar per un vector . . . . .	70
4.7	Visualització de l'equació vectorial d'una recta . . . . .	74
4.8	Visualització de l'equació explícita d'una recta . . . . .	80
4.9	Les diferents posicions relatives possibles entre dues rectes . . . . .	83
5.1	Representació usual del sistema de coordenades cartesianes . . . . .	91
5.2	Representació del punt $A(1, 2, 3)$ . . . . .	92
5.3	Descomposició lineal del vector $\vec{v}(3, 2, 2)$ respecte de la base estàndard . . . . .	93
5.4	Àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ . . . . .	96
5.5	Un paral·lelepípede . . . . .	97
5.6	Volum del paral·lelepípede definit pels vectors $\vec{u}$ , $\vec{v}$ i $\vec{w}$ . . . . .	98
5.7	Representació de la recta que té vector director $\vec{v}$ i que passa per $P_0$ . . . . .	99

---

5.8	Relacions entre les equacions d'una recta . . . . .	105
5.9	Representació de les equacions vectorials d'un pla . . . . .	107
5.10	Vector normal a un pla . . . . .	111
5.11	Vector director d'una recta com a producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen . . . . .	112
6.1	Operacions entre esdeveniments representats mitjançant diagrames de Venn . . . . .	142
6.2	Diagrama de Venn de tres esdeveniments . . . . .	145
7.1	Diagrama d'arbre . . . . .	154
7.2	Diagrama de Venn dels consumidors de pa . . . . .	159
7.3	Diagrama de Venn dels subscriptors de diaris . . . . .	160

## Índex de taules

4.1	Valors dels cosinus pels angles més usuals . . . . .	72
5.1	Valors dels sinus, cosinus i tangent pels angles més usuals . .	131
7.1	Taula de contingència del sexe i tipus de contracte . . . . .	156
7.2	Taula de contingència corresponent a la tinença de tauleta informàtica i portàtil . . . . .	158



## Índex de resultats

1	Algorisme (regla de Sarrus) . . . . .	14
2	Algorisme (desenvolupament d'un determinant) . . . . .	15
1	Definició (matriu) . . . . .	21
2	Definició (ordre d'una matriu) . . . . .	21
3	Definició (matriu nul·la) . . . . .	22
4	Definició (matriu oposada) . . . . .	22
5	Definició (matriu fila) . . . . .	22
6	Definició (matriu columna) . . . . .	22
7	Definició (diagonal principal) . . . . .	22
8	Definició (matriu unitat) . . . . .	22
9	Definició (matriu triangular) . . . . .	23
10	Definició (matriu diagonal) . . . . .	23
1	Observació . . . . .	23
11	Definició (igualtat de matrius) . . . . .	23
12	Definició (suma i resta de matrius) . . . . .	23
13	Definició (multiplicació de nombres i matrius) . . . . .	24
14	Definició (transposició de matrius) . . . . .	24
1	Condicció (producte de dues matrius) . . . . .	25
15	Definició (multiplicació de matrius) . . . . .	25

16	Definició (matriu inversa)	27
17	Definició (matriu regular)	27
1	Teorema	28
2	Teorema (càlcul de la matriu inversa)	28
3	Algorisme (càlcul de la matriu inversa)	28
2	Observació	30
18	Definició (menor d'una matriu)	31
19	Definició (rang d'una matriu)	32
20	Definició (combinació lineal)	32
3	Proposició (relació de la combinació lineal i els determinants)	33
21	Definició (dependència lineal)	33
4	Proposició (fites del rang d'una matriu)	33
4	Algorisme (càlcul del rang d'una matriu de dalt a baix)	34
22	Definició (sistema d'equacions lineal)	41
23	Definició (tipus de sistemes lineals)	42
24	Definició (sistema homogeni)	42
5	Algorisme (regla de Cràmer)	45
5	Teorema (teorema de Rouché-Frobenius)	46
3	Observació	47
4	Observació	47
1	Notació (notació dels punts)	64
25	Definició (vector fix)	65
2	Notació (notació de vectors)	65
26	Definició (vector lliure)	66
27	Definició (coordenades i components d'un vector)	67
5	Observació (vector d'extrems donats)	68
28	Definició (mòdul d'un vector)	68
29	Definició (vector unitari)	68
30	Definició (ortogonalitat, ortonormalitat)	68
31	Definició (suma de dos vectors)	69
32	Definició (diferència de dos vectors)	69
33	Definició (producte d'un escalar per un vector)	70
6	Observació	70
6	Proposició (Condicció de paral·lelisme entre dos vectors)	70
34	Definició (producte escalar de dos vectors)	71
7	Proposició (Relació entre producte escalar i angle entre dos vectors)	72
7	Observació	72
8	Teorema (Propietats del producte escalar)	72
8	Observació	74
9	Observació	74
10	Observació	76



11	Observació	76
12	Observació	77
9	Proposició	77
10	Proposició	77
13	Observació	78
11	Proposició (relació entre les pendents de rectes paral·leles o perpendiculars)	81
12	Proposició (equació de la recta determinada per dos punts donats)	81
13	Proposició (posició relativa entre dues rectes)	82
14	Proposició (criteri de posició relativa)	83
15	Proposició (criteri de posició relativa)	83
35	Definició (base estàndard de vectors)	92
36	Definició (producte vectorial de vectors)	94
16	Proposició (mòdul del producte vectorial)	95
14	Observació	96
37	Definició (producte mixt)	96
15	Observació	97
38	Definició (paral·lelepípede)	97
17	Proposició (càlcul del volum d'un paral·lelepípede)	97
39	Definició (tetraedre)	98
18	Proposició (càlcul del volum d'un tetraedre)	98
40	Definició (equació vectorial de la recta)	98
16	Observació	100
17	Observació	101
18	Observació	101
19	Observació	101
19	Proposició (vector director a partir de l'equació implícita)	102
20	Observació	107
41	Definició (vector normal d'un pla)	110
20	Proposició (perpendicularitat del vector normal)	110
21	Observació	111
21	Proposició (posició relativa de dues rectes usant proporcionalitat de vectors)	113
22	Proposició (posició relativa de dues rectes usant matrius)	114
23	Proposició (posició relativa entre pla i recta (versió eq. implícita))	115
24	Proposició (posició relativa entre pla i recta (versió vector normal))	115
25	Proposició (posició relativa entre dos plans (versió rangs de matrius))	116
26	Proposició (posició relativa entre dos plans (versió vectors normals))	117

42	Definició (experiència)	137
43	Definició (experiment determinista)	138
44	Definició (experiment aleatori)	138
45	Definició (espai mostral)	138
46	Definició (esdeveniment)	139
27	Proposició	140
47	Definició (esdeveniment elemental)	140
48	Definició (esdeveniment impossible)	140
49	Definició (esdeveniment segur)	140
50	Definició (unió d'esdeveniments)	140
51	Definició (intersecció d'esdeveniments)	141
52	Definició (esdeveniment contrari)	141
53	Definició (diferència d'esdeveniments)	141
22	Observació	143
54	Definició (probabilitat)	147
55	Definició (probabilitat condicionada)	150
28	Proposició	151
56	Definició (experiment compost)	152
29	Proposició (probabilitat total)	155
30	Teorema (teorema de Bayes)	155
23	Observació	157
57	Definició (múltiple d'un nombre)	175
58	Definició (mínim comú múltiple)	175
6	Algorisme (càlcul del mcm amb la llista de múltiples)	175
7	Algorisme (càlcul del mcm amb la factorització de nombres)	176
8	Algorisme (càlcul del mcm de forma ràpida per nombres petits)	176
59	Definició (monomi)	180
60	Definició (polinomi)	181
61	Definició (grau d'un polinomi)	181
62	Definició (terme independent d'un polinomi)	181
3	Notació	181
63	Definició (arrel d'un polinomi)	183
31	Teorema (teorema fonamental de l'Àlgebra)	183
9	Algorisme (procediment per trobar les arrels enteres d'un polinomi)	183
64	Definició (polinomi irreductible)	185
65	Definició (factorització de polinomis)	185
10	Algorisme (procediment per factoritzar els polinomis)	185

## Glossari

- adjunt, 17
- arrel d'un polinomi, 185
- base estàndard de vectors, 95
- branca
  - d'un diagrama d'arbre, 155
- coeficient
  - d'un monomi, 182
- coeficients
  - d'un sistema, 43
- combinació lineal, 34
- condició
  - de perpendicularitat entre dos vectors, 75
- conjunt buit, 142
- coodenades, 94
- coordenada d'un vector, 69
- coordenades, 65
- dependència lineal, 35
- determinant, 15
- diagonal principal, 24
- diagrama
  - d'arbre, 155
  - de Venn, 143
- diferència
  - de dos vectors, 71
- dimensió, 23
- eix
  - de les abscises, 65
  - de les ordenades, 65
- eixos de coordenades, 65
- equacions
  - completes de segon grau, 181
  - de segon grau, 181
  - incompletes de segon grau, 181
- equació
  - contínua
    - d'una recta, 78, 102

- de primer grau, 179
- explícita
  - d'una recta, 81
- general
  - d'una recta, 79
  - del pla, 110
- implícita
  - d'una recta, 79, 103
- paramètrica
  - d'un pla, 109
  - d'una recta, 77, 101
- vectorial
  - d'un pla, 109
  - d'una recta, 76, 100
- escalar, 26
- esdeveniment, 141
  - complementari, 143
  - compost, 142
  - contrari, 143
  - elemental, 142
  - impossible, 142
  - segur, 142
- esdeveniments
  - compatibles, 143
  - incompatibles, 143
  - independents, 153
- espai cartesià, 94
- espai mostral, 140
- experiment, 139
  - aleatori, 140
  - compost, 154
  - determinista, 140
  - simple, 154
- experiència, 139
  - aleatòria, 140
  - determinista, 140
- extremes d'un vector, 67
- factoritzar
  - un polinomi, 187
- final d'un vector, 67
- forma matricial d'un sistema, 45
- fulla
  - d'un diagrama d'arbre, 155
- grau
  - d'un polinomi, 183
- iguultat de matrius, 25
- incògnites d'un sistema, 43
- independència lineal, 35
- intersecció d'esdeveniments, 143
- jerarquia
  - d'operacions, 176
- lleis
  - de De Morgan, 145
- matriu, 23
  - adjunta, 30
  - ampliada, 46
  - columna, 24
  - de coeficients, 46
  - de termes independents, 46
  - de variables, 46
  - diagonal, 25
  - fila, 24
  - identitat, 24
  - inversa, 29
  - nul · la, 24
  - oposada, 24
  - quadrada, 23
  - rectangular, 23
  - regular, 29
  - singular, 29
  - transposta, 26
  - triangular, 25
  - unitat, 24
- menor
  - d'una matriu, 33
- monomi, 182
- multiplicació
  - d'escalar per matriu, 26
  - de matrius, 27
- mètode de Ruffini, 184
- mínim comú múltiple, 177
- mòdul
  - d'un vector, 67, 70
- múltiple, 177

- operacions
  - de polinomis, 183
- ordenada a l'origen, 81
- ordre, 23
  - d'un menor, 33
  - determinant, 15
- origen
  - d'un vector, 67
  - de coordenades, 65, 93
- ortogonalitat, 70
- ortonormalitat, 70
- paral·lelepípede, 99
- part literal d'un monomi, 182
- pendent d'una recta, 81
- pla, 108
- pla cartesià, 65
- plans
  - coincidentes, 114
- polinomi, 183
  - irreductible, 187
  - reductible, 187
- posició relativa
  - entre dues rectes, 85
- probabilitat, 149
  - condicionada, 152
  - de  $A$  condicionat a  $B$ , 152
  - total, 157
- producte
  - d'un escalar per vector, 72
  - escalar, 73
  - mixt, 98
  - vectorial, 96
- rang, 34
- recta
  - constant, 81
  - creixent, 81
  - decreixent, 81
- rectes
  - coincidentes, 85, 115
  - paral·leles, 85, 115
  - que es creuen, 115
  - secants, 84, 115
- regla
  - de Cràmer, 47
  - de Laplace, 151
  - de Sarrus, 16
  - del llevataps, 98
  - del paral·lelogram, 71
- resoldre un sistema, 44
- resta
  - de matrius, 25
- sistema
  - compatible, 44
    - determinat, 44
    - indeterminat, 44
  - doblement indeterminat, 44
  - homogeni, 44
  - incompatible, 44
  - simplement indeterminat, 44
- sistema d'equacions lineal, 43
- sistema de coordenades, 65, 94
- solució d'un sistema, 43
- succés, 141
- suma
  - de matrius, 25
  - de vectors, 71
- taula
  - de contingència, 158
- teorema
  - de Bayes, 157
  - de Rouché-Frobenius, 48
- terme independent
  - d'un polinomi, 183
- termes, 176
  - d'un polinomi, 183
  - independents d'un sistema, 43
- tetraedre, 100
- transposició de matrius, 26
- unió d'esdeveniments, 142
- valor+absolut, 16
- variables, 182
- vector

director, 76, 100, 108

equipolent, 68

fix, 67

linealment independent, 108

lliure, 68

normal

    a un pla, 112

ortogonal, 70

ortonormal, 70

perpendicular, 70

unitari, 70

volum

    paral·lelepípede, 99

    tetraedre, 100