$\Rightarrow rg\, M = 2 \Rightarrow$ C.I.

Hem de parametritzar una variable i dir les equacions independents.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ les dues primeres equacions són independents. Per tant el sistema queda.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Sigui $z = \lambda$ un nombre qualsevol.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 2\lambda \\ -x + y = \lambda \end{cases}$$

$$2y = 3\lambda$$

$$y = \frac{3\lambda}{2}$$

$$x = 2\lambda - \frac{3\lambda}{2} = \frac{4\lambda - 3\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

$\Rightarrow$ les solucions del sistema són

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{3\lambda}{2}, \quad z = \lambda$$

f) $\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + 5y + 7z = 1 \\ -x - y + 5z = 1 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

- $|A| = 25 - 35 - 1 + 5 - 15 + 1 = -20 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$
$\Rightarrow$ C.D.

- Apliquem, per tant, la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{125 + 21 - 1 - 5 - 15 + 35}{-20} = \frac{160}{-20} = \boxed{-8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{5 - 35 + 1 + 1 - 25 - 7}{-20} = \frac{-60}{-20} = \boxed{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{5 - 3 - 5 + 25 - 3 + 1}{-20} = \frac{20}{-20} = \boxed{-1}$$

110) Resoleu els sistemes compatibles de l'exercici 107.

b) A l'apartat b, hem vist que el sistema és C.I.

I això que $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & +1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$\Rightarrow$ el sistema original és equivalent a:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Per resoldre'l, parametritzem una variable:

Sigui $z = \lambda$, un nombre real qualsevol

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y = -\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2 - \lambda}{5} = \frac{-\lambda}{5} + \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{5} = \frac{-3\lambda - 4}{5} = \frac{-3\lambda}{5} - \frac{4}{5}$$

Per tant, les solucions són:

$$x = \frac{-\lambda}{5} + \frac{2}{5},$$

$$y = \frac{-3\lambda}{5} - \frac{4}{5}$$

$$z = \lambda$$

amb λ un nombre qualsevol.

c) Sabem que 10 7 c és un sistema compatible indeterminat. A més, sabem que totes les equacions són linealment independent.

Parametritzem una variable, per exemple t.

Sigui $t = \lambda$ un nombre qualsevol.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 - \lambda \\ x - y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

[Sabem que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$]

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2+\lambda & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-(1-\lambda) + \lambda + 2 + \lambda}{-2}$$

$$= \frac{-1 + \lambda + \lambda + 2 + \lambda}{-2} = \frac{3\lambda + 1}{-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2+\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2 + \lambda - \lambda - (1-\lambda)}{-2}$$

$$= \frac{2 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} - 1 + \lambda}{-2} = \frac{\lambda + 1}{-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 & 2+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-\lambda-\lambda}{-2} = \frac{-2\lambda}{-2} = \lambda$$

Per tant, les solucions són:

$$x = \frac{3\lambda - 1}{-2}, \quad y = \frac{\lambda + 1}{-2}, \quad z = \lambda, \quad t = \lambda$$

on λ és un nombre qualsevol.

d) Sabem que les dues equacions són linealment independents.

Tenim 2 equacions i 4 incògnites $\Rightarrow$ Hem de parametritzar 2 incògnites.

Siguin $z = \lambda$, $t = \mu$ nombres reals qualssevol.

El sistema, llavors, és igual a:

$$\begin{cases} x - y = 4 + \lambda - \mu \\ x + y = 2 - \lambda + \mu \end{cases}$$

Sabem que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+\lambda-\mu & -1 \\ 2-\lambda+\mu & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4 + \cancel{\lambda} - \cancel{\mu} + 2 - \cancel{\lambda} + \cancel{\mu}}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+\lambda-\mu \\ 1 & 2-\lambda+\mu \end{vmatrix}}{2} = \frac{2-\lambda+\mu-(4+\lambda-\mu)}{2}$$

$$= \frac{2-\lambda+\mu-4-\lambda+\mu}{2} = \frac{2\mu-2\lambda-2}{2}$$

$$= \mu - \lambda - 1$$

Per tant, la solució és:

$(3, \; -\lambda + \mu - 1, \; \lambda, \; \mu)$

on λ, μ són nombres qualssevol.

e) El sistema és C.D. i $|A| = -2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

NOTA: Els sistemes homogenis que són CD sempre tenen com a (única) solució la trivial $(0,0,0)$.

111) Resoleu aquests sistemes compatibles indeterminats.

a) $\begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ x + 3y + 4z = 11 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 4 + 4 + 9 + 1 - 24 + 6$
$= 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

Com que sabem que el sistema és C.I., sabem que les dues primeres equacions són linealment independents ($\Delta \neq 0$):

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Parametritzem: $z = \lambda$ un nombre qualsevol

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 - \lambda \\ 3x - y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

I el resolem per Cràmer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5-2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-(3-\lambda) - 2(5-2\lambda)}{-5} = \frac{-3+\lambda-10+4\lambda}{-5}$$

$$= -\lambda + \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ 3 & 5-2\lambda \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-(5-2\lambda) - 3(3-\lambda)}{-5} = \frac{-5+2\lambda-9+3\lambda}{-5}$$

$$= -\lambda + \frac{14}{5}$$

Per tant les solucions són:

$$\left(-\lambda + \frac{13}{5}, -\lambda + \frac{14}{5}, \lambda\right)$$

amb λ un nombre qualsevol.

5) $\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 12 \\ x + y + 3z = +6 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

Com que sabem que és C.I, basta que mirem quines eq. són linealment independents

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ la 1a i 2a equacions són dependents
(de fet es veu que la 1a eq. és igual a dues vegades la 2a)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow$ la 2a i 3a equacions són linealment independents.

$\Rightarrow$ El sistema és:

$\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

Parametritzem: $z = \lambda$, un ~~nom~~ nombre qualsevol.

$\begin{cases} x + y = 6 - 3\lambda \\ 3x - y = -\lambda \end{cases}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6-3\lambda & 1 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-4}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6-3\lambda \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}}{-4}$

$= \dfrac{-6 + 3\lambda + \lambda}{-4}$ $\qquad$ $= \dfrac{-\lambda - 3(6-3\lambda)}{-4}$

$= -\lambda + \dfrac{6}{4}$ $\qquad$ $= -2\lambda + \dfrac{18}{4}$

Per tant, la solució és:

$$\left(-\lambda + \frac{6}{4},\ -2\lambda + \frac{18}{4},\ \lambda\right),$$

per λ un nombre qualsevol.

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - 6y + 3z = 18 \\ x - 2y + z = 6 \end{cases}$

Aquí es veu clarament que la 3a equació és igual que la 1a eq. $\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - 6y + 3z = 18 \end{cases}$

I també la 2a eq és igual a la 1a per 3.

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tenim 1 eq i 3 incògnites. $\Rightarrow$ hem de parametritzar 2 incògnites.

Siguin $y = \lambda$, $z = \mu$, on λ, μ són nombres qualssevol

$\Rightarrow x = 6 + 2\lambda - \mu$

$\Rightarrow$ Les solucions són:

$$(6 + 2\lambda - \mu,\ \lambda,\ \mu)$$

amb λ i μ nombres qualsevols.

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ 2x - y = 5 \\ 5x + z = 20 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$\Rightarrow$ La 1a i 2a eq. són linealment independents.

Com que, per l'enunciat, sabem que és C.I.

$\Rightarrow$ que el sistema és equivalent a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Sigui $z = \lambda$ un nombre qualsevol.

Per tant,

$$\begin{cases} x + 2y = 10 - \lambda \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10+\lambda-10}{-5} = \frac{\lambda-20}{-5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10-\lambda \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5-2(10-\lambda)}{-5} = \frac{5-20+2\lambda}{-5}$$

$$= \frac{2\lambda-15}{-5}$$

Les solucions són $\left(\frac{\lambda-20}{-5}, \frac{2\lambda-15}{-5}, \lambda\right)$ on λ és un nombre real.

112) Discutiu i resoleu els sistemes següents en funció del paràmetre corresponent:

a) $\begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -m - m - 1 - \cancel{1} + \cancel{1} - m^2$$

$$= -m^2 - 2m - 1$$

$$-m^2 - 2m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = \frac{2 \pm 0}{-2} = -1$$

$$-m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2$$

- Si $m \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$\Rightarrow$ C.D.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ m & -1 & m \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 - 2m - 1} = \frac{-\cancel{m} + \cancel{m} - \cancel{m} + 1 + \cancel{m} - m^2}{-m^2 - 2m - 1}$$

$$= \frac{-(m^2 - 1)}{-(m+1)^2} = -\frac{(m-1)(m+1)}{-(m+1)^2} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m & -1 \\ 1 & m & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 - 2m - 1} = \frac{m^2 + m^2 + 1 + \cancel{m} - \cancel{m} + m^2}{-m^2 - 2m - 1}$$

$$= \frac{3m^2 + 1}{-(m+1)^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-m^2-2m-1} = \frac{\cancel{m} - \cancel{m} + m + m - 1 - m^2}{-m^2-2m-1}$$

$$= \frac{-m^2+2m-1}{-(m+1)^2} = \frac{-(m-1)^2}{-(m+1)^2} = \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2$$

Par tant, les solus son:

$$\left(\frac{m-1}{m+1}, \frac{3m^2+1}{-(m+1)^2}, \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2}\right)$$

- Si $m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{-1} \cancel{+1} - 1 - 1 - 1 - 1 = -4 \neq 0$$

Par tant, $rg\, M = 3 \Rightarrow$ incompatible.

b) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 6a + 10 - 6 + 3a + 8 + 15$$

$$= 9a + 27$$

$$9a + 27 = 0 \Rightarrow a = \frac{-27}{9} = -3$$

• Si $a \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & a & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9a+27} = \frac{4a + 20 + 12 + 6a - 16 + 10}{9a+27}$$

$$= \frac{10a + 26}{9a+27}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{9a+27} = \frac{-24 - 10 - 12 - 12 - 8 + 30}{9a+27} = \frac{-36}{9a+27}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & a & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9a+27} = \frac{6a + 8 + 4 - 2a + 8 + 12}{9a+27} = \frac{4a + 32}{9a+27}$$

• Si $a = -3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9+4 = -5 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18+8+4+6+8+12 = 20$$

$\Rightarrow rg\, M = 3 \Rightarrow$ incompatible.

c) $\begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \quad\quad - az = 1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a & 7 & 20 & 1 \\ a & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -8a^2 + 161 - 160 + 7a^2 = -a^2+1$$

$$-a^2+1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1.$$

• Si $a \neq 1, a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$\Rightarrow$ C.D.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{-a^2+1} = \frac{-8a+161-160+7a}{-a^2+1} = \frac{-a+1}{-a^2+1}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 20 \\ a & 1 & 23 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}}{-a^2+1} = \frac{\cancel{-a^2} + 23 + 20a - 20 + \cancel{a^2} - 23a}{-a^2+1}$$

$$= \frac{-3a+3}{-a^2+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ a & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2+1} = \frac{8a+7-8-7a}{-a^2+1} = \frac{a-1}{-a^2+1}$$

• Si $a = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8-7 = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(2 columnes iguals)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 23 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(2 columnes iguals)}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 20 & 1 \\ 8 & 23 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow rg\, M = 2. \Rightarrow$ C.I.

Parametritzem: $\begin{cases} x + 7y + 20z = 1 \\ x + 8y + 23z = 1 \end{cases}$

$z = \lambda$, avec λ un nombre quelconque.

$$\begin{cases} x + 7y = 1 - 20\lambda \\ x + 8y = 1 - 23\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-20\lambda & 7 \\ 1-23\lambda & 8 \end{vmatrix}}{1} = \frac{8(1-20\lambda) - 7(1-23\lambda)}{1}$$

$$= 8 - 160\lambda - 7 + 161\lambda = 1 + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-20\lambda \\ 1 & 1-23\lambda \end{vmatrix}}{1} = \frac{1-23\lambda - (1-20\lambda)}{1} = -3\lambda$$

Les solutions sont $(1+\lambda, -3\lambda, \lambda)$, où λ est un nombre quelconque.

• Si $a = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 20 \\ -1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 7 = -1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 7 - 8 + 7 = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} M = 3.$$

$\Rightarrow$ incompatible.

1) $\begin{cases} mx + y = 2-2m \\ x + my = m-1. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2-2m \\ 1 & m & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = m^2 - 1$$

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

• Si $m \neq 1, m \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2 = rg\, M$

$\Rightarrow$ C.D

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-2m & 1 \\ m-1 & m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m(2-2m) - (m-1)}{m^2-1}$$

$$= \frac{2m - 2m^2 - m + 1}{m^2-1} = \frac{-2m^2 + m + 1}{m^2-1}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2-2m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m(m-1) - (2-2m)}{m^2-1}$$

$$= \frac{m^2 - m - 2 + 2m}{m^2-1} = \frac{m^2 + m - 2}{m^2-1}$$

• Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\, M = 1$ clairement. (toutes les colonnes sont égales à la 1ère ou sont nulles).

$\Rightarrow$ $\underset{\underset{1.}{\parallel}}{\text{rg } A} = \text{rg } M \Rightarrow$ C.I. $\Rightarrow$ el sistema és:

$$\{ x + y = 0$$

$y = \lambda$, on λ és un nombre qualsevol

$x = -\lambda$

$\Rightarrow$ Solució: $x = -\lambda$, $y = \lambda$

on λ és un nº qualsevol

• Si $m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2$$

i $\text{rg } A = 1 \Rightarrow$ incompatible.