DE LLIBRET XISCO

CEPA LLEVANT

2(5) Quins dels vectors següents tenen la mateixa direcció?

$\vec{a}=(1,-3,2)$ $\quad$ $\vec{c}=(-2,6,-4)$ $\quad$ $\vec{e}=(10,-30,5)$

$\vec{b}=(2,0,1)$ $\quad$ $\vec{d}=(5,-15,10)$

Recordem que dos vectors $\vec{x}$, $\vec{y}$ són paral·lels $\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\vec{x}=\lambda\vec{y}$, és a dir, si $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ i $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ aleshores $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_3}{x_3}$ (p. 164, Proposició 13.5)

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$
$\vec{a}$	/	$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ perquè $\vec{b}\nparallel\vec{a}$ NO	SÍ	SÍ	NO
$\vec{b}$	$\frac{2}{1}\neq\frac{-3}{0}\neq\frac{2}{1}$ NO	/	NO	NO	NO
$\vec{c}$	$\frac{-2}{1}=\frac{6}{-3}=\frac{-4}{2}=-2$ SÍ	$\frac{-2}{2}\neq\frac{6}{0}\neq\frac{-4}{1}$ NO	/	SÍ	NO
$\vec{d}$	$\frac{5}{1}=\frac{-15}{-3}=\frac{10}{2}=5$ SÍ	$\frac{5}{2}\neq\frac{-15}{0}\neq\frac{10}{1}$ NO	$\frac{5}{-2}=\frac{-15}{6}=-\frac{5}{2}$, $=\frac{10}{-4}=\frac{5}{-2}$ SÍ	/	NO
$\vec{e}$	$\frac{10}{1}=\frac{-30}{-3}\neq\frac{5}{2}$ NO	$\frac{10}{2}\neq\frac{-30}{0}\neq\frac{5}{1}$ NO	$\frac{10}{-2}=-5$, $\frac{-30}{6}=-5$, $\frac{5}{-4}\neq-5$ NO	$\frac{10}{5}=\frac{-30}{-15}\neq\frac{5}{10}$ NO	/

Per tant $\vec{a}\parallel\vec{c}$, $\vec{a}\parallel\vec{d}$, $\vec{c}\parallel\vec{d}$.

Ex 216. Donats els vectors $\vec{a}(1,-3,2)$, $\vec{b}(2,0,1)$, calculeu.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$

c) l'angle que formen entre si $\vec{a}$ i $\vec{b}$

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2 + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2+2 = 4$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$

$4 = \sqrt{14}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\alpha$

$\frac{4}{\sqrt{70}} = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{70}}$

$\alpha = \arccos\frac{4}{\sqrt{70}} \Rightarrow \alpha = 61'43^{\circ}$

70	2
35	5
7	7
1	

217. Donats $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ calculeu m
$\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$

per a què els vectors:

a) siguin paral·lels

b) ortogonals.

b) ortogonals $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow (1,m,1)\cdot(-2,4,m) = 0$

$\Leftrightarrow -2+4m+m = 0 \Leftrightarrow 5m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$

a) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m = 4 \Rightarrow m = -2 \\ 4 = m^2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2} = \pm 2 \end{cases} \Bigg\} \; m = -2$

218. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\vec{a}(1,2,3)$ i $\vec{b}(2,-2,1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{(1,2,3)\cdot(2,-2,1)}{|(1,2,3)|\;|(2,-2,1)|} =$$

$$= \frac{2-4+3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{280}}.$$

219. Calculeu m perquè el vector $\vec{a}=(1,3,m)$ sigui ortogonal al vector $\vec{b}=(1,-2,3)$.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff 1\cdot 1+3\cdot(-2)+3m=0.$$

$$\iff 1-6+3m=0 \iff -5+3m=0 \iff m=\frac{5}{3}.$$

220. Calculeu l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors $\vec{a}(1,-3,2)$ i $\vec{b}=(2,0,1)$.

Per la propietat g del producte vectorial (P71), tenim que

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}| = \text{àrea paral·lelogram que formen } \vec{a} \text{ i } \vec{b}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} =$$

$$= -3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} - \vec{j}$$

$$= -3\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$= (-3, 3, 6)$$

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}| = |(-3,3,6)| = \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54}.$$

221. Trobeu un vector perpendicular a $\vec{u}(2,3,1)$ i a $\vec{v}(-1,3,0)$ i que sigui unitari.

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ és ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$

Després l'haurem de dividir pel seu mòdul

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 6\vec{k} - \vec{j} - 3\vec{i} + 3\vec{k}$$

$$= -3\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$$

$$= (-3, -1, 9).$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 1 + 81} = \sqrt{91}.$$

Sigui $\vec{w_0} = \frac{1}{\sqrt{91}} \cdot \vec{w} = \left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, -\frac{1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}} \right)$

Aquest és el vector que volem.

222. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(1,-1,0)$ i $\vec{v}(2,0,1)$ i el mòdul del qual sigui $\sqrt{24}$.

Sigui $\vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

$$= -\vec{i} + 2\vec{k} - \vec{j} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$= (-1, -1, 2).$$

$\vec{w}$ és ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Un vector paral·lel a $\vec{w}$ també serà ortogonal a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$.

Sigui $\vec{x} = (-m, -m, 2m)$ $\vec{x}$ és paral·lel a $\vec{w}$.

Volem que $|\vec{x}| = \sqrt{24}$.

$$|\vec{x}| = \sqrt{(-m)^2 + (-m)^2 + (2m)^2} = \sqrt{m^2 + m^2 + 4m^2}$$

$$= \sqrt{6m^2}$$

$$\sqrt{6m^2} = \sqrt{24} \iff 6m^2 = 24 \iff m^2 = \frac{24}{6} = 4$$

$$\iff m = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Per tant, podem prendre

$(-2, -2, 4)$ o $(2, 2, -4)$

com als vectors que ens demanen.

223. Calcula $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ on $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ i $\vec{w} = (2, 0, -2)$.

Producte mixt:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 - 4 = -6.$$

224. Calcula el volum del paral·lelepíped determinat pels vectors $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(2, 0, 1)$ i $\vec{w}(2, 0, -2)$.

Per la propietat 180 (P72), tenim que

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= |-2 - 4| = |-6| = 6.$$

225. Calculeu el valor de m per a què $\vec{u}(2,-3,1)$, $\vec{v}(1,m,3)$ i $\vec{w}(-4,5,-1)$ siguin coplanaris.

$\vec{w} \nparallel \vec{u}$, ja que $\frac{-4}{2} \neq \frac{5}{-3} \neq \frac{-1}{1}$

$\Rightarrow$ $\vec{u}, \vec{w}$ determinen un pla π que els té com a vectors directors i passa per $(0,0,0)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & -4 \\ y & -3 & 5 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 3x + 10z - 4y - 12z + 2y - 5x = 0$$

$$\equiv -2x - 2y - 2z = 0$$

$\Rightarrow$ $(-2,-2,-2)$ és ortogonal a $(1,m,3)$.

$$\longrightarrow -2 - 2m - 6 = 0$$

$$-2m - 8 = 0$$

$$m = \frac{+8}{-2} = -4$$

Ho podríem fer d'una altra manera:

$\vec{v}$ ha de ser combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2m + 36 + 5 + 4m - 3 - 30 = 0$$

$$2m + 8 = 0$$

$$m = -\frac{8}{2} = -4$$

226. Donat el vector $\vec{v}(-2,2,-4)$, trobeu les coordenades dels vectors següents.

a) unitaris i de la mateixa direcció que $\vec{v}$

b) paral·lels a $\vec{v}$ i de mòdul 6.

a) $\vec{w} = (-2a, 2a, -4a)$ és de la mateixa direcció de $\vec{v}$. Ha de ser unitari $\Rightarrow |\vec{w}| = 1 \Rightarrow$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-2a)^2 + (2a)^2 + (-4a)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2 + 16a^2}$$

$$= \sqrt{24a^2} = \sqrt{24}\, a$$

$$|\vec{w}| = 1 \Rightarrow \sqrt{24}\, a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

$\Rightarrow \left(\frac{-2}{\sqrt{24}}, \frac{2}{\sqrt{24}}, \frac{-4}{\sqrt{24}}\right)$ és el vector que busquem.

b) $\vec{w} = (-2a, 2a, -4a)$ és paral·lel a $\vec{v}$

$$|\vec{w}| = \sqrt{24}\, a$$

Si $|\vec{w}| = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{24}}$

$\Rightarrow \left(\frac{-12}{\sqrt{24}}, \frac{12}{\sqrt{24}}, \frac{-24}{\sqrt{24}}\right)$.

227. Troba un vector ortogonal a $\vec{u}(2,3,-1)$ i a $\vec{v}(1,4,2)$ la tercera component del qual sigui 1.

Es pot fer calculant $\vec{u} \wedge \vec{v}$ i multiplicant convenientment

$\vec{u} \nparallel \vec{v} \Rightarrow$ formen un pla

Sigui $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 4 & 3 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ aquest pla.

$$\pi \equiv -4x + 3z + 4y - 8z + y - 6x = 0$$

$$\pi \equiv -10x + 5y - 5z = 0.$$

El vector normal $\vec{n}(-10, 5, -5)$ de π és ortogonal a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$. I també ho és

Un vector paral·lel a $\vec{u}$

Sigui $\vec{w} = (-10a, 5a, -5a)$ $\vec{w} \parallel \vec{u}$

Imposem que tingui la tercera component igual a 1.

$\Rightarrow -5a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow (2, -1, 1)$ és el vector cercat.

Tant es pot fer prenent $\vec{w} = (a, b, 1)$ i imposant que $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ i $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

228. Calculeu les coordenades d'un vector $\vec{u}$ que sigui ortogonal a $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,-1,1)$ i tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

es podria fer tot fent $\alpha \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ amb α convenientment triat

$\vec{u} = (u_0, u_1, u_2)$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow (u_0, u_1, u_2) \cdot (1,2,3) = 0$

$\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow (u_0, u_1, u_2) \cdot (1,-1,1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_0 + 2u_1 + 3u_2 = 0 \\ u_0 - u_1 + u_2 = 0. \end{cases}$$

Sigui $u_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_0 + 2u_1 = -3\lambda \\ u_0 - u_1 = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 + 2u_1 = -3\lambda \\ -u_0 + u_1 = \lambda \end{cases}$$

$$3u_1 = -2\lambda$$

$$u_1 = \frac{-2\lambda}{3}$$

$$\Rightarrow u_0 = -\lambda + u_1 = -\lambda - \frac{2\lambda}{3} = \frac{-3\lambda - 2\lambda}{3} = \frac{-5\lambda}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{-5\lambda}{3}, \frac{-2\lambda}{3}, \lambda\right).$$

Ara tenim que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{5\lambda}{3} & -\frac{2\lambda}{3} & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 5\lambda & -2\lambda & -3\lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$10\lambda - \cancel{6\lambda} + 3\lambda + \cancel{6\lambda} + 2\lambda + 15\lambda = -57$$

$$30\lambda = -57$$

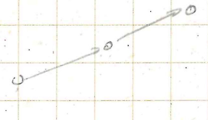
$$\lambda = \frac{-57}{30}$$

$\rightarrow$ El vector que cercam és $\left(\frac{+5\cdot\frac{57}{30}}{3}, \frac{+2\cdot\frac{57}{30}}{3}, \frac{-57}{30}\right)$

$= \left(\frac{285}{90}, \frac{114}{90}, -\frac{57}{30}\right) = \left(\frac{95}{30}, \frac{57}{45}, \frac{-57}{30}\right)$

229. Comprova si els punts $A(1,-2,1)$, $B(2,3,0)$ i $C(-1,0,-4)$ estan alineats o no.

A, B, C estan alineats $\Leftarrow$ els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ tenen la mateixa direcció



Per tant $\overrightarrow{AB} = (1,5,-1)$ $\quad \frac{-2}{1} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{-5}{-1}$

$\overrightarrow{AC} = (-2,2,-5)$.

$\Rightarrow$ No estan alineats

230. Trobeu el punt simètric del punt $A(-2,3,0)$ respecte del punt $M(1,-1,2)$.

Això vol dir que $M = \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{3+y}{2}, \frac{0+z}{2}\right)$

on $A' = (x,y,z)$ és el punt simètric de A.

Però $M = (1,-1,2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-2+x}{2} = 1 & \Rightarrow x = 4 \\ \frac{3+y}{2} = -1 & \rightarrow y = -5 \\ \frac{z}{2} = 2 & \Rightarrow z = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow A' = (4,-5,4)$.

231. Calculeu a i b per a què els punts $A(1,2,-1)$, $B(3,0,-2)$ i $C(4,a,b)$, estiguin alineats.

A, B, C estan alineats $\Longleftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC}$

$\Rightarrow (2,-2,-1) \parallel (3, a-2, b+1)$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6 = 2a-4 & \Rightarrow -2 = 2a \Rightarrow a = -1 \\ -a+2 = -2b-2 & \Rightarrow 1+2 = -2b-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 5 = -2b$

$\Rightarrow b = -\frac{5}{2}$

232. Associeu els conceptes de punt, recta i pla a l'espai amb qualsevol o qualques de les equacions següents.

a) $\vec{A}(2,-3,1)$ vector $\Rightarrow$ recta a l'espai

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ punt. És una intersecció de dues rectes al pla

recta a l'espai (intersecció de dos plans a l'espai)

c) $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{cases}$ recta en forma paramètrica a l'espai

d) $A(2,-3,1)$ punt a l'espai

e) $x+y=2$ recta al pla

pla a l'espai

f) $\begin{cases} x=-2\lambda+\mu \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{cases}$ Pla a l'espai en forma paramètrica

g) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ Punt al pla

h) $\frac{x-1}{0}=y+3=\frac{z}{-6}$ recta a l'espai en forma contínua.

233 Escriu les equacions de la recta que passa pels punts $A(-3,2,1)$ i $B(-\frac{5}{2},\frac{3}{2},0)$

El seu vector director és $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ o bé $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ on

$B' = (-5,3,0)$

Com que $B' = 2B \Rightarrow$ estan a la mateixa recta (les dues coordenades són proporcionals)

$\vec{v} = \overrightarrow{AB'} = (-5+3, 3-2, 0-1) = (-2,1,-1)$

Per tant, $r \equiv A + \lambda(-2,1,-1) = (-3,2,1) + \lambda(-2,1,-1)$

FORMA VECTORIAL: $r \equiv (-3,2,1) + \lambda(-2,1,-1)$

FORMA PARAMÈTRICA $r \equiv \begin{cases} x = -3-2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$

FORMA CONTINUA $r \equiv \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$

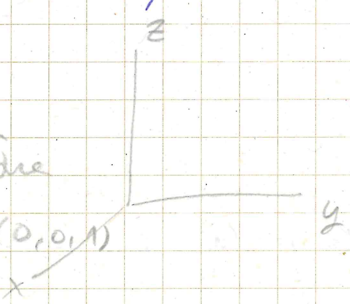
$x+3 = -2(y-2) \Rightarrow x+3 = -2y+4 \Rightarrow x+2y-1=0$

$-y+2 = z-1 \Rightarrow -y-z+3=0$

FORMA IMPLÍCITA $r \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ -y-z+3=0 \end{cases}$

234) Trobeu les equacions de la recta r que passa pel punt A(−4,2,5) i és paral·lela a l'eix OZ.

L'eix OZ té com a eq paramètrica $(0,0,0)+\lambda(0,0,1)$



Per tant, si $r \parallel OZ \Rightarrow$ té el mateix vector director.

$\Rightarrow r \equiv (-4,2,5)+\lambda(0,0,1)$

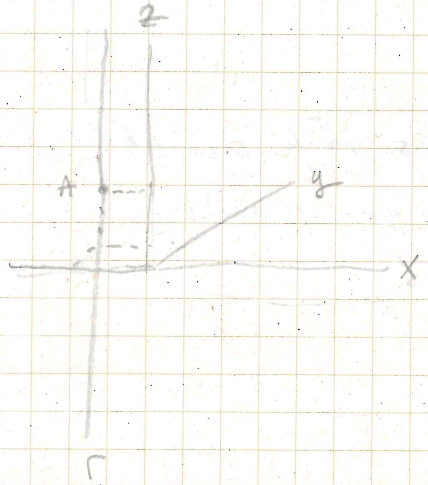
EQ VECTORIAL.

EQ. PARAMÈTRICA $\quad r = \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

EQ. CONTÍNUA $\quad r \equiv \dfrac{x+4}{0} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-5}{1}$

EQ. IMPLÍCITA $\quad \begin{cases} y - 2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$?

Una recta ha de ser intersecció de dos plans !!



Passa per $(-4, 2, \lambda)$

$r \equiv \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x + 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

$(y-2)\cdot 1 = 0(z-5)$

$(x+4)\cdot 1 = 0(z-5)$

235. Comprova si els punts $A(1,-2,1)$, $B(2,3,0)$, $C=(-1,0,-4)$ i $D=(4,0,-5)$ es troben en un mateix pla o no

Sigui Π el pla determinat per A, B i C.

Existeix perquè A, B i C no estan alineats:

$\vec{AB} = (1, 5, -1)$

$\vec{AC} = (-2, 2, -5)$

$$\Pi = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y+2 & 5 & 2 \\ z-1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$-25(x-1) + 2(z-1) + 2(y+2)$

$+ 10(z-1) + 5(y+2) + 2(x-1) = 0$

$-25x + 25 + 2z - 2 + 2y + 4 + 10z - 10 + 5y$

$+ 10 + 2x - 2 = 0 \implies -23x + 7y + 12z + 25 = 0$

Basta veure si $D \in \Pi$ o no.

$$\Pi \equiv -23x + 7y + 12z + 25 = 0$$

$$D = (4, 0, -5)$$

$$-23 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 12 \cdot (-5) + 25 = 0 \;?$$

$$-92 - 60 + 25 = 0 \;?$$

$$-152 + 25 = 0 \;?$$

$$\underline{\text{No}} \Longrightarrow D \notin \Pi$$

$\Rightarrow$ A, B, C i D no estan al mateix pla

236. Estudieu la posició relativa de les rectes següents i trobeu el seu punt de tall quan sigui possible.

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$

$s \equiv \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

$v_r = (3, 2, 4)$
$v_s = (-1, 2, 3)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{-1} = -3 \\ \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{4}{3} \end{array}\right\} \text{diferent} \Rightarrow v_r \nparallel v_s$$

$\Rightarrow$ no tenen la mateixa direcció $\Rightarrow$ No són paral·leles ni coincidents

$\Rightarrow$ O són secants o es creuen.

r passa per $A = (1, -2, 1)$

s passa per $B = (-2, 3, 2)$

r i s són secants quan $rg\begin{pmatrix} v_d \\ v_s \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = 2$

(tot està al mateix pla)

r i s són rectes que s'encreuen quan $rg\begin{pmatrix} v_d \\ v_s \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = 3$.

$$rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 18 + 20 - 24 - 2 + 30 = 68 - 32 \neq 0$$

$\Rightarrow$ rg és 3 $\Rightarrow$ s'encreuen.

b) $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$

$s \equiv \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

$\left.\begin{array}{l} v_r = (-1, 2, 1) \\ v_s = (4, 1, 2) \end{array}\right\}$ No són proporcionals $\Rightarrow$ r i s no són paral·leles ni coincidents

$\left.\begin{array}{l} A_r = (1, 3, 2) \\ A_s = (4, 4, 5) \end{array}\right\}$ $\vec{AB} = (3, 1, 3)$

$rg \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 12 + 4 - 3 - 24 + 2$

$= 18 - 30 \neq 0$

$\Rightarrow$ r i s s'encreuen

c) $r \equiv \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$, $s \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

$v_r = (2, 1, 3)$

$v_s = (1, -2, 0) \wedge (0, 3, -1)$

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 3\vec{k} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$= (2, 1, 3)$

$v_r = v_s \Rightarrow$ o són coincidents o paral·leles

Prenem $Q \in s$: $y = 0 \Rightarrow x = 1$, $z = -1$

$\Rightarrow (1, 0, -1) \in s$.

$Q \in r$?

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 3 + 6 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ s'encreuen.

l) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} v_r = (2, 3, 4) \\ v_s = (4, 6, 8) \end{array}\right\}$ Són proporcionals $\Rightarrow$ o bé

són coincidents o bé són paral·leles.

$(1, 0, 0) \in s$? $\Longrightarrow$ $1 = 3 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{4} = -1/2$

$(3, 3, 4) \in r$? $\qquad 0 = 3 + 6\lambda \Rightarrow \lambda = -3/6 = -1/2$

$\Downarrow \qquad 0 = 4 + 8\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{8} = -1/2$

$\Rightarrow$ SÍ. $(1, 0, 0) \in s$.

$\dfrac{3-1}{2} = \dfrac{3}{3} = \dfrac{4}{4}$?

SÍ $\Rightarrow (3, 3, 4) \in r$

$\Rightarrow$ Coincidents. Tots els seus punts són els punts de tall.

237. Calcula el valor de a per a què les rectes r i s es tallin i troba-ne el punt de tall.

$r \equiv x = y = z - a$

$s \equiv \dfrac{2x - 1}{3} = \dfrac{y + 3}{-2} = \dfrac{z - 2}{0}$

$\left.\begin{array}{l} v_r = (1, 1, 1) \\ v_s = (3, -2, 0) \end{array}\right\}$ No són proporcionals $\Rightarrow$ no són coincidents ni paral·leles.

Per a què es tallin, $rg\begin{pmatrix} v_r \\ v_d \\ \vec{AB} \end{pmatrix} = 2$

$\vec{AB} = (1,-3,2) - (0,0,a) = (1,-3,2-a)$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2-a \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2-a \end{vmatrix} = -2(2-a) - 9 + 2 - 3(2-a)$

$= -4 + 2a - 9 + 2 - 6 + 3a$

$= 5a - 17 = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{a = \frac{17}{5}}}$

Per tant si $a = \frac{17}{5} \rightarrow rg \neq 3$

Però $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0 \Longrightarrow rg = 2$

$\Rightarrow$ es tallen.

~~228~~

238 Calcula els valors de m i n per a què les rectes r i s siguin paral·leles:

$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$

Per a ser paral·lels, els seus vectors directors han de ser proporcionals i $rg\begin{pmatrix} v_r \\ v_d \\ \vec{AB} \end{pmatrix} = 2$

- Si $rg\begin{pmatrix} v_r \\ v_d \end{pmatrix} = 1$ $\qquad$ Sigui $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ m & 3 & n \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$v_r = (4,1,-1)$

$v_s = (m,3,n)$

$\vec{AB} = (0,1,-3) - (5,3,0) = (-5,-2,-3)$

Volem que rg $A=2 \Rightarrow |A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ m & 3 & n \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -36-5n+2m-15+3m+8n$$
$$= \boxed{3n+5m-51=0}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ m & 3 & n \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & n \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ m & n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12-m=0 & \Rightarrow m=12 \\ n+3=0 & \Rightarrow n=-3 \\ 4n+m=0 & \Rightarrow 4\cdot(-3)+12=0 \text{ ok} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\cdot(-3)+5\cdot 12-51=0$$
$$-9+60-51=0 \text{ ok}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=12 \wedge n=-3}$$

23 a) Calculeu les equacions dels plans següents:

a) Passa pel punt $P(2,-3,1)$ i el vector normal del qual és $\vec{n}=(5,-3,4)$.

$$\pi \equiv 5x-3y+4z+n=0$$

$P\in\pi$: $5\cdot 2-3\cdot(-3)+4\cdot 1+n=0$
$$10+9+4+n=0$$
$$23+n=0 \Rightarrow n=-23$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 5x-3y+4z-23=0$$

b) Perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ i que passa pel punt $(1,0,1)$.

Si és perpendicular a aquesta recta $\Rightarrow \pi$ té com a vector normal el vector director de la recta.

$$v_r = (2,-1,3) \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + 3z + u = 0$$

Passa per $(1,0,1) \Rightarrow (1,0,-1) \in \pi \Rightarrow$

$$2\cdot 1 - 0 + 3(-1) + u = 0$$

$$2 - 3 + u = 0$$

$$-1 + u = 0$$

$$u = 1$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$$

240 Calculeu m i n per a què els plans

$$\alpha \equiv mx + y - 3z - 1 = 0$$

$$\beta \equiv 2x + ny - z - 3 = 0$$

siguin paral·lels. Poden ser coincidents?

$n_\alpha = (m,1,-3)$

$n_\beta = (2,n,-1)$

Per a ser paral·lels (o coincidents) $\rightarrow rg\begin{pmatrix} n_\alpha \\ n_\beta \end{pmatrix} = 1$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & n \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} m & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ n & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow m \cdot n - 2 = 0 \qquad -m + 6 = 0 \qquad -1 + 3n = 0$

$m \cdot n = 2 \qquad m = 6 \qquad n = \frac{1}{3}$

$6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ ok.

Per tant $\alpha \equiv 6x + y - 3z - 1 = 0$

$\beta \equiv 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 = 0$

$\equiv 6x + y - 3z - 9 = 0$

$\Rightarrow$ no són coincidents ($n = -1 \wedge n = -9$)

(també podríem haver vist que $rg(M^a) \neq 1$)

241) Determineu l'equació del pla que conté el punt $P(2,1,2)$ i la recta $x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$

Sigui Π aquest pla.

$P \in \Pi$

Π té dos vectors directors. Com que $r \in \Pi \Rightarrow$

Un d'ells és el vector director de r, $v_r =$
$= (1, -1, -3)$

L'altre pot ser qualsevol vector format per P i un punt de r que no sigui proporcional a v_r.

Sigui el punt $Q = (2, 3, 4) \in r$

(en podríem haver pres qualsevol $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$, amb qualsevol valor de λ)

(hem pres $\lambda = 0$)

$\overrightarrow{PQ} = (0, 2, 2)$. $\overrightarrow{PQ} \nparallel v_r$

Prenem $(0,1,1)$ que té la mateixa direcció que $\overrightarrow{PQ}$

Aleshores Π té com a vectors directors $(1, -1, -3)$ i $(0, 1, 1)$

i passa per $(2, 1, 2)$.

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -(x-2) + (z-2) - (y-1) + 3(x-2)$$

$$= -x + 2 + z - 2 - y + 1 + 3x - 6 = 0$$

$\pi \equiv 2x - y + z - 5 = 0$

242. Comprova que les rectes $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z-2$ i $s \equiv \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

són paral·leles i dona-ne l'equació del pla que les conté.

$v_r = (2, 1, 1)$

$v_s : (1, 0, -2) \wedge (1, -2, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

$= -2\vec{k} - 2\vec{j} - 4\vec{i} = (-4, -2, -2)$

$r \parallel s \Longleftrightarrow v_r$ i v_s són proporcionals

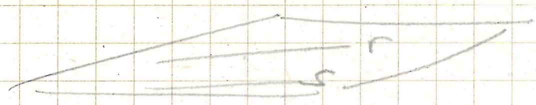
i tenen un punt que no és comú

- $\frac{-4}{2} = \frac{-2}{1} = \frac{-2}{1}$ ok 1a condició
- $(1, 0, 2) \in r$ però $(1, 0, 2) \notin s$:

$1 - 2 \cdot 2 \neq 5$

$1 - 2 \cdot 0 \neq 11$

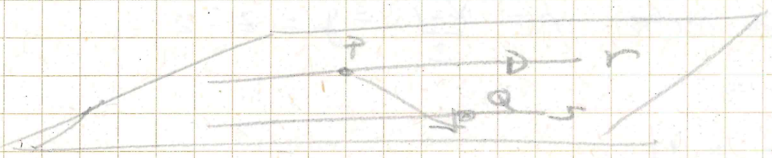
Sigui π el pl. que les conté $\Rightarrow$ π conté v_r, v_s



Però $r \parallel s \longrightarrow v_r \parallel v_s$

Un altre vector director serà el format entre dos punts

un de r i un de s. A més $\vec{PQ} \nparallel v_r$ i $\vec{PQ} \nparallel v_s$



Sigui $P = (1,0,2) \in r$

Sigui Q: $x = 0$ $\qquad (0, -\frac{11}{2}, -\frac{5}{2}) \in s$

$$y = \frac{11-0}{-2} = -\frac{11}{2}$$

$$z = \frac{5-0}{-2} = -\frac{5}{2}$$

Sigui $\vec{PQ} = (-1, -\frac{11}{2}, -\frac{9}{2})$.

Prenem un múltiple: $\vec{v} = (+2, +11, +9)$

$\Rightarrow$ π està determinat per $\vec{v}$, $\vec{v_r}$ i $(1,0,2)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 11 & 1 \\ z-2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\equiv 11(x-1) + 2(z-2) + 18y - 22(z-2) - 2y - 9(x-1) = 0$

$\equiv 11x - 11 + 2z - 4 + 18y - 22z + 44 - 2y - 9x + 9 = 0$

$\equiv 2x + 16y - 20z + 38 = 0$

243. Determina el valor de a per què les rectes r i s siguin coplanàries:

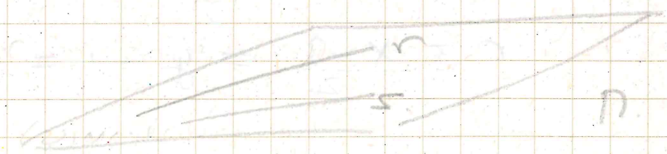
$$r \equiv x = y - a = \frac{z}{0}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Trobeu l'equació del pla que els conté.

$\vec{v_r} = (1, 1, 0)$

$\vec{v_s} = (1, -1, 1)$



r i s coplanàries $\Rightarrow$ no es creuen.

$$\Rightarrow rg\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \vec{AB} \end{pmatrix} \neq 3$$

$P = (0, a, 0) \in r$

$Q = (1, 1, -1) \in s$

$\Rightarrow \vec{PQ} = (1, 1-a, -1)$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-a & -1 \end{pmatrix} \neq 3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 1 + 1 - (1-a) = 0$$

$$3 - 1 + a = 0$$

$$\boxed{a = -2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{v_r} \nparallel \vec{v_s} \Rightarrow \pi$ està determinat per $\vec{v_r}, \vec{v_s}$ i P

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+2 & 1 & -1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv x - z - z - (y+2) = 0$$

$$\pi \equiv x - 2z - y - 2 = 0$$

$$\pi \equiv x - y - 2z - 2 = 0$$

244. Estudieu la posició relativa de la recta

$r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y+1 = \dfrac{z}{-1}$ i el pla $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$.

Passem r a forma implícita

$$\begin{cases} x-3 = 2(y+1) \\ -y-1 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ -y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Siguin $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow rg\, M \neq 3$$

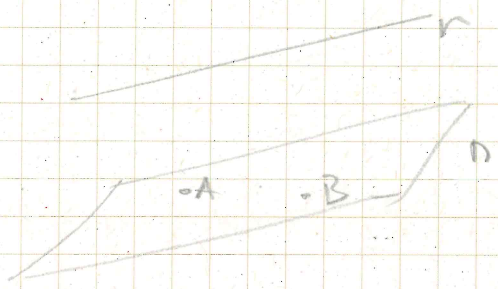
$\Rightarrow$ r paral·lela a π o bé r continguda a π

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 5 - 1 = 3 - 8 = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ r paral·lela a π

245. Troba l'equació del pla que passa pels punts $A(1,3,2)$, $B(-2,5,0)$ i és paral·lel a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$$



$v_r = (-1,1,-3)$

$\overrightarrow{AB} = (-3,2,-2) = v$

$\frac{-3}{-1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow v_r$ i v

No són proporcionals.

$\Rightarrow \pi$ està determinat per v_r, v i B.

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & -1 & -3 \\ y-5 & 1 & 2 \\ z & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv -2(x+2) - 2z + 9(y-5) + 3z - 2(y-5) + 6(x+2) = 0$$

$$\equiv 4(x+2) + 7(y-5) + z = 0$$

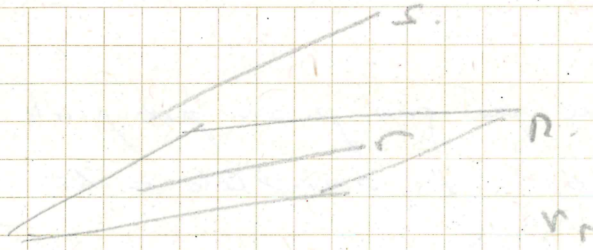
$$\equiv 4x + 8 + 7y - 35 + z = 0$$

$$\equiv \boxed{4x + 7y + z - 27 = 0}$$

246. Troba l'equació del pla que conté la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

i és paral·lel a $s \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$



$v_r = (3, -1, 1)$

$A = (2, -1, 0) \in r \in \pi$

$v_s = (5, 2, -3)$

$\Rightarrow$ π està determinat per A, v_r, v_s.

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 3 & 5 \\ y+1 & -1 & 2 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 3(x-2) + 6z + 5(y+1) + 5z + 9(y+1) - 2(x-2) = 0$$

$$\equiv x - 2 + 11z + 14(y+1) = 0$$

$$\equiv x - 2 + 11z + 14y + 14 = 0$$

$$\equiv \boxed{x + 14y + 11z + 12 = 0}$$

247. Calculeu el valor de m per a què els punts $A=(m,0,1)$, $B=(0,1,2)$, $C=(1,2,3)$ $D=(7,2,1)$ estiguin en el mateix pla. Trobeu la seva equació.

$A, B, C, D \in \pi \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ estan a π.

$$\Rightarrow rg\begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \\ \vec{AD} \end{pmatrix} \neq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 2 \\ 7-m & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2(7-m)} + 2(1-m) - \cancel{2(7-m)} + 4m = 0$$

$$2 - 2m + 4m = 0$$

$$2m + 2 = 0$$

$$\Rightarrow m = -1$$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ no són paral·lels

$\Rightarrow \pi$ ve determinat per $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ i A

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 8 \\ y & 2 & 2 \\ z-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv z-1 + 4y - 4(z-1) - (x+1) = 0$$

$$\equiv -3(z-1) + 4y - (x+1) = 0$$

$$\equiv -x + 4y - 3z + 2 = 0$$

248. Donat el pla $\Pi \equiv 2x - 3y + z = 0$ i la recta $r \equiv x-1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, doneu l'equació del pla que conté la recta r i és perpendicular al pla Π.

Sigui Π_0 aquest pla

Com que $\Pi_0 \perp \Pi \Rightarrow \vec{n_\Pi} \in \Pi_0$.

$\Rightarrow (2,-3,1)$ genera Π_0

Com que Π_0 conté $r \Rightarrow \vec{v_r}$ genera també Π_0

$\Rightarrow \vec{v_r} = (1,-1,2)$ genera Π_0

$\Rightarrow \Pi$ està determinat per $A=(1,2,-1)$, $\vec{v_r}$ i $\vec{n_\Pi}$

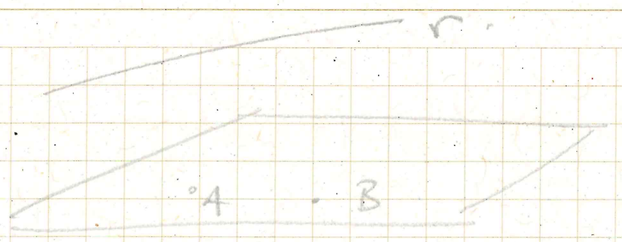
$$\Rightarrow \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-2 & -3 & -1 \\ z+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv -6(x-1) - 2(z+1) + 1(y-2) + 3(z+1) - 4(y-2) + (x-1) = 0$$

$$\equiv -5(x-1) - 3(y-2) + z + 1 = 0$$

$$\equiv \boxed{-5x - 3y + z + 12 = 0}$$

249) Escriu l'equació del pla que passa pels punts $A(1,-3,2)$, $B(0,1,1)$ i és paral·lel a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$



π està determinat per $\vec{AB}$, $\vec{v_r}$ i A (o B)

$\vec{AB} = (-1, 4, -1)$

$v_r = (3,-2,0) \wedge (0,2,3) =$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 6\vec{k} - 6\vec{i} - 9\vec{j}$$

$$= (-6, -9, 6)$$

$$\frac{-6}{-1} \neq \frac{-9}{4} \neq \frac{6}{-1} \Rightarrow \vec{v_r} \nparallel \vec{AB}$$

π està determinat per $-\vec{AB}$, $\frac{-1}{3}\vec{v_r}$, B

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-1 & 3 & 4 \\ z-1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 3x + 8(z-1) - 2(y-1)$$
$$- 3(z-1) - 2(y-1) + 8x = 0$$

$$\equiv \boxed{11x - 4y + 5z - 1 = 0}$$

250. Estudieu la posició relativa de la recta $r \equiv \{x = 3, \; y = 2$ i el pla $z = 1$.

Hem d'estudiar el rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

clarament $rg\, M = 3 \Rightarrow rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ secants

251. Estudieu les posicions relatives del pla $\pi \equiv x + ay - z = 1$ i la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ segons els valors de a.

Hem d'estudiar el rang de les matrius

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-a \\ 1 & a & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-2 + 1 + a^2 + a - 1 - 2a \right)$$

$$= -a^2 + a + 2$$

$$= 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

- Si $a \neq -1$ o $a \neq 2 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 3$ $\Rightarrow rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ secants

- Si $a = -1 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow rg\, M \neq 3$
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 2$

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2+2+2-2+1+4 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ paral·lels.

. Si $a = 2 \Rightarrow rg\, M \neq 3$ i pl. = feix ordinari $rg\, M = 2$

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r \in \Pi$$

252. Estudieu la posició relativa de les rectes

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

i doneu l'angle que formen entre si.

$$v_r = (1,-1,0) \wedge (0,1,1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k} + \vec{i} - \vec{j} = (1,-1,1)$$

$v_s = (3,2,5)$

$v_r \nparallel v_s \Rightarrow$ es tallen o s'encreuen

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 29 \end{vmatrix} = 58 - 15 - 3 - 6 + 87 + 5$$
$$= 126 \neq 0$$

$P = (3, 0, 17) \in r \quad (y = 0)$

$Q = (0, 1, -14) \in s$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP} = (3, -1, 29)$

$\Longleftrightarrow$ S'encreuen.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} \right)$$

$$= \arccos\left(\right.$$

$v_r = (1, -1, 1) \Rightarrow |v_r| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$v_s = (3, 2, 5) \Rightarrow |v_s| = \sqrt{9+4+25} = 6$

$v_r \cdot v_s = 3 - 2 + 5 = 6$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{6}{6\sqrt{3}} \right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \simeq 54'74^{\circ}$$

2.53. Troba, en cada cas, l'angle que fan la recta i el pla.

a) $r \equiv \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$

$\pi \equiv x - 2y - z + 1 = 0$

Trobem el vector director de la recta i el vector normal del pla.

$\vec{v_d} = (-2, 4, 2)$ $\qquad \vec{v_d} \cdot \vec{n} = -2 - 8 + 2 = -8.$

$\vec{n} = (1, -2, +1)$

Sabem que $\alpha = \arcsin \dfrac{|\vec{v_d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v_d}| \cdot |\vec{n}|}$

$\Rightarrow \alpha = \arcsin \dfrac{|-8|}{\sqrt{24}\sqrt{6}} = \arcsin \dfrac{8}{\sqrt{144}} = \arcsin \dfrac{8}{12} =$

$|\vec{v_d}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$

$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

$= \arcsin \dfrac{2}{3} = 41'81^\circ$

b) $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 \end{cases}$ $\qquad \pi \equiv 2x - y + z = 0.$

$\vec{v} = (1, 2, 0)$ $\qquad \vec{n} = (2, -1, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow$ $\vec{n}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars $\Rightarrow r \in \pi$.

$\Rightarrow \alpha = 0.$

c) $r \equiv \frac{x-1}{2} = y-3 = z \Rightarrow \vec{v_r} = (2, 1, 1)$

$\pi \equiv x+z=17 \Rightarrow \vec{n} = (1, 0, 1)$

$$\beta = \arccos \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{n}|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{12}} =$$

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = 2+0+1 = 3$$
$$|\vec{v_r}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{2}$$

$$= \arccos \frac{3}{2\sqrt{3}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

254. Calcula l'angle que formen els plans

$\alpha \equiv z=3 \Rightarrow \vec{n_\alpha} = (0, 0, 1)$

$\beta \equiv x-y+2z+4=0 \Rightarrow \vec{n_\beta} = (1, -1, 2)$

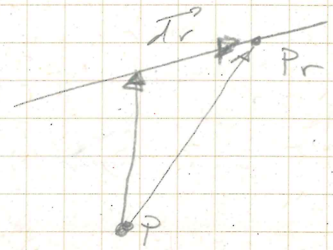
$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|} = \arccos \frac{2}{1 \cdot \sqrt{6}} = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}} = \underline{35'26^\circ}$$

$$\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = 2$$
$$|\vec{n_\alpha}| = \sqrt{1} = 1$$
$$|\vec{n_\beta}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

255. Calcula la distància del punt donat a la recta en cadascun dels casos següents:

a) $P=(0,7,0)$,

$$r \equiv \begin{cases} x=-5+4\lambda \\ y=5+\lambda \\ z=-10+3\lambda \end{cases}$$



Tenim que

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP}\wedge \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|}$$

on P_r és qualsevol punt de la recta r i $\vec{d_r}$ és el vector director de r.

$\vec{P_r}=(-5,5,-10)$. $\qquad \vec{d_r}=(4,1,3)$

$\overrightarrow{P_rP}=(+5,2,10)$

$$\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{d_r}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{vmatrix}$$

$$=5\vec{k}+6\vec{i}+40\vec{j}$$
$$-10\vec{i}-8\vec{k}-15\vec{j}$$
$$=-4\vec{i}+25\vec{j}-3\vec{k}=(-4,25,-3)$$

$|\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{d_r}|=\sqrt{16+625+9}=\sqrt{650}$

$|\vec{d_r}|=\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$

$$\Rightarrow d(P,r)=\frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{650}{26}}=\sqrt{\frac{325}{13}}=\sqrt{25}=\boxed{5}$$

b) $P(1,0,0)$, $r \equiv x-1 = \frac{y+1}{2} = z.$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{P_rP} \wedge \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|}$$

P_r :

$$2(x-1) = y+1$$
$$2z = y+1$$

Prenem $y=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ z=1 \end{array} \Rightarrow P_r = (2,1,1)$

$$\vec{P_rP} = (-1,-1,-1)$$

$$|\vec{v_r}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$\vec{w} = \vec{P_rP} \wedge \vec{v_r}$, Sigui

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{k} - \vec{i} - \cancel{\vec{j}} + 2\vec{i} + \vec{k} + \cancel{\vec{j}}$$

$$= \vec{i} - \vec{k} = (1,0,-1)$$

$$\Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d(P,r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

c) $P(1,2,3)$, $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$ $\rightarrow$ El vector director de r és igual a

$(1,0,0) \wedge (0,1,0)$

$= (0,0,1)$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$P_r = (0,0,2) \quad \vec{v_r} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow d(P,r) = \frac{|\vec{P_rP} \wedge \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|} = \frac{|(1,2,1)\wedge(0,0,1)|}{|(0,0,1)|}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 0 + 2\vec{i} + 0 - 0 - 0 - \vec{j}$$
$$= 2\vec{i} - \vec{j} = (2,-1,0)$$

$$\Rightarrow |(1,2,1)\wedge(0,0,1)| = |(2,-1,0)| =$$
$$\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

256. Calculeu la mínima distància entre les rectes següents:

a) $r \equiv \begin{cases} x = -4-2\lambda \\ y = -5+2\lambda \\ z = -1-3\lambda \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 5-3\mu \\ y = 4-\mu \\ z = 5-5\mu. \end{cases}$

Tenim que $d(r,s) = \dfrac{|[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{P_rP_s}]|}{|\vec{v_r}\wedge\vec{v_s}|}$

$\vec{v_r} = (-2,2,-3)$

$\vec{v_s} = (-3,-1,-5)$

$$\vec{v_r}\wedge\vec{v_s} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -5 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= 2\vec{k} - 10\vec{i} + 9\vec{j}$$
$$-3\vec{i} + 6\vec{k} - 10\vec{j} = -13\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k} = (-13,-1,8)$$

$$[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}] = \vec{v_r} \cdot (\vec{v_s} \wedge \overrightarrow{P_rP_s})$$

$$\left.\begin{array}{l} P_r = (-4,-5,-1) \\ P_s = (5,4,5) \end{array}\right\rangle \overrightarrow{P_rP_s} = (9,9,6)$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot (\overrightarrow{(-3,-1,-5)} \wedge \overrightarrow{(9,9,6)})$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 9 & 9 & 6 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot [-27\vec{k} - 6\vec{i} - 45\vec{j} + 45\vec{i} + 9\vec{k} + 18\vec{j}]$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot \overrightarrow{(39,-27,-18)} = -78 - 54 + 54 = -78$$

$$\mapsto d(r,s) = \frac{78}{\sqrt{(-13)^2 + 1 + 64}} = \sqrt{\frac{78}{234}}$$

b) $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 5-7\lambda \end{cases}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0. \end{cases}$

Siguin

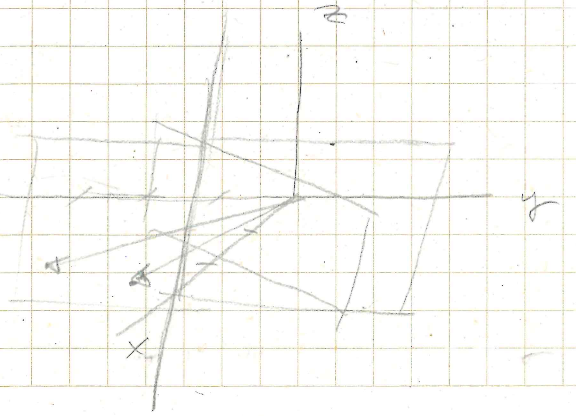
$P_r = (1,1,5)$

$V_r = (1,-2,-7)$

$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y + 2 = 0 \\ -y + 1 = 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow y = 1$

$y = \frac{2}{3}$!



s és intersecció de dos plans paral·lels? No

$\vec{n} = (2,-3,0)$

$\vec{m} = (3,-1,0)$

$P_s \in s$:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 9y = -6 \\ -6x + 2y = +2 \end{cases}$$

$$/ \quad -7y = -4$$

$$x = \frac{-1 + \frac{4}{7}}{3} \Leftarrow y = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

$$= \frac{\frac{-3}{7}}{3} = \frac{-3}{21} = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow r = \begin{cases} x = -1/7 \\ y = 4/7 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \mu \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $z = 0 \Rightarrow (-1/7, \frac{4}{7}, 0) = P_s$.

$\exists \ v_s = (0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_r P_s} = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}, -5\right)$$

$$\vec{v_r} \wedge \vec{v_s} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} = (-2, 0, -1)$$

$$\vec{v_s} \wedge \overrightarrow{P_r P_s} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -\frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & -5 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = -\frac{3}{7}\vec{k} + 10\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$-3\vec{i} - 8\vec{k} + 5\vec{j}$$

$$= 7\vec{i} + 13\vec{j} - \frac{59}{7}\vec{k}$$

$$= \left(7, 13, -\frac{59}{7}\right)$$

$$\vec{v_r} \cdot \left(\vec{v_s} \wedge \overrightarrow{P_r P_s}\right) = (1, -2, -7) \circ \left(7, 13, -\frac{59}{7}\right)$$

$$= 7 - 26 + 59 = 40.$$

$$\Rightarrow d(r,s) = \frac{40}{|(-2,0,-1)|} = \frac{40}{\sqrt{5}}$$

257) Trobeu el joc geomètric dels punts de l'espai que equidisten dels següents plans:

a) $\pi_1 \equiv x + y + z - 2 = 0$

$\pi_2 \equiv x - y + z - 2 = 0$

Sigui L aquest conjunt, i.e.,

$$L = \{ P = (x,y,z) \mid d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \}$$

$$d(A,\pi_1) = \frac{|x+y+z-2|}{\sqrt{3}}$$

$$d(A,\pi_2) = \frac{|x-y+z-2|}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow |x+y+z-2| = |x-y+z-2|$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z-2 = x-y+z-2 \\ \text{o bé} \\ x+y+z-2 = -x+y-z+2 \\ \text{o bé} \\ -x-y-z+2 = -x+y-z+2 \\ \text{o bé} \\ -x-y-z+2 = x-y+z-2 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ $2y = 0$

o bé

$2x + 2z = 4$

o bé

$2y = 0$

o bé

$-2x - 2z = -4$

$\Rightarrow$ $y = 0$

o bé

$x + z = 2$

$\Downarrow$

$x = 2 - z$

$\Rightarrow$ $(\lambda, 0, \mu)$ on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$= (2-\mu, \lambda, \mu)$ on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow L = \{ (\lambda, 0, \mu), (2-\mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

b) $\pi_1 \equiv x - 3y + 2z - 8 = 0$

$\pi_2 \equiv x - 3y + 2z = 0$

Sigui L aquest lloc geomètric:

$L = \{ P = (x, y, z) \mid d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \}$

$d(A, \pi_1) = \dfrac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{14}}$

$d(A, \pi_2) = \dfrac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{14}}$

$\Rightarrow d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow |x - 3y + 2z - 8| = |x - 3y + 2z|$

$\Rightarrow$ $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \Rightarrow$ impossible

o

$x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \Rightarrow 2x - 6y + 4z = 8$

o

$-x + 3y - 2z + 8 = x - 3y + 2z \Rightarrow 2x - 6y + 4z = 8$

o

$-x + 3y - 2z + 8 = -x + 3y - 2z \Rightarrow$ impossible

$\Rightarrow (x,y,z) \in L \Longleftrightarrow 2x - 6y + 4z = 8.$

$$x - 3y + 2z = 4$$

$$\Rightarrow L \equiv x - 3y + 2z - 4 = 0$$

L és el pla paral·lel a Π_1 i Π_2 (Π_1, Π_2 són paral·lels) que es troba equidistant de Π_1 i Π_2

SOLUCIONS DE LA
FULLA DE JAVIER
SÁNCHEZ

32)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \underset{F_4-F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \underset{F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$

$\underset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \\ C_4-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$

b) 0

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

33)

a) $\begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 5 & -\sqrt{3} \cdot 5 \end{vmatrix} \underset{C_1 \cdot \sqrt{3} - C_2}{=} \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \cdot (-2) + F_1 \\ F_2 \cdot 3 + F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\cdot(-5)+F_1 \\ F_2\cdot(-3)+F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -16 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} yz & \frac{1}{x} & x \\ zx & 1/y & y \\ xy & 1/z & z \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{multiplic} \\ \text{i divideix per} \\ x}}{=} \frac{1}{x} \begin{vmatrix} yz & 1 & x \\ zx & \frac{x}{y} & y \\ xy & \frac{x}{z} & z \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{z} \begin{vmatrix} yz & yz & x \\ zx & xz & y \\ xy & xy & z \end{vmatrix} = 0$

34)
a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \underset{C_3+C_2\to C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} -2a+b+c & 3a & 1 \\ a-2b+c & 3b & 1 \\ a+b-2c & 3c & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2+C_1\to C_1}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & 3a & 1 \\ a+b+c & 3b & 1 \\ a+b+c & 3c & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 3a & 1 \\ 1 & 3b & 1 \\ 1 & 3c & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) ?

d) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & m & n \\ -a & -b & c & p \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1+F_2 \\ F_1+F_3 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & m+c & n+d \\ 0 & 0 & 2c & p+d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Triangular}}{=} 4abcd$$

e) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \underset{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & ca-bc & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(b-c)$$

j) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1+F_2 \\ F_1+F_3 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$

$= (x+1)^4$

h) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \underset{C_2+C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix}$

$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

$= (x+a+b+c) \cdot x^2$

i) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \underset{\text{dezvoltare pe } F_1}{=} a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} -$

$- b \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 + b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} =$

$= a^4 - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a^4 - b^4$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot a \cdot b \cdot c$$

f) 527

PROBLEMES RESOLTS.

Problemes de Matemàtiques Especials

P2. Trobeu l'equació implícita dels plans següents:

a) Pla que passa pels punts $P_1 = (1,0,-1)$, $P_2 = (1,3,0)$ i $P_3 = (2,-1,3)$.

b) Pla que passa pel punt $Q = (3,0,1)$ i és paral·lel al pla $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.

b) Sigui π aquest pla. Si π ha de ser paral·lel a $3x - 2y + 5z + 1 = 0$, aleshores han de tenir el mateix vector normal.

$\Downarrow$

$(3,-2,5)$ ha de ser vector normal de π

$\Rightarrow \pi \equiv 3x - 2y + 5z + k = 0$.

Com que sabem que passa per Q, aleshores

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + k = 0$$

$$9 - 0 + 5 + k = 0$$

$$14 + k = 0 \Rightarrow k = -14.$$

$\Rightarrow \pi \equiv 3x - 2y + 5z - 14 = 0.$

a) Si passa pels punts P_1, P_2 i P_3 $\Rightarrow$ està generat pels vectors $v_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$, $v_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$ i passa per P_1.

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-0 & 3 & -1 \\ z+1 & 1 & +4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1-1, 3-0, 0+1) = (0,3,1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (2-1, -1-0, \underbrace{\cancel{-1-3}}_{3+1}) = (1,-1,\underbrace{\cancel{-4}}_{4})$$

$\Rightarrow \pi \equiv$ ~~$+12(x-1) + y - 3(z+1) + x - 1 = 0$~~

$\pi \equiv$ (~~$-12x + 12 + y - 3z - 3 + x - 1 = 0$~~

$\pi \equiv -11x$

$$\pi \equiv 12(x-1) + y - 3(z+1) + (x-1) = 0.$$

$$\pi \equiv 12x - 12 + y - 3z - 3 + x - 1 = 0$$

$$\pi \equiv 13x + y - 3z - 16 = 0.$$

Per tant, $\pi \equiv 13x - y - 3z - 16 = 0.$

P3. Estudieu si els parells de plans següents són paral·lels o es tallen:

a) ~~x=0~~ $\pi \equiv x = 0$

$\pi' \equiv y + z = 0$

b) $\pi \equiv \begin{cases} x = s + t \\ y = 1 + s + t \\ z = t \end{cases}$

$\pi' \equiv x - y = 0.$