FACTORITZACIÓ

262) Factoritzeu els polinomis següents:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Cercam les arrels enteres al mateix temps per factoritzar

$Div(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Feim Ruffini amb $x = 1$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 és arrel.

Si diem $p(x)$ al polinomi original, tenim que

$p(x) = (x-1) \cdot (x^2 - x - 6)$

Cercam les arrels de $x^2 - x - 6$ usant la fórmula general de segon grau:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow p(x) = (x-1) \cdot (x-3)(x+2)$

b) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

$Div(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 9 & -9 \\ 1 & & 1 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 és arrel i, per tant,

$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x-1) \cdot (x^2 + 9)$

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

$x = \pm\sqrt{-9}$

no té solució

$x^2 + 9$ no té arrels, per tant, aquesta és la factorització cercada

c) $15x^3+25x^2-10x$

Treiem factor comú:

$15x^3+25x^2-10x = 5x(3x^2+5x-2)$

Apliquem la fórmula general de segon grau:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm7}{6}$$

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\frac{-12}{6}=-2$

$\Rightarrow 15x^3+25x^2-10x = 5x\cdot\left(3(x-\frac{1}{3})\cdot(x+2)\right)$

$= 15x(x-\frac{1}{3})\cdot(x+2)$

Aquest exercici també es podria haver fet treient factor comú x i no $5x$.

d) $3x^3-3x^2-6x$

Treiem factor comú:

$3x^3-3x^2-6x = 3x(x^2-x-2)$

Apliquem la fórmula de segon grau:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$$

2

-1

$\Rightarrow 3x^3-3x^2-6x = 3x\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

e) $2x^4+4x^3-10x^2-8x+12$

$Div(12)=\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2\cdot 3$

3 Factors $\Rightarrow 2^2\cdot 3 = 12$

2 Factors $\Rightarrow 2^2 = 4,\ 2\cdot 3 = 6$

1 Factor $\Rightarrow 2,\ 3$

0 factors $\Rightarrow 1$.

Provem amb $x=1$ fent Ruffini per veure si és arrel sencera.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 4 & -10 & -8 & 12 \\ 1 & & 2 & 6 & -4 & -12 \\ \hline & 2 & 6 & -4 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

Per tant, 1 és arrel i per tant

$2x^4+4x^3-10x^2-8x+12 = (x-1)\cdot(2x^3+6x^2-4x-12)$

Volem cercar les arrels senceres de $2x^3+6x^2-4x-12$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ 1 & & 2 & 8 & 4 \\ \hline & 2 & 8 & 4 & \boxed{-8} \end{array}$$

1 no és arrel

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ -1 & & -2 & -4 & 8 \\ \hline & 2 & 4 & -8 & \boxed{-4} \end{array}$$

-1 no és arrel

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ 2 & & 4 & 20 & 32 \\ \hline & 2 & 10 & 16 & \boxed{20} \end{array}$$

2 no és arrel

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ -2 & & -4 & -4 & 16 \\ \hline & 2 & 2 & -8 & \boxed{4} \end{array}$$

-2 no és arrel.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ 3 & & 6 & 36 & 96 \\ \hline & 2 & 12 & 32 & \boxed{84} \end{array}$$

3 no és arrel

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ -3 & & -6 & 0 & 12 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

-3 és arrel

$\Rightarrow 2x^4+4x^3-10x^2-8x+12 = (x-1)\cdot(x+3)\cdot(2x^2-4)$

$2x^2-4=0$
$2x^2=4$
$x^2=2$
$x=\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2x^4+4x^3-10x^2-8x+12 = \boxed{2\cdot(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}$

f) $-x^3+x^2+4x-4$

$Div(4)=\{\pm1, \pm2, \pm4\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & -1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 és arrel

$-x^3+x^2+4x-4 = (x-1)\cdot(-x^2+4)$

$-x^2+4=0$
$-x^2=-4$
$x^2=4$
$x=\pm2$

$\Rightarrow -x^3+x^2+4x-4$
$= -1\cdot(x-1)\cdot(x-2)(x+2)$

g) $-5x^4+20x^2-20$

Si feim el canvi $t=x^2$, obtenim una equació biquadrada

$$-5t^2+20t-20=0$$

$$t=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot(-5)\cdot(-20)}}{2\cdot(-5)}=\frac{-20\pm 0}{-10}\begin{cases}2\\2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 2 és arrel doble

$$\Rightarrow -5t^2+20t-20=-5(t-2)\cdot(t-2)$$

Si ara desfeim el canvi $t=x^2$

$$\Rightarrow -5x^4+20x^2-20=-5(x^2-2)\cdot(x^2-2)$$

$$x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2-2=(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow -5x^4+20x^2-20=-5(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Reordenant això és igual a

$$-5(x-\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$
$$=-5(x-\sqrt{2})^2\cdot(x+\sqrt{2})^2$$

Reflexió: Si haguéssim provat de fer Ruffini amb el polinomi original per cercar les arrels enteres, no haguéssim obtingut cap reste 0 perquè el polinomi no té arrels senceres ($\pm\sqrt{2}$ són les seves arrels)

h) $3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x$

Treiem factor comú:

$$3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x = x(3x^3 - 6x^2 - 27x + 54)$$

Millor però:

$$3x(x^3 - 2x^2 - 9x + 18)$$

ja que els divisors de 18 són més pocs que els de 54.

$$\text{Div}(18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$18 = 3^2 \cdot 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 1 & & 1 & -1 & -10 \\ \hline & 1 & -1 & -10 & \boxed{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ -1 & & -1 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & \boxed{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2 és arrel.

$$\Rightarrow 3x(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) = 3x(x-2)(x^2 - 9)$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x = 3x(x-2)(x-3)(x+3)$$

12) Resoleu les equacions següents:

a) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

Calculem primer el valor del determinant:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = (x-2)x^2 - x(1-2x)$$
$$= x^3 - 2x^2 - x + 2x^2$$
$$= x^3 - x$$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

Per tant, les solucions són $x=0$, $x=1$, i $x=-1$.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Si diem Δ al determinant, tenim que:

$\Delta = 3 - 2a - 1 = -2a + 2$

$\Delta = 0 \Rightarrow -2a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2}{-2} = \boxed{1}$

c) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a+6)(a-1) - 6(a-1)$

$= \underbrace{3a} - 3 + a^2 - \underbrace{a} + \cancel{6a} - \cancel{6} - \cancel{6a} + \cancel{6}$

$= a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$

$\Rightarrow a = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{-3} \end{array} \right.$

73) Per a quin valor de x s'anul·la el determinant següent?

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (-x)^3 + x + x$$

$$= -x^3 + 2x = 0$$

$$\hookrightarrow x(-x^2+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

o bé

$$-x^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Per a $\cancel{x} = 0$ i $x = \pm\sqrt{2}$

74) Resoleu l'equació:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

75) Trobeu en funció de a, el valor del determinant.

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + a^3 + a^3 - a^2(a+1) - a^2(a+1) - a^2(a+1)$$

$$= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + 2a^3 - 3a^2(a+1)$$

$$= \cancel{a^3} + \cancel{3a^2} + 3a + 1 + \cancel{2a^3} - \cancel{3a^3} - \cancel{3a^2}$$

$$= 3a+1$$

76) Trobeu en funció de a el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a \\ a & a+1 & 1 \\ a+2 & a & a+1 \end{vmatrix}$$ i digueu quan val 0

Diem Δ al determinant

$$\Delta = (a+1)^3 + (a+2)^2 + a^3 - a(a+1)(a+2) - (a+2)a(a+1) - a(a+1)$$

$$= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^3 - (a^3 + 3a^2 + 2a) - (a^3 + 3a^2 + 2a) - (a^2 + a)$$

$$= \cancel{a^3} + \cancel{3a^2} + 3a + 1 + \cancel{a^2} + 4a + 4 + \cancel{a^3} - \cancel{a^3} - 3a^2 - 2a - \cancel{a^3} - \cancel{3a^2} - 2a - \cancel{a^2} - a = -3a^2 + 2a + 5$$