260) Trobeu les arrels dels polinomis següents:

a) $x^4+3x^3-40x^2$

Trobar les arrels del polinomi significa trobar les solucions de l'equació

$$x^4+3x^3-40x^2=0$$

Només sabem trobar les arrels senceres.

Com que no té terme independent, hem de factoritzar el polinomi:

$$x^2(x^2+3x-40)=0$$

Per tant, les arrels del polinomi inicial són les arrels de x^2 i de $x^2+3x-40$.

- $x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{0} \Rightarrow x=0$

- $x^2+3x-40=0$

Apliquem la fórmula general de 2n grau

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-40)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{-3\pm13}{2} \begin{cases} \frac{-3+13}{2}=\boxed{5} \\ \frac{-3-13}{2}=\boxed{-8} \end{cases}$$

Per tant, les arrels són 0, 5 i −8.

b) $2x^3 - x^2 - 118x - 315$

Com que té terme independent, podem usar el teorema de Ruffini per trobar les arrels senceres del polinomi.

$Div(315) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 15, \pm 21, \pm 35,$
$\pm 45, \pm 63, \pm 105, \pm 315\}$, ja que:

$$\begin{array}{r|l} 315 & 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$\Rightarrow$ els divisors de 315 són els nombres que s'obtenen prenent els factors de 315 un a un, dos a dos, etc.

1 factor: $3, 5, 7$

2 factors: $3^2 = 9$, $3 \cdot 5 = 15$, $3 \cdot 7 = 21$
$5 \cdot 7 = 35$

3 factors: $3^2 \cdot 5 = 45$, $3^2 \cdot 7 = 63$,
$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

4 factors: $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$

0 factors: 1

Provem amb 1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -118 & -315 \\ 1 & & 2 & 1 & -117 \\ \hline & 2 & 1 & -117 & \boxed{-432} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 no és arrel

Si provem amb -5 funciona:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -118 & -315 \\ -5 & & -10 & +55 & 315 \\ \hline & 2 & -11 & -63 & \boxed{0} \end{array}$$

$\downarrow$

$2x^2 - 11x - 63$

Per tant, $\boxed{-5}$ és arrel.

Llavors

$$2x^3 - x^2 - 118x - 315 = (x+5)\cdot(2x^2 - 11x - 63)$$

Per saber les arrels de $2x^2 - 11x - 63$ aplicam la fórmula de segon grau:

$$2x^2 - 11x - 63 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4\cdot 2\cdot(-63)}}{2\cdot 2} =$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 504}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{11 \pm 25}{4}$$

$$\frac{11+25}{4} = \boxed{9}$$

$$\frac{11-25}{4} = \boxed{\frac{-7}{2}}$$

c) $x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x$

Com que no tenim terme independent, factoritzam

$$x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x = x(x^4 - 2x^3 - 3x + 6)$$

Hem de trobar els divisors de 6.

$6 = 2 \cdot 3$

$\Rightarrow Div(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 0 & -3 & 6 \\
1 & & 1 & -1 & -1 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & -4 & \boxed{2}
\end{array}$$

$\Rightarrow 1$ no és arrel

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 0 & -3 & 6 \\
-1 & & -1 & 3 & -3 & 6 \\
\hline
 & 1 & -3 & 3 & -6 & \boxed{12}
\end{array}$$

$\Rightarrow -1$ no és arrel

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 0 & -3 & 6 \\
2 & & 2 & 0 & 0 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\Rightarrow 2$ és arrel.

$x^3 + 0x^2 + 0x - 3$

$\Rightarrow x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x = x \cdot (x-2) \cdot (x^3 - 3)$

$x^3 - 3$ és un polinomi raonablement fàcil de trobar les seves arrels reals:

$$x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$\Rightarrow$ Les arrels són $0, 2, \sqrt[3]{3}$

d) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$

Hem de cercar les arrels senceres del polinomi:

$12 = 2^2 \cdot 3$

0 factors $\Rightarrow$ 1
1 factor $\Rightarrow$ 2, 3
2 factors $\Rightarrow$ $2^2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$
3 factors $\Rightarrow$ $2^2 \cdot 3 = 12$

$\Rightarrow \text{Div}(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -2 & 12 \\ 1 & & 1 & 2 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -6 & -8 & \boxed{4} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 <u>no</u> és arrel

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -2 & 12 \\ -1 & & -1 & 0 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -8 & 6 & \boxed{6} \end{array}$$

$\Rightarrow$ -1 no és arrel

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -2 & 12 \\ 2 & & 2 & 6 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{2 és arrel}}$

$\Rightarrow x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = (x-2) \cdot (x^3 + 3x^2 - 2x - 6)$

$\text{Div}(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Provem amb -3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -2 & -6 \\ -3 & & -3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{-3 és arrel}}$,

$\Rightarrow x^4+x^3-8x^2-2x+12=(x-2)(x+3)\cdot(x^2-2)$

$x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Les arrels del polinomi són $2, -3, \sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

e) $3x^4-12x^3-33x^2+90x$.

Factoritzar

Si diem $p(x)=3x^4-12x^3-33x^2+90x$ al polinomi inicial tenim que

$$p(x)=x\,(3x^3-12x^2-33x+90)$$

$\Rightarrow 0$ és arrel de $p(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90=2\cdot3^2\cdot5$

0 Factors $\Rightarrow 1$

1 Factor $\Rightarrow 2, 3, 5$

2 Factors $\Rightarrow \underset{6}{2\cdot3}, \underset{10}{2\cdot5}, \underset{15}{3\cdot5}, \underset{9}{3^2}$

3 Factors $\Rightarrow 2\cdot3\cdot5=30$

$2\cdot3\cdot3=18$

$3\cdot3\cdot5=45$

4 Factors $\Rightarrow 90$.

$Div(90)=\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm9, \pm10, \pm15, \pm18, \pm30, \pm45\}$

Si provem amb $x = 2$, funciona:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -12 & -33 & 90 \\
2 & & 6 & -12 & -90 \\
\hline
 & 3 & -6 & -45 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$$p(x) = x \cdot (x-2) \cdot (3x^2 - 6x - 45)$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-45)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 540}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm 24}{6} \begin{cases} \boxed{5} \\ \boxed{-3} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ les arrels de $p(x)$ són $0, 2, -3$ i 5

f) $x^4 + 28x^3 - 60x^2 = x^2(x^2 + 28x - 60)$

$$x^2 - 28x - 60 = 0 \longrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{28 \pm 32}{2} \begin{cases} 30 \\ -2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Arrels són $0, -2$ i 30.

261/ a) $x^4 + 3x^3 - 40x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 3x - 40) = 0$

$\to x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\to x^2 + 3x - 40 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 13}{2} \to \boxed{5},\ \boxed{-8}$$

b) $2x^3 - x^2 - 118x = 315$

$2x^3 - x^2 - 118x - 315 = 0$

315	5
63	7
9	3
3	3
1	

$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

0 Factors $\Rightarrow 1$

1 Factors $\Rightarrow 3, 5, 7$

2 Factors $\Rightarrow 3^2 = 9,\ 3 \cdot 5 = 15,\ 3 \cdot 7 = 21$
$5 \cdot 7 = 35$

3 Factors $\Rightarrow 3^2 \cdot 5 = 45$
$3^2 \cdot 7 = 63$
$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

4 Factors $\Rightarrow 315$

$Div(315) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 15, \pm 21, \pm 35, \pm 45, \pm 63, \pm 105, \pm 315\}$

Si provem de fer Ruffini amb $x = -5$ funciona:

	2	−1	−118	−315
−5		−10	55	+315
	2	−11	−63	0

$\Rightarrow -5$ és arrel

$2x^2 - 11x - 63 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 2 \cdot (-63)}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{11 \pm 25}{4} \to \boxed{9},\ \boxed{-\frac{7}{2}}$$

c) $x^3 - \frac{5x^2}{2} + x = 0$

$2x^3 - 5x^2 + 2x = 0$

$x(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$\to \boxed{x = 0}$

$\to 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$

$= \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} \boxed{2} \\ \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{cases}$

d) $12x^4 - 39x^2 + 27 = 0$

És una biquadrada. Feim el canvi
$t = x^2$

$12t^2 - 39t + 27 = 0$

$t = \frac{39 \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 27}}{2 \cdot 12} = \frac{39 \pm \sqrt{225}}{24}$

$= \frac{39 \pm 15}{24} \begin{cases} \frac{9}{4} \\ 1 \end{cases}$

Com que $t = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$

Ara bé, a les biquadrades hi pot haver solucions "falses"

Ho hem de comprovar a l'equació original:

$12 \cdot 1^4 - 39 \cdot 1^2 + 27 = 0 \Rightarrow 1$ és solució

$12 \cdot (-1)^4 - 39 \cdot (-1)^2 + 27 = 0 \Rightarrow -1$ és solució

$12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 39 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 27 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}$ és solució

$12 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 39 \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 27 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}$ és solució.

No té cap solució falsa

Per tant, les solucions de l'equació són $\pm 1, \pm \frac{3}{2}$.