$\Rightarrow$ $rg\, A = rg\, M \Rightarrow$ C.I. $\Rightarrow$ el sistema és.
$\quad\ \ \| $
$\quad\ \ 1.$

$$\{ x + y = 0$$

$y = \lambda$, on λ és un nombre qualsevol

$x = -\lambda$

$\Rightarrow$ Solució: $x = -\lambda,\ y = \lambda$
on λ és un nº qualsevol

• Si $m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right|$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 2$$

i $rg\, A = 1 \Rightarrow$ incompatible.

e) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = a^2 - 2a$

$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow a = 2$

• Si $a \neq 0,\ a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$\Rightarrow$ C.D.

Aplicam la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}}{a(a-2)} = \frac{2a-4}{a(a-2)} = \frac{2\cancel{(a-2)}}{a\cancel{(a-2)}} = \frac{2}{a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{a(a-2)} = \frac{4-2a}{a(a-2)} = \frac{2(2-a)}{a(a-2)} =$$

$$= \frac{-2\cancel{(a-2)}}{a\cancel{(a-2)}} = \frac{-2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a(a-2)} = \frac{a^2-2a}{a(a-2)} = \frac{a(a-2)}{a(a-2)} = 1.$$

$\Rightarrow$ Soluciones $\left(\frac{2}{a}, -\frac{2}{a}, 1\right)$

- Si $a=0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \text{rg } A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 3 \Rightarrow \text{el}$$

sistema és incompatible.

• Si $a = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Tots els menors d'ordre 2 de M són 0, ja que ~~s~~ sempre contenen dues columnes iguals $\Rightarrow \text{rg } M \neq 3$. I, per tant, ~~rg A = 2~~

$\text{rg } M = 2$.

$\Rightarrow$ C. I.

Parametritzem:

Com que $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ la 1ª i 2ª equacions són independents. Per tant, el sistema és equivalent a:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x \qquad\quad = 2 \end{cases}$$

Sigui $z = \lambda$, amb λ un nombre qualsevol.

Llavors:

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ 2x = 2 \end{cases}$$

observem que el sistema és tant senzill que es pot resoldre directament, sense fer servir la regla de Cramer:

- De la segona equació: $2x = 2 \Rightarrow x = 1$
- Per tant, substituint a la 1-a equació,

$$1 + y = 1 - \lambda \Rightarrow y = 1 - \lambda - 1$$

$$\Rightarrow y = -\lambda$$

Llavors, la solució és $(1, -\lambda, \lambda)$, on λ és un nombre qualsevol.

113) Hi ha algun valor de a per al qual el sistema tengui infinites solucions?

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y + z = a+3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a+2 \end{cases}$$

El problema és equivalent a saber quan és compatible indeterminat.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 & a+3 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que tenim que sigui compatible indeterminat, s'ha de verificar que:

- $rg\, A = rg\, M$
- $rg\, A = rg\, M < 3$.

- $|A| = a+1 + 3a - a - 2a = a+1$

$a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$,

- Si $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$
$\Rightarrow$ C.D. $\Rightarrow$ No és el cas que volem.

- Si $a = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 2 = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, M = 3 \Rightarrow$ incompatible.

$\Rightarrow$ tampoc és el cas que volem.

$\Longrightarrow$ No hi ha cap valor de a pel qual el sistema sigui C.I.

114) Siguin

x = cotxes blancs produïts

y = cotxes negres produïts

z = cotxes vermells produïts

$$\begin{cases} x+y+z=140 \\ y=\frac{3}{5}x \\ z=\frac{1}{4}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=140 \\ 5y=3x \\ 4z=y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=140 \\ -3x+5y \quad\; =0 \\ \quad\;\; -y+4z=0 \end{cases}$$

Apliquem la regla de Cramer per resoldre aquest sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 140 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 20+3+12 = 35$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 140 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{35} = \frac{2800}{35} = 80$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 140 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{35} = \frac{1680}{35} = 48$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 140 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{35} = \frac{420}{35} = 12$$

R: Es produeixen 80 cotxes blancs, 48 cotxes negres i 12 cotxes vermells.

115) Siguin

x = diners que porta en Pere

y = " " " " Joan

z = " " " l'Àngel

Tenim:

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ z = x + y \\ x = \frac{3}{2} y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 200 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Per resoldre el sistema apliquem la regla de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 + 3 + 2 + 3 = 10$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{600}{10} = 60$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{600+400}{10} = \frac{1000}{10} = 100$$

Per tant, en Pere té 60 €, en Joan en té 40 i n'Àngel, 100.

116) Siguin

x = preu del pots de moniato

y = " ... " nata

z = " ... " " " xocolata

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 15'75 \\ 2x + y + z = 10€ \\ x + y + z = 7'5 \end{cases}$$

(Si no volem fer servir nombres decimals, podem multiplicar la 1a i 3a equacions per 100 i 10 respectivament)

⇒ Apliquem la regla de Cramer per resoldre aquest sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 15'75 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 7'5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \cancel{3} + \cancel{2} + \cancel{2} - 1 - \cancel{4} - \cancel{3} = -1.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15'75 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 7'5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{15'75 + 15 + 10 - 7'5 - 20 - 15'75}{-1} = \boxed{2'50}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15'75 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 7'5 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{30 + 15'75 + 15 - 10 - 31'50 - 22'5}{-1} = \boxed{3'25}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 15'75 \\ 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 7'5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{22'5 + 20 + 31'5 - 15'75 - 30 - 30}{-1} =$$

$$= \boxed{+1'75}$$

Per tant, els pastissets de moniato, nata i xocolata valen, respectivament, 2'50 €, 3'25 € i 1'75 €.

117) Siguin

x = nombre de pomes,
y = " " peres
z = " " plàtans.

Sabem que:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Resolem aquest sistema per la regla de Cramer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 + \cancel{1} + 6 - \cancel{1} + 3 + 2 = 12$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12 + 24}{12} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12+36}{12} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{72-12}{12} = 5$$

Per tant hi ha 3 pomes, 4 peres i 5 plàtans.

118) Siguin

x = quantitat A de diners invertits

y = - - - - B - - - - - -

z = - - - - C - - - - - -

$$\begin{cases} x + y + z = 20000 \\ \frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y + \frac{6}{100}z = 1050 \\ \frac{5}{100}x + \frac{6}{100}y + \frac{4}{100}z = 950 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20.000 \\ 4x + 5y + 6z = 105.000 \\ 5x + 6y + 4z = 95.000 \end{cases}$$

Resolem aquest sistema usant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 20.000 & 1 & 1 \\ 105000 & 5 & 6 \\ 95000 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{400.000 + 570000 + 630000 - 475000 - 420000 - 720000}{20 + 30 + 24 - 25 - 16 - 36}$$

$$= \frac{-15000}{-3} = \boxed{5000}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20.000 & 1 \\ 4 & 105.000 & 6 \\ 5 & 95.000 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{420.000 + 600.000 + 380.000 - 525.000 - 320.000 - 570.000}{-3}$$

$$= \frac{-15.000}{-3} = \boxed{5000}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 20.000 \\ 4 & 5 & 105.000 \\ 5 & 6 & 95.000 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{475.000 + 525.000 + 480.000 - 500.000 - 380.000 - 630.000}{-3}$$

$$= \frac{-30000}{-3} = \boxed{10.000}$$

Per tant, $A = 5000$ €, $B = 5000$ € i $C = 10\,000$ €.

119) Siguin

x = nombre de còpies venudes al preu original

y = - - - - al 30% de descompte

z = - - - - - - - al 40% de descompte.

[30% de descompte vol dir que es ven al 70% del preu original]

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 12x + 8'40y + 7'2z = 6384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

[Un 70% de 12 és 8'40 €]

[Ídem amb el 40%: 7'20 €]

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 120x + 84y + 72z = 63.840 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Apliquem la regla de Cramer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 84 & 72 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 120 & 84 & 72 & 63840 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 168 - 72 + 240 + 84 - 240 - 144 = 36$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 63840 & 84 & 72 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{100800 + 127680 - 127680 - 86400}{36}$$

$$= 400$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 120 & 63840 & 72 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{127680 - 43200 + 63840 - 144000}{36}$$

$$= 120$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 120 & 84 & 63840 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{36} = \frac{-63840 + 144000 + 50400 - 127680}{36}$$

$$= 80$$

Per tant, s'han venut 400 còpies al preu original, 120 còpies al 30% i 80 còpies al 40% de descompte.

120) Siguin

x = nombre de bitllets de 10€

y = .. - - - - de 20€

z = . - - - - de 50€

$$\begin{cases} x+y+z=95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=95 \\ x+2y+5z=200 \\ x-2y \quad =0 \end{cases}$$

Aplicarem la regla de Cràmer per a resoldre el sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 5 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 5-2-2+10 = 11$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 95 & 1 & 1 \\ 200 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{11} = \frac{-400+950}{11} = 50$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 95 & 1 \\ 1 & 200 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{11} = \frac{475-200}{11} = 25$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 200 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{11} = \frac{200-190-190+400}{11} = 20.$$

121) Siguin $x =$ la xifra de les centenes
$y =$ la xifra de les desenes
$z =$ la xifra de les unitats.

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x = y+2z \\ 100z+10y+x = 100x+10y+z-297 \end{cases}$$

$\boxed{x}\ \boxed{y}\ \boxed{z}$ ordre original
El nombre és $100x+10y+z$
$\boxed{z}\ \boxed{y}\ \boxed{x}$ ordre invertit
El nombre és
$100z+10y+x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ -99x \quad +99z=-297 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ -x \quad +z=-3 \end{cases}$$

Resolem aquest sistema per la regla de Cramer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1+2\cancel{-1}\cancel{-1} = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-7+6-3}{-1} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{14-3-7-6}{-1} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3-7+3}{-1} = 1$$

El nombre és
421