

Apunts d'ESPA de Matemàtiques

EXERCICIS PROCEDIMENTALS I ALGUNS APUNTS
TEÒRICS DE MATEMÀTIQUES PER A LES CLASSES
DE L'EDUCACIÓ SECUNDÀRIA PER A PERSONES
ADULTES (ESPA) DE LES ILLES BALEARS

Xavier Bordoy



Quant a l'autor

Xavier Bordoy
Professor de Matemàtiques de Secundària
CEPA Camp Rodó (Palma, Illes Balears)
Correu electrònic: somenxavier@posteo.net

Drets d'autor

© 2021 Xavier Bordoy. Tots els drets reservats. Llevat que s'hi indiqui el contrari (vegeu la pàgina [ii](#)), aquesta obra està subjecta a la llicència “Reconeixement 4.0 Internacional de Creative Commons” (CC-BY 4.0). Per veure una còpia de la llicència, visiteu <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

Això vol dir, *essencialment*, que podeu copiar, modificar i distribuir qualsevol part de l'obra com vulgueu, sempre que en citeu la font de manera explícita, d'acord amb els termes de la llicència.



Personalment consider que és un honor que useu, copieu o distribuïu aquesta obra, o alguns fragments, per les finalitats que considereu oportunes. M'agradaria que m'ho comunicassiu si així ho féssiu i, en aquest cas, estaria particularment orgullós d'haver aportat el meu gra d'arena per fer un material que altres persones consideren útil.

Informació del document

Mathematics Subject Classification (2020): 00-01, 00A06, 00A07

La versió d'aquest document és la [0.1.dev.2021-05-14](#)¹. Està compilat amb els modes següents:
espa4.

Aquest document ha estat generat, divendres 14 maig 2021 a les 10:57, usant programari lliure (CONTEXT versió 20200310 MKIV, lUATEX versió 1.12 i PGF/TikZ) sota un entorn GNU/Linux. La revisió d'aquest document és la número 7. El conjunt de les versions s'administra amb [git](#).

El document ha estat mecanografiat. Encara que s'hagi revisat diverses vegades és possible que hi hagi errors — el més probable de tipus tipogràfic o gramatical. Si en detecteu algun, si us plau, aviseu-me per correu electrònic. D'altra banda, si adapteu o modifiqueu aquesta obra i considereu que el canvi ha estat per millorar-la, us agrairia que m'ho comunicués i, si el canvi és del meu gust, l'incorporaré a l'obra original en els mateixos termes de la llicència.

¹ <https://repo.or.cz/apunts-espa-matematiques.git>

Continguts aliens

Els continguts següents no són d'el·laboració pròpia i com a tals es distribueixen amb les seves corresponents llicències i autories. L'ús dels materials aliens es realitza acollint-se al dret de cita de l'article 32.2 de la Llei de Propietat Intel·lectual (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 d'abril de 1996. [Entrada 8930](#) del BOE 97, de 22 d'abril de 1996) i del *Fair Use* de la Legislació dels Estats Units d'Amèrica (vegi's https://en.wikipedia.org/wiki/Fair_use) per a fins docents.

- Exercicis 7 i 8 del document “Posició de nombres enters” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Concepte de nombre enter). © Anònim 2005 CC-BY-NC-SA. toomates.net
- Exercicis de l'*a* al *g* del document “Suma i resta de nombres enters sense cancel·lació de signes” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Suma i resta de nombres enters sense cancel·lació de signes). © Gerard Romo Garrido 2006 CC-BY-NC-SA. toomates.net
- Exercicis del document “Multiplicació i divisió de nombres enters” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Multiplicació i divisió de nombres enters). © Pilar Compte 2007 CC-BY-NC-SA. toomates.net
- Exercicis del document “Operacions combinades amb nombres enters” (camí: Recursos → Nombres → Nombres enters → Operacions combinades amb nombres enters). © Anònim 2007 CC-BY-NC-SA. toomates.net
- L'exercici ?? correspon a l'exercici 23 del document *Proporcionalitat*. © 2008 IES Llobregat, Joan Carles Sampera Bonet. El material es distribueix sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada” (CC BY-NC-SA 3.0). Disponible a www.toomates.net/Llistes/a2008/nov/materials_sampera/Proporcionalitat.doc
- Als exercicis ?? i ??, s'han utilitzat els [mapes de Google](#). © 2010 Google.
- Als exercicis ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, 6, 7 i ?? s'han utilitzat els mapes de l'OpenStreetMap.org amb els mosaic de l'[equip Humanitari](#), que estan llicenciats sota [ODbL](#) i [CC-BY-SA 2.0](#). © 2014 Col·laboradors d'OpenStreetMap.
- Als exercicis ??, ?? i ?? s'ha utilitzat el servei de [Project OSRM](#) © 2014 Project OSRM.

- Els exercicis ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ?? i ?? són adaptacions o reproduccions de materials de toomates.net:
 - Dossier “Semblança, girs i translacions” (camí: Recursos → Geometria → Figures geomètriques en el pla → Semblança). © Joan Carles Sampera Bonet 2008 CC-BY-NC-SA.
 - Document “6 exercicis amb el Teorema de Tales” (camí: Recursos → Geometria → Figures geomètriques en el pla → Teorema de Tales). © Toomates.net 2005 CC-BY-NC-SA.
 - Document “Teorema de Tales (I)” (camí: Recursos → Geometria → Figures geomètriques en el pla → Teorema de Tales). © Toomates.net 2005 CC-BY-NC-SA.
- A l'exercici ??, s'ha usat del programa [Marble Virtual Globe](http://MarbleVirtualGlobe.com) (versió 1.8.20), el qual es distribueix sota llicència GNU LGPL 2, amb la capa *Moon Elevation* que es renderitza a partir de les dades de la NASA/SDIO i la USGS Astrogeology Research Program, les quals estan en el domini públic. 2008.
- A l'exercici ??, s'ha usat la imatge [718smiley.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:718smiley.svg), de Wikimedia Commons, que es distribueix sota llicència CC-BY-SA 3.0. © 2008 Wikimedia Commons.
- A la secció “”, s'han usat les imatges “[The Leaning Tower of Pisa SB.jpeg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Leaning_Tower_of_Pisa_SB.jpeg)” CC-BY-SA 3.0 (© 2013 W. Lloyd MacKenzie i Wikimedia Foundation), l'arxiu “[Protactor Rapporteur Degrees V3](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Protactor_Rapporteur_Degrees_V3)” CC0 1.0 (© 2011 Wikimedia Foundation). Aquesta secció està fortament inspirada en la [fitxa 25](#) de n'Anton Aubanell.
- A la secció “” per a l'elaboració dels exercicis ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ?? i ?? s'han usat els exercicis de na Margalida Garcias *ESPA 2 Matemàtiques*. Editorial Talaiot. Palma, 2012. Distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 a partir dels materials del programa *Educación Digital A Distancia* de Luis Barrios Calmaestra, Andrés Cassinello Espinosa, Juan Jesús Cañas Escamilla, José R. Galo Sánchez, Miguel Martín Cano, Carmel Ramírez García, Francisco J. Rodríguez Villanego i Consolación Ruíz Gil (traducció: Sergi del Moral Carmona i Zoila Pena i Terrén) també distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 Espanya.
- Els exercicis ??, ??, ?? i ?? estan extrets del llibre de text d'en Daniel Santos, Pilar García, Carmen Vázquez, Antonio Nevot, José Gil, Andrés Nortés Checa *Matemàtiques 4t Curs*. Editorial Santillana. © 1996.

- Les pàgines “”, “”, “”, “”, “”, “”, “”, “” i “” (pàgines de ?? a ??) s’han extret del llibre de na Margalida Garcias *ESPA 2 Matemàtiques*. Editorial Talaiot. Palma, 2012. Distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 a partir dels materials del programa *Educación Digital A Distancia* de Luis Barrios Calmaestra, Andrés Cassinello Espinosa, Juan Jesús Cañas Escamilla, José R. Galo Sánchez, Miguel Martín Cano, Carmel Ramírez García, Francisco J. Rodríguez Villanego i Consolación Ruíz Gil (traducció: Sergi del Moral Carmona i Zoila Pena i Terrén) també distribuït sota llicència CC-BY-NC-SA 3.0 Espanya.
- L’exercici ?? està fortament inspirat en la reflexió de n’Ewan Weinberg. “An Easy Transformation”. © 2015 Ewan Weinberg. Disponible a <http://evanweinberg.com/2015/10/16/an-easy-transformation/>.
- L’exercici ?? està inspirat en “A12 Fencing” de MathShell, disponible a <http://map.mathshell.org/materials/tasks.php?taskid=369>. © 2012 The MAP Summative Assessment Tasks. El material està disponible sota llicència “Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0 No adaptada” (CC-BY-NC-ND 3.0).
- L’exercici ?? està extret de l’entrada “Real-World Math That Isn’t Real To Students” del blog d’en Dan Meyer, disponible a <http://blog.mrmeyer.com/2013/real-world-math-that-isnt-real-to-students/>. © Dan Meyer. El material es distribuïa sota la llicència “Reconeixement 3.0 Estats Units d’Amèrica” (CC BY 3.0 US). Ara es distribueix sota la llicència “Reconeixement 4.0 Internacional” (CC-BY 4.0).
- L’exercici ?? està extret de l’exercici 12 del tema “Funciones y gráficas” del llibre “Llibre de text de 3r d’ESO” (pàgina 227). Editorial Anaya que es pot consultar a la pàgina del [departament de Matemàtiques de l’IES Arroyo](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/matematicas.htm), disponible a <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/matematicas.htm>. © Anaya.
- A l’exercici 25, la imatge del tanc (figura 6) s’ha extreta de la [plana web](http://www.geograph.org.uk/more.php?id=3633065) del Neil Theasby (<http://www.geograph.org.uk/more.php?id=3633065>). La imatge es titula “Old fuel tank on abandoned military camp” i es distribueix sota llicència “Creative Commons Reconeixement. CompartirIgual 2.0” (CC-BY-SA 2.0)
- Els exercicis ?? està extret de la pàgina de *Math is Fun* (<http://www.mathsisfun.com/algebra/quadratic-equation-real-world.html>). © Math is Fun 2014.

- Als exercicis ??, ??, ?? i ??, la idea i els continguts estan extrets de *Llibre de text de 3r d'ESO*. Tema “Funciones y gráficas”. Ed. Anaya. Exercicis 1, 2, 4, 5, 12, 15, 14, respectivament. Pàgines 225-228. IES Arroyo. Dpt. Matemàtiques ([Averroes](#)).
- L'exercici 56 està adaptat a partir de l'exercici “Favorables i possibles” (quadre 15, pàgina 206) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006
- L'exercici 48 està adaptat a partir de l'exercici “Practica els complementaris” (pàgina 208) del llibre *Ensenyar matemàtiques* de Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep Maria Fortuny, Joaquim Giménez i Montserrat Torra. Editorial Graó. © 2006.
- Els exercicis 42, 43, 45, 46, 59, 61, 62, 63, 64 i 65 estan extrets del llibret *Curs de preparació per a la prova d'accés a cicles formatius de grau superior* de n'Àlicia Espuig Bermell. © Àlicia Espuig Bermell 2009, distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada” ([CC-BY-NC-SA 3.0](#))
- Els exercicis 35, 36, 37, 38 i 39 estan extrets del llibre electrònic “Matemàtiques 4t Opció B” de la col·lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil. Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya” ([CC-BY-NC-SA 3.0 ES](#))
- L'exercici 69 s'ha extret del llibre electrònic “Matemàtiques 4t Opció A” de la col·lecció *Educación Digital a Distancia*. © 2011 José Luis Alonso Borrego, Luis Barrios Calmaestra, Miguel Ángel Cabezón Ochoa, José Ireno Fernández Rubio, María José García Cebrián, Consolación Ruiz Gil. Traducció: Sergi del Moral Carmona, Zoila Pena i Terrén i Incyta Multilanguage, SL. Distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Espanya” ([CC-BY-NC-SA 3.0 ES](#))
- Els exercicis 71, 72, 74, 49, 50, 51, 52, 53, 54 i 55 s'han extret del web [toomates.net](#) distribuïts sota llicència “Creative Commons de Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada” ([CC-BY-NC-SA 3.0](#)). © 2007-2009 Gerard Romo, Joan Carles Sampera Bonet, Oriol Olivé i Ana Rodríguez.

- Les imatges dels exercicis 57 i 58 s’han pres de la tasca 595 de MathShell *Representing Data Using Grouped Frequency Graphs and Box Plots*. © 2014 MARS, Shell Center, University of Nottingham. Distribuïda sota llicència “Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada 3.0 No adaptada” (CC-BY-NC-ND 3.0).
- El codi font de la figura ?? és una obra derivada de la figura “Example: Cuboid in a 2 vanishing points perspective” (<http://www.texample.net/tikz/examples/cuboid/>). © Florian Lesaint. Distribuït sota llicència “Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional” (CC-BY 4.0).
- Els exercicis 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83 i 84 són de “Apunts de Matemàtiques per a l’Accés a la UIB per a majors de 25 anys” de Xavier Bordoy i Xisco Sebastià, els quals es distribueixen sota llicència “Creative Commons Reconeixement 4.0 Internacional” (CC-BY 4.0).

1 Potències de base 10. Notació científica

Exercici 1. Escriviu en notació científica els nombres següents:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| a. $42,5 \cdot 10^{-3}$ | i. 0,00000257 |
| b. $0,505 \cdot 10^4$ | j. $0,0000453 \cdot 10^{-13}$ |
| c. $0,0055 \cdot 10^{-3}$ | k. $6,023 \cdot 10^{23}$ |
| d. 59809,2 | l. 13700 milions |
| e. $498,93 \cdot 10^2$ | m. 10^{-35} |
| f. $5345,3 \cdot 10^{-4}$ | n. $52 \cdot 10^3$ |
| g. 0,5 | o. $45 \cdot 10^4$ |
| h. -235,58 | |

Exercici 2. Escriviu amb totes les xifres els nombres que corresponen a les notacions següents i indiqueu si es tracte de notacions científiques o no:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a. $2,3 \cdot 10^3$ | g. $8 \cdot 10^9$ |
| b. $0,3 \cdot 10^{-4}$ | h. 10^4 |
| c. $5,456 \cdot 10^{-4}$ | i. $-1,3 \cdot 10^{10}$ |
| d. $54,2 \cdot 10^3$ | j. 5 |
| e. 10^{-43} | k. $5,6 \cdot 10^{-36}$ |
| f. 1^3 | l. $780,89 \cdot 10^{-4}$ |

Exercici 3. Calculeu:

- | | |
|---|---|
| a. $2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3$ | e. $8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^2$ |
| b. $6 \cdot 10^4 : (2 \cdot 10^3)$ | f. $(4 \cdot 10^2) : (3 \cdot 10^2)^2$ |
| c. $(5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2) : 10^2$ | g. $8 \cdot 10^4 : (2 \cdot 10^3)$ |
| d. $(3 \cdot 10^4)^2$ | |

Exercici 4. Expresses en notació científica i calculeu el resultat:

a.

$$\frac{0,00054 \cdot 12.000.000}{250.000 \cdot 0,00002}$$

b.

$$\frac{1.320.000 \cdot 25.000}{0,000002 \cdot 0,0001}$$

c.

$$\frac{0,00005 : 0,000004}{125.000 \cdot 800.000}$$

d.

$$0,00005 \cdot \frac{124.000 \cdot 40.000}{60.000 \cdot 0,00003} : 0,000002$$

Exercici 5. Sabem que la llargària d'aquesta casa és de 15 metres (figura 1). Podeu calcular la superfície dels dormitoris?



Figura 1 Plànol d'un pis

Exercici 6. (Central Park) Una empresa immobiliària proposa a l'ajuntament de Nova York requalificar Central Park (figura 2) com a zona edificable i vendre-la-li a canvi de 1000 milions de dòlars. Acceptaríeu la proposta? Podeu suposar que el **preu de venda del metre quadrat** és de 22.000 €/m² i que podeu fer 10 pisos d'alçada [1].

Exercici 7. Durant l'estiu el golf de Son Quint (figura 3) ha patit una seriosa sequera i s'han dessecat els llacs artificials, de 10 metres de profunditat. A l'hivern els responsables del golf decideixen tornar a omplir-los. Quina quantitat d'aigua necessiten?

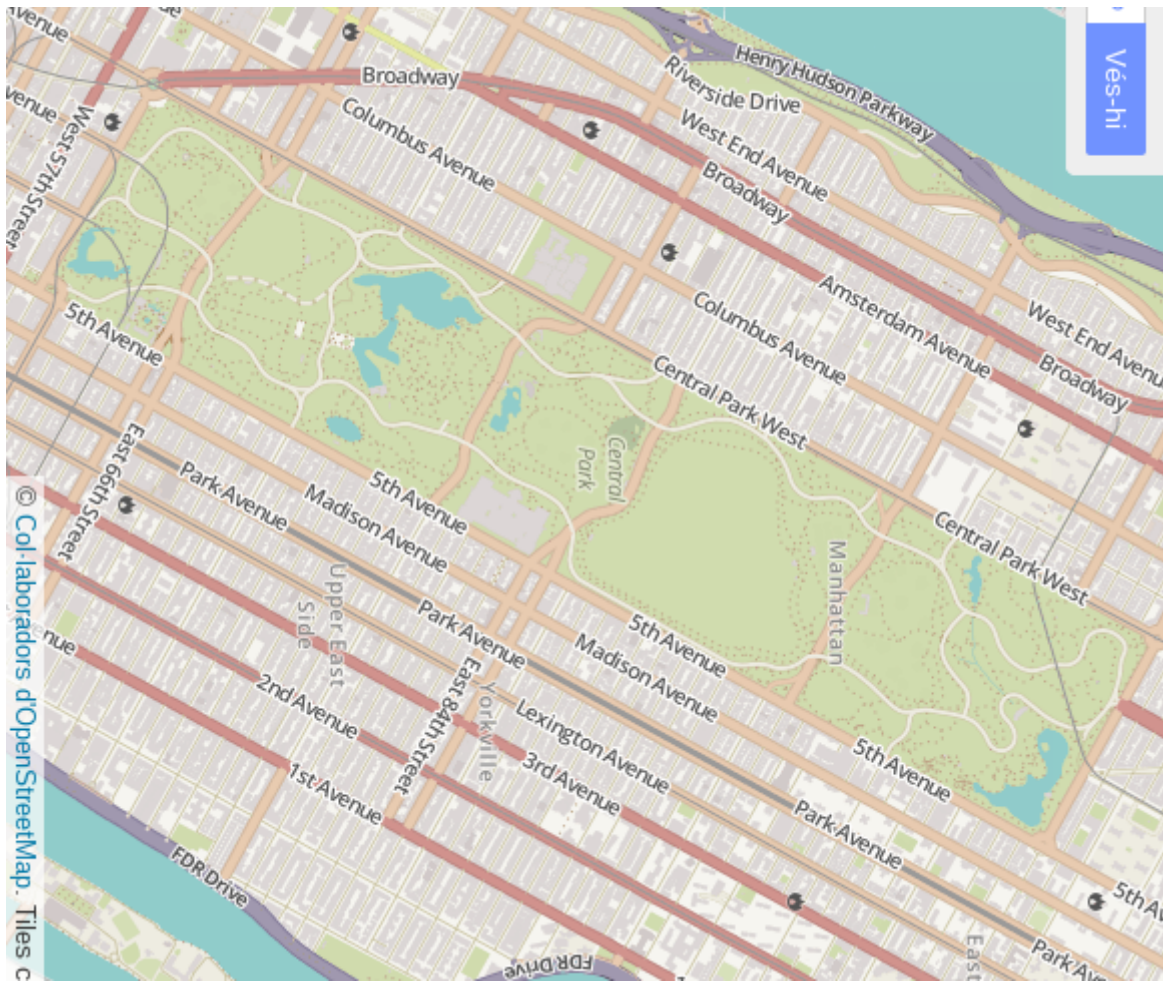


Figura 2 Plànol de Central Park, Manhattan, Nova York. Escala 1:25.000



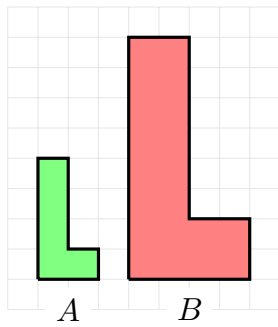
Figura 3 Plànol del Golf de Son Quint. Escala 1:7.000

1. Exercici ??: L'escala és 1:106.382
-

Exercici 8. Els costats d'un triangle fan 18, 24 i 32 cm, respectivament. Trobeu els costats d'un altre triangle semblant sabent que el més petit fa 24 cm.

Exercici 9. Quant faran els costats i el perímetre d'un triangle semblant a un altre de costats 36, 42 i 54 mm, respectivament, si la raó de semblança és de 5?

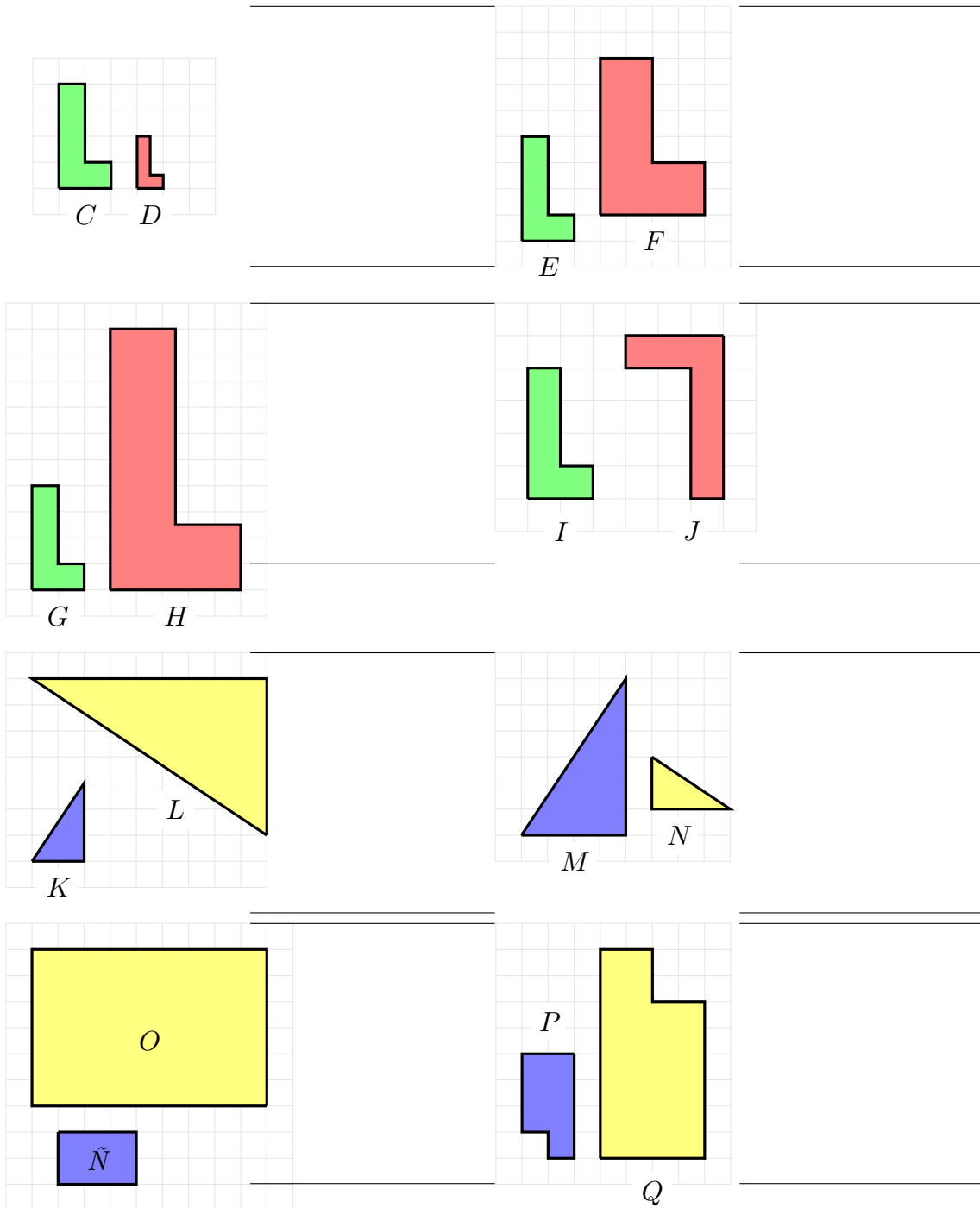
Exercici 10. Quins parells de figures són semblants? Per què?



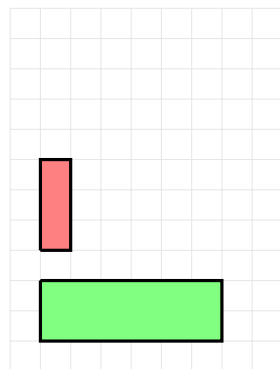
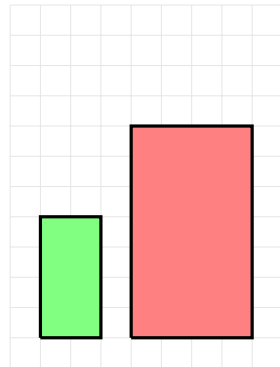
$$\text{raó de l'amplada} = \frac{\text{amplada de } B}{\text{amplada de } A} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{raó de l'altura} = \frac{\text{altura de } B}{\text{altura de } A} = \frac{8}{4} = 2$$

SÓN IGUALS \Rightarrow SÓN
SEMBLANTS $\Rightarrow A \cong B$



Exercici 11. Modifiqueu els rectangles següents per a què siguin semblants



Exercici 12. Calculeu les dimensions d'un rectangle la diagonal del qual fa 75 cm si és semblant a un altre rectangle els costats del qual fan 36 i 48 m.

Exercici 13. Indiqueu si són semblants dos triangles amb les mesures següents: els costats de l'un fan 10 cm, 7 cm i 6 cm, i els de l'altre, 20 cm, 14 cm i 32 cm.

2 Pla cartesià

Exercici 14. (a.) Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 4)$, $B = (4, 1)$, $C = (-5, 2)$, $D = (-3, -1)$, $E = (6, -3)$, $F = (0, 2)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades, i (b.) digueu a quin quadrant pertanyen.

Exercici 15. Escriviu les coordenades dels punts següents (figura 4):

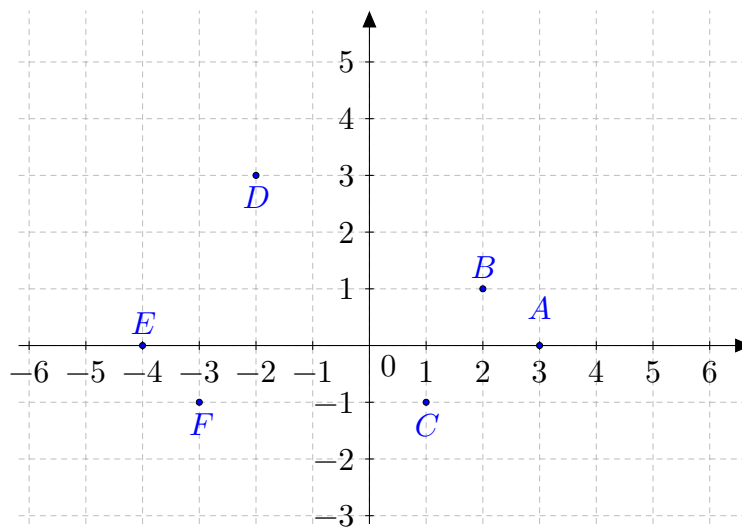


Figura 4 Punts al pla cartesià

Exercici 16. Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (1, 1)$, $D = (2, 2)$, $E = (-1, 2)$, $F = (1, -2)$, $G = (0, 2)$, $H = (1, 0)$, $I = (0, 0)$, $F = (-2, -3)$. Digueu a quin quadrant pertanyen

Exercici 17. Quines coordenades tenen els punts següents (figura 5):

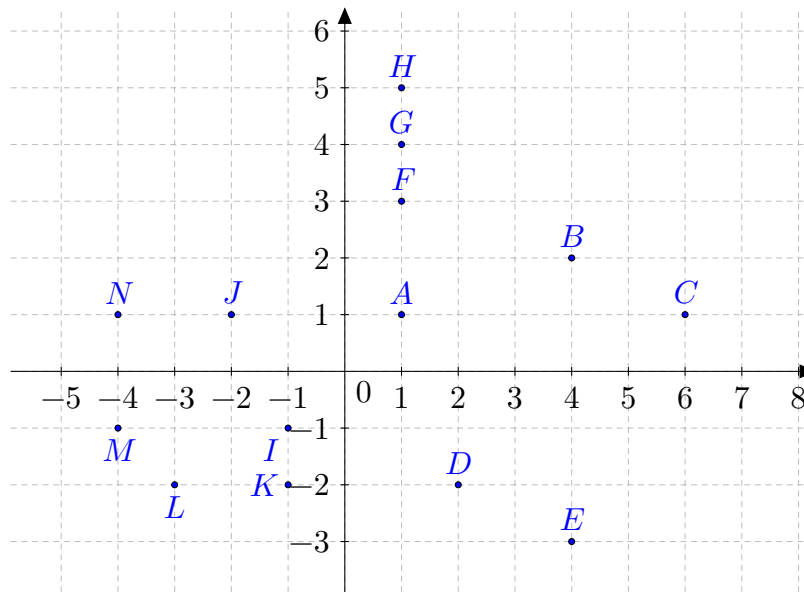


Figura 5 Punts al pla cartesià

Digueu a quin quadrant pertanyen

Exercici 18. Representeu al pla cartesià els punts següents i digueu a quin quadrant pertanyen: $A = (5, 6)$, $B = (-3, 4)$, $C = (7, -3)$, $D = (-1, -5)$, $E = (0, -2)$, i $F =$ origen de coordenades.

Exercici 19. Representeu al pla cartesià els punts següents: $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (-3, 2)$, $D = (-4, -1)$, $E = (2, -3)$, $F = (0, 3)$, $G = (-2, 0)$, $H =$ origen de coordenades. Digueu a quin quadrant pertanyen els punts anteriors.

Exercici 20. Trobau cinc punts de manera que la coordenada de la y sigui el doble que la coordenada de la x . A quina forma donen lloc? És casualitat?

Exercici 21. Podeu trobar un punt que pertanyin a un sol quadrant? Un altre punt que pertanyi a dos quadrants? I a tres quadrants? Per què?

3 Model quadràtic

3.1 Aplicació de la fórmula de segon grau

Exercici 22. (Dipòsit d'aigua) Es vol construir un dipòsit en forma de prisme de base quadrada. Per motius legals, no es pot fer el dipòsit amb una altura major que 10 m. (a.) Quina hauria de ser el costat de la base si es vol que el seu volum sigui de 1000 m^3 ? (b.) Si al final es construeix un dipòsit de 4 m d'amplària, quin serà el seu volum?

Exercici 23. (El safareig) Es vol construir un safareig. Per falta d'espai, no el podem fer més llarg que 5 metres. D'altra banda, per qüestions estètiques, volem que l'alçada faci un metre més que d'amplada. Amb aquestes restriccions, quin volum tendria el safareig si fes 1 metre d'amplada? Quina capacitat tendria?

Si volem que el safareig tengui una capacitat de 43.750 l, quines han de ser les seves dimensions?

Exercici 24. Un cub i una esfera tenen l'aresta i el radi iguals. Si sabem que l'àrea de l'esfera és de 400 m^2 , què val l'àrea del cub?

Exercici 25. (El tanc de combustible) Es vol pintar un tanc de combustible amb una pintura anticorrosiva (figura 6).



Figura 6 Tanc de combustible

- Quina quantitat de pintura necessitarem?
- Quin diàmetre hauria de tenir el dipòsit si volguéssim gastar 10.000 litres de pintura?

Dades necessàries: (a.) El diàmetre del dipòsit és de 5 m (b.) La seva alçada és de 10 m.

Exercici 26. (Les piràmides egípcies) La **piràmide de Keops**, de base quadrada, té una altura de 146 metres i el costat de la seva base és de 230 m.

- Si la omplíssim d'aigua, quina quantitat d'aigua hi cabria?
- Quina quantitat de pintura necessitaríem per pintar-la?
- En quants de metres hauríem d'acursar la piràmide per a què tengués un volum de 1000 m^3 ?

3.1.1 Caiguda lliure

La caiguda lliure consisteix en deixar anar un objecte des d'una altura determinada fins que toqui el terra. Aquest objecte només està sotmès a la força de la gravetat. Es suposa que la resistència a l'aire és nul·la.

Es suposa que l'origen de coordenades està enterra. Si deixem anar un objecte des d'una altura inicial h , la fórmula que relaciona l'altura que té l'objecte en funció del temps és:

$$s = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

on $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Exercici 27. Quants de segons tardarà a tocar el terra un cos que es llança des d'una altura de 20 metres? A quina alçada es trobarà el cos al cap de 2 segons?

Exercici 28. Calculeu quan tocarà el terra una bomba que es llanci des d'una distància de 1000 metres?

Exercici 29. Un paracaigudista es llança des de 5000 metres d'alçada. Si ha d'ejectar el paracaigudes als 1500 metres, a quina alçada es trobarà en aquest moment? Quant de temps tardarà a arribar a aquesta alçada?

3.1.2 Distància de frenada

La distància de frenada és la distància que recorre un vehicle fins que s'atura si inicialment anava a una certa velocitat v . Aquesta distància es pot calcular amb la fórmula:

$$d = \frac{v^2}{100},$$

on la distància resultant d serà en metres i la velocitat v estarà expressada en km/h .

En aquesta fórmula es suposa que la via on circula el vehicle no té inclinació, és a dir, que el vehicle circula per un terreny totalment horitzontal. També es suposa que el temps de reacció és instantani i que l'adherència és òptima.

La fórmula anterior es pot reescriure com

$$d = \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Això suposa una regla pràctica: dividir la velocitat a la que anam entre deu i fer el seu quadrat.

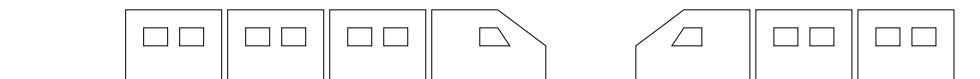
D'aquesta manera, tendríem que si anàssim a 42 km/h, aleshores hauríem de deixar, aproximadament, $4 \cdot 4 = 16$ m de distància de seguretat. Si anàssim a 100 km/h, aleshores n'hauríem de deixar $10 \cdot 10 = 100$ m.

Exercici 30. Calculeu la distància de frenada d'un cotxe que viatja a 80 km/h

Exercici 31. Si un cotxe va a 120 km/h quina distància necessita per frenar en sec? Tendrà temps d'evitar un accident que es troba a 100 metres?

Exercici 32. Un motorista va a 50 km/h. A 20 metres de distància, el semàfor es posa en groc. Si frena en sec, s'aturarà abans o després del semàfor?

Exercici 33. Xocaran aquests dos trens?



Sabem que el primer va a 20 km/h i el segon a 10 km/h i que la distància que els separa en el moment que tots dos frenen és de 200 metres.

[espa3a]

4 Àlgebra de successos

Exercici 34. Es llancen dos daus i es multiplica el nombre de punts obtinguts en cadascun.

- Quants de resultats es poden obtenir?
- Descriu l'espai mostral.
- Escriu dos esdeveniments que siguin elementals i dos que siguin compostos

Exercici 35. Tenim un dau de 4 cares numerades de l'1 al 4. El tirem una vegada. Escriuiu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles esdeveniments classificats pel seu nombre d'elements.

Exercici 36. Tenim un dau de 6 cares blanc, en el qual s'han escrit a les cares les lletres següents: A, A, A, B, B, C . Escriuiu tots els esdeveniments possibles.

Exercici 37. Determineu el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 48

- Amb numeració inferior a 4
- De bastos i més gran que 4
- Figures d'oros o bastos

Si aquests conjunts de cartes són, respectivament, A, B i C , calculeu (a.) $A \cup B$, (b.) $A \cap B$, (c.) $A \setminus B$, (d.) $B \setminus A$, (e.) A^c , (f.) B^c i (g.) C^c .

Exercici 38. En una baralla espanyola, enumereu i compteu les cartes dels esdeveniments:

- | | |
|----------------|-------------------|
| a. Oros i sets | d. Figures |
| b. Oros o sets | e. Oros o figures |
| c. Set d'oros | f. Oros i figures |

Feis la intersecció, la unió i la diferència del primer amb els altres esdeveniments. I trobeu el contrari de cadascun d'ells.

Exercici 39. Per a un dau de sis cares, escriuiu els esdeveniments: (a.) obtenir parell, (b.) obtenir senar, (c.) obtenir parell i major que 3, (d.) obtenir parell o major que 3, (e.) obtenir parell però que no sigui major que 3, (f.) obtenir el contrari de parell i major que 3. Calculeu els seus successos complementaris i feis la unió, la intersecció i la diferència d'aquests esdeveniments de manera que, com a màxim, calculeu set operacions diferents.

Exercici 40. Es llança una ruleta de 12 costats, numerats de l'1 al 12, i s'observa el resultat obtingut.

- a. Trobeu l'espai mostral.
- b. Escriviu com a conjunts els esdeveniments següents:
 - $A =$ “obtenir un nombre parell” – $E =$ “obtenir un nombre major que 4”
 - $B =$ “obtenir un nombre senar” – $F =$ “obtenir un nombre menor que 6”
 - $C =$ “obtenir un múltiple de 3” – $G =$ “obtenir un múltiple de 3 i 4”
 - $D =$ “obtenir un múltiple de 5”
- c. Calculeu els seus esdeveniments contraris.
- d. Trobeu la unió, la intersecció i la diferència d' A amb cadascun dels altres esdeveniments.
- e. Assenyaleu un parell d'esdeveniments incompatibles entre si. Justifiqueu la resposta.

Exercici 41. Digueu quins d'aquests successos són successos impossibles i quins són successos segurs (n'hi ha que no són ni segurs ni impossibles):

- a. la suma del resultat de dos daus és 1
- b. llancem tres monedes i surten una cara i dues creus
- c. agafem una fitxa de dòmino a l'atzar i la suma de punts és més gran de 1
- d. llancem dues monedes i el nombre de cares menys el nombre de creus és més petit o igual a dos
- e. llancem dos daus i la resta de punts és 6
- f. llancem un dau de 8 cares i el resultat es més petit que 10
- g. llancem 10 monedes i obtenim 10 cares més que creus
- h. llancem dos daus i la multiplicació dels punts és múltiple de 7
- i. en el sorteig de la primitiva surt premiat el número 65478
- j. llancem dos daus i la multiplicació dels dos números es menor de 40

5 Experiments simples

Exercici 42. En l'experiment consistent a llançar un dau cúbic i observar-ne la puntuació, considerem els esdeveniments següents:

- A. "Obtenir un múltiple de 3" C. "Obtenir un nombre senar"
B. "Obtenir un divisor de 4" D. "Obtenir un nombre menor que 5"

Calculeu:

- a. $p(A)$ c. $p(C)$ e. $p(A \cup C)$ g. $p(A \cap B)$
b. $p(B)$ d. $p(D)$ f. $p(A \cap C)$ h. $p(A^c)$

Exercici 43. En l'experiment consistent a treure una carta d'una baralla espanyola de 48 cartes, calculeu la probabilitat que sigui:

- a. Sota c. Copa i oros e. Figura o espasa
b. Copa o oros d. Figura i espasa f. Cavall o espasa

Exercici 44. En una bossa hi ha 5 bolles vermelles, 10 bolles negres i 5 bolles blaves. En treiem una i miram de quin color és. Calculeu la probabilitat de:

- a. Treure una bolla vermella
b. Treure una bolla negra o blava
c. Treure una bolla que no sigui blava.

Exercici 45. En una rifa de mil nombres (del 000 al 999) es sorteja un viatge. Calculeu:

- a. La probabilitat de guanyar el premi si comprem cinc nombres
b. La probabilitat que el nombre premiat acabi en 5

Exercici 46. En una bossa hi ha deu boles numerades de l'1 al 10. Si extraiem una bola de la bossa, calculeu la probabilitat de:

- a. Treure un 7 d. Treure un múltiple de 5
b. Treure un nombre menor que 7 e. Treure un divisor de 6
c. Treure un nombre no inferior 7 f. Treure un nombre primer

Exercici 47. En una capsula hi ha vuit bolles numerades consecutivament com segueix: 2, 4, 6, ..., 16. Si diem $A =$ "treure un nombre menor o igual que 10" i $B =$ "treure un múltiple de 3":

- a. Escribeu els elements de A i de B
 b. Calculeu la probabilitat de:

- A – A^c – $A \cup B$
 – B – B^c – $A \cap B$

Exercici 48. (Pràctica dels complementaris) Completeu la taula següent:

Experiència	Esdeveniment	Probabilitat	Complementari	Probabilitat
Tirar un dau	Surt parell			
Tirar un dau	Surt un 6			
Tirar un dau	Surt un 3 o un 6			
Prendre una carta de póquer			Surt comodí	
Tirar una moneda			Surt cara	
		1/6		5/6
Triar dia de gener				30/31
Triar dia d'abril		1/2		
Triar una vocal		2/5		3/5
Prendre una carta de la baralla espanyola	Surt múltiple de tres			
Prendre una carta de la baralla espanyola		9/48		
		1/2		1/2
	Surt la Z			27/28
			Surt la X	

Exercici 49. (dòmino) En un joc de dòmino, s'estreu una fitxa a l'atzar. Trobeu la probabilitat de què (a.) la suma de punts sigui 6, (b.) almenys un dels dos nombres sigui un 4, (c.) la suma de punts sigui un múltiple de tres, (d.) la resta dels punts d'una banda i l'altre doni 6, (e.) la suma de punts sigui un nombre imparell

Exercici 50. (les lletres d'una paraula) Escrivim cada una de les lletres de la paraula "CAVALLERESCA" en un paper i les posem en una bossa. N'extraïem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què (a.) treure la lletra A , (b.) treure la lletra E , (c.) treure la lletra L , (d.) treure una vocal, (e.) treure una consonant.

Exercici 51. (el centre escolar) En un centre escolar hi ha 1000 alumnes repartits segons s'hi indica a la taula 7. Calculeu la probabilitat que si triem una persona a l'atzar, aquesta persona: (a.) sigui home, (b.) jugui a futbol, (c.) sigui home i jugui a bàsquet, (d.) sigui home que juga a bàsquet i futbol, (e.) sigui dona que juga a futbol però no a bàsquet .

Tret	Dones	Homes
Usen ulleres	146	135
No usen ulleres	368	351
Juguen a futbol	335	53
Juguen a bàsquet	229	169
No practiquen cap esport	97	298

Figura 7 Trets de les persones d'un centre escolar

Nota: potser podeu servir els diagrames de Venn.

Exercici 52. (l'urna) D'una bossa que conté 3 bolles blanques, 2 bolles vermelles i 4 bolles negres, en traiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat dels esdeveniments següents:

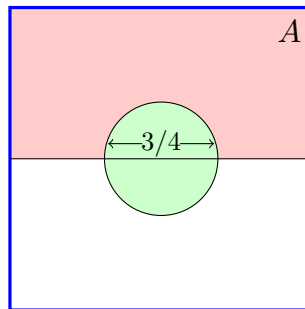
- Obtenir una bolla blanca.
- Obtenir una bolla vermella o negra.
- Obtenir una bolla que no sigui negra.

Exercici 53. (una altra urna) D'una bossa que conté 4 bolles blanques i 3 bolles verdes, en traiem una a l'atzar. Calculeu la probabilitat de què: (a.) es tregui una bolla blanca; (b.) es tregui una bolla vermella; (c.) no es tregui cap bolla

Exercici 54. (caramels) Tenim una bossa amb 23 caramels: 7 són de maduixa, 4 de menta i la resta de taronja. Calculeu la probabilitat de treure a l'atzar un caramel de taronja.

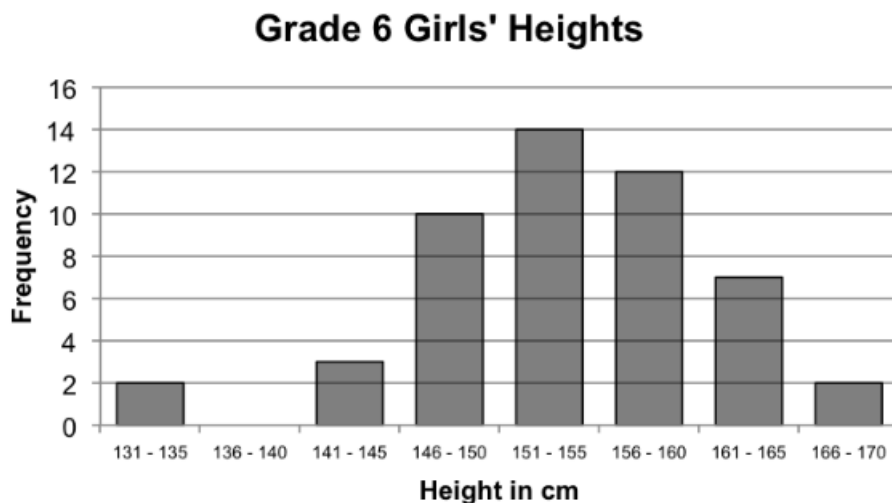
Exercici 55. (delegat i subdelegat) Una classe de 10 alumnes, on hi assiteix regularment n'Alícia, fan les votacions per a escollir delegat i subdelegat. Sabem que n'Alícia no és delegada (s'ha presentat voluntari una altra persona). Determineu la probabilitat de què sigui subdelegada (sabent que no hi pot haver acumulació de càrrecs).

Exercici 56. (Els altres paracaigudistes) Els paracaigudistes realitzen pràctiques d'aterratge en precisió: intenten aterrar al centre d'aquest camp de 1 km^2 . Quina probabilitat tenen d'encertar?



- Quina probabilitat hi ha de què no aterrin al centre?
- Quina probabilitat hi ha de què aterrin a l'àrea A (la regió nord del rectangle que no està inclosa dins el cercle)?

Exercici 57. (Les alçades de les noies de 6è) Aquesta gràfica mostra les freqüències de l'alçada d'un grup d'al·lotges de 6è de primària (figura 1). Totes les alçades han estat arrodonides al centímetre més pròxim (totes les qüestions estan referides a les alçades arrodonides, no a les exactes).

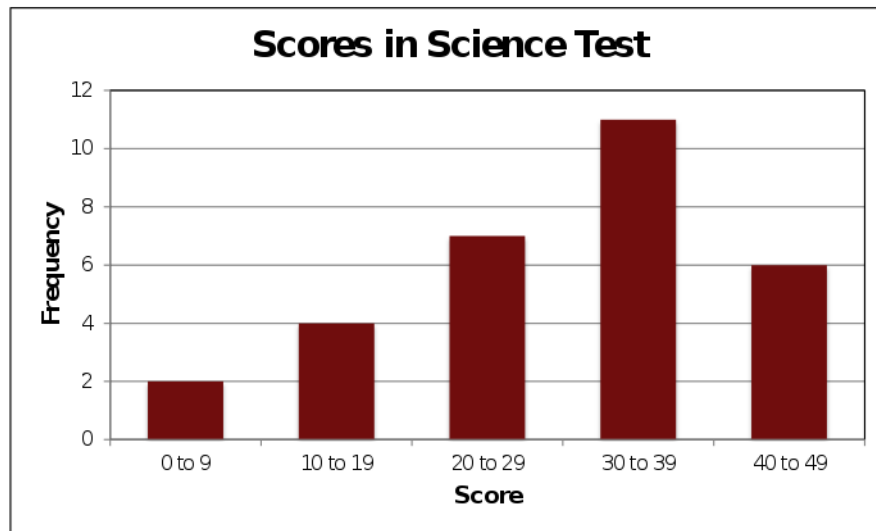


Taula 1 Alçades de les nines de 6è de primària

Quina probabilitat tenim que una al·lotja d'aquesta classe faci més que 1,50 m?

Exercici 58. (Els resultats del test) Aquesta gràfica mostra el nombre de preguntes correctes d'un test de 50 preguntes (figura 2).

Quina probabilitat tenim que una persona hagi tret un resultat major que 25?



Taula 2 Nombre d'encerts d'un test de 50 preguntes

6 Experiments compostos

Exercici 59. En una bossa hi ha dues boles blanques i tres de negres. Se n'extreuen dues sense devolució i se n'observa el color. Calculeu la probabilitat de què:

- Les dues boles siguin blanques
- Siguin de colors diferents
- Totes dues siguin del mateix color
- Almenys una sigui negra

Exercici 60. Tenim una urna amb tres bolles blaves i dues bolles verdes. Extreiem una bolla, *no* la tornem a l'urna i en tornem a extreure una altra.

- Quina és la probabilitat que les dues boles siguin blaves?
- I que siguin verdes?
- I que n'hi hagi una de cada color?

Exercici 61. En un concurs, a un participant que ha quedat eliminat se li dóna una última oportunitat. Amb els ulls embenats, ha de triar una de les urnes següents a les quals hi ha bolles blanques i bolles negres, i treure una bolla d'aquesta urna:

- L'urna 1 conté 3 bolles blanques i 4 bolles negres
- L'urna 2 conté 2 bolles blanques i 1 bolla negra

Treure una bolla blanca li permet continuar en el concurs. Quina és la probabilitat de què pugui continuar?

Exercici 62. Una de les proves d'unes oposicions consisteix a desenvolupar un tema dels setanta que componen el temari. El dia de la prova s'extreuen dues boles d'una bossa que conté setanta boles numerades de l'1 al 70. Els participants han de triar un dels dos temes corresponents a les boles que han sortit i desenvolupar-lo.

Si un participant ha estudiat 25 temes, quina és la probabilitat que almenys una de les dues boles que s'extreuen correspongui a un dels temes estudiats?

Exercici 63. S'extreuen dues cartes d'una baralla espanyola de 48 cartes sense devolució. Quina és la probabilitat que s'obtinguin dos reis?

Exercici 64. En una reunió hi ha quinze homes i vint dones. Sabem que hi ha cinc homes fumadors i quatre dones fumadores. Si triem una persona de la reunió a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui una dona fumadora?

Exercici 65. En un examen hi ha dues preguntes de tipus test amb quatre respostes possibles cadascuna, de les quals només una és correcta. Si triem les respostes

d'aquestes dues preguntes a l'atzar, quina probabilitat tenim d'encertar-les totes dues? I d'encertar-ne almenys una?

7 Probabilitat condicionada

Exercici 66. Un lladre a l'escapar de la policia ho pot fer pels carrers A , B o C amb probabilitats del 0,25, 0,6 i 0,15, respectivament. La probabilitat de ser agafat són de 0,4, 0,5 i 0,6 si intenta escapar pels carrers A , B i C respectivament.

- Trobeu la probabilitat de què la policia agafi el lladre
- Si el lladre finalment ha estat agafat, quina és la probabilitat de què ho hagi estat en el carrer A ?

Exercici 67. En una classe hi ha 40 persones, distribuïdes de la manera següent:

Sexe	Dretans	Esquerrans
Dona	15	4
Home	15	6

Calculeu les probabilitats següents:

- Una persona sigui al · lota
- Una persona sigui dretana
- Una al · lota sigui esquerrana
- Signi al · lot sabent que és esquerrà

Exercici 68. En una oficina, el 70% dels empleats són asturians. D'entre aquests, el 50% són homes, mentre que dels que no són asturians, només són homes un 20%.

- Quin percentatge d'empleats són asturians i dones?
- Calculeu la probabilitat de què un empleat de la oficina sigui dona
- Si en Fernando treballa a l'oficina, quina és la probabilitat de què sigui asturià?

Exercici 69. Un jugador de bàsquet acostuma a encertar el 80% dels seus tirs des del punt de llançament de personals. Si tira tres vegades:

- Calculeu la probabilitat de què encesti dues vegades
- Calculeu la probabilitat de què no encesta cap pic
- Sabent que ha encertat en el tercer tir, quina és la probabilitat de què hagi encertat en el segon tir?

Exercici 70. Una urna conté 4 bolles blanques, 1 de vermella i 5 de negres. Es considera l'experiment aleatori de treure dues bolles a l'atzar i anotar el color. Calcula les probabilitats:

- a. Que surti una bolla blanca i negra
- b. Que no surti una bolla vermella en cap cas
- c. Que la primera bolla sigui negra sabent que la segona és blanca

Exercici 71. En una classe de 4t d'ESO hi ha 8 al·lots i 12 al·lotes. Cinc al·lots i vuit al·lotes llegeixen habitualment el diari. Si triem a l'atzar un estudiant, calcula la probabilitat de què:

- a. Llegeixi el diari i sigui home
- b. No llegeixi el diari o sigui home
- c. Sigi home sabent que llegeix el diari
- d. Llegeixi el diari sabent que és home

Exercici 72. En una capsa de bombons hi ha 5 bombons amb un embolcall blanc i 15 amb un de negre. Hi ha dotze bombons, 2 blancs i 10 negres, que estan farcits de licor. Si treiem un bombó a l'atzar, calcula la probabilitat de què el bombó

- a. Tengui l'embolcall negre i sigui farcit
- b. Tengui l'embolcall blanc i no sigui farcit
- c. Tengui l'embolcall blanc sabent que és farcit
- d. Sigi farcit sabent que té l'embolcall negre.

Exercici 73. En una guarderia hi ha 10 nins i 12 nines. Si 6 nins saben caminar i 6 nines *no* en saben, calcula la probabilitat que, si triem una persona a l'atzar, sigui nin i no sàpiga caminar

Quina probabilitat hi ha de què sabent que no sap caminar, sigui nin?

Exercici 74. En un dinar, hi ha 28 homes i 32 dones. Han triat carn 16 homes i 20 dones i la resta ha triat peix. Si triem una persona a l'atzar, calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:

- a. Que sigui home
- b. Que hagi menjat peix
- c. Que sigui home i hagi menjat peix
- d. Que hagi menjat peix sabent que hem elegit un home

Exercici 75. A una classe d'ESPA assisteixen regularment a classe un 50% de les persones. D'aquestes, aproven Matemàtiques un 90%. Si no assisteixen regularment a classe només aproven 1 de cada 10 persones. Determineu

- a. la probabilitat de què aprovi Matemàtiques
- b. la probabilitat de què hagi assistit a classe sabent que ha aprovat

Exercici 76. Un restaurant té contractats a dos cambrers: Javier i Ana per atendre el servei del menjador. Ana posa el servei el 70% dels dies i es confon al col·locar els coberts només el 5% dels dies. Mentre, Javier col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.

- Aquest matí, l'encarregat del restaurant ha passat revista al servei. Quina és la probabilitat de què trobi algun servei mal col·locat?
- Per desgràcia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i vol trobar quina és la probabilitat de què hagi estat en Javier

Exercici 77. Certa persona compra tots els dies el diari local, comprant-lo indistintament en un de les botigues, A i B , que estan més pròximes a ca seva. El 80% dels dies el compra a la botiga A .

- Quina proporció dels dies compra el diari a la botiga B ?
- Quina probabilitat hi ha de què compri dos dies el diari a la botiga A ?
- Quina és la probabilitat de què dos dies consecutius compri el diari a dues botigues diferents?

Exercici 78. La probabilitat de què un aficionat al futbol vagi al camp municipal a veure un partit és del 90% quan es disputa en cap de setmana i el 50% si té lloc en un dia laborable. La probabilitat de què un partit es jugui en cap de setmana és la mateixa que se jugui entre setmana.

- Cert partit es celebrarà la setmana que ve en un dia encara sense determinar. Calculeu la probabilitat de què els aficionats vagin a veure'l al camp
- Si finalment un aficionat va anar a veure el partit, quina és la probabilitat de què aquest hagi estat en cap de setmana?

Exercici 79. En una capsa estan desats 20 rellotges, dels quals n'hi ha 15 que funcionen correctament.

- Si s'extreu un rellotge a l'atzar, quina és la probabilitat que funcioni bé?
- Si s'extreuen dos rellotges a l'atzar, quina és la probabilitat de què funcionin els dos correctament?
- Si el segon no funciona correctament, quina és la probabilitat de què el primer tampoc ho faci?

Exercici 80. El 25% de les famílies de certa comunitat autònoma espanyola no surt fora de la mateixa durant les vacances d'estiu. El 65% estiuja per la resta de l'estat i el 10% restant se'n va a l'extranger. Dels qui queden a la seva comunitat, només un 10% no usa cotxe en els desplaçaments. Aquesta quantitat augmenta al 30% entre els que surtin per la resta d'Espanya, i al 90% entre els que viatgen a l'extranger.

- a. Calculeu el percentatge de famílies d'aquesta comunitat que utilitza el cotxe en els seus desplaçaments d'estiu
- b. Una família no usa cotxe en les seves vacances d'estiu. Quina és la probabilitat de què surti de la comunitat movent-se per la resta d'Espanya?

Exercici 81. Un grup de 40 persones acabar de prendre un bus. D'aquests, només 10 són fumadors. Entre els fumadors, el 70% es mareja durant el viatge. I entre els qui no fumen, aquesta quantitat baixa al 40%.

- a. Quina probabilitat hi ha que dues persones siguin fumadores ambdues?
- b. Quina és la probabilitat de què un viatger no es maregi?

Exercici 82. Dos joves aficionats als jocs d'atzar es troben realitzant un solitari amb una baralla espanyola. Extreuen una carta de la baralla i volen saber quina és la probabilitat d'obtenir rei condicionat a què s'hagi tret figura

Exercici 83. En un país s'ha constituït una comissió parlamentària integrada per deu membres, dels quals set pertanyen al partit governant i la resta al partit de l'oposició. Entre els set membres del partit governant hi ha quatre homes; dos entre els del partit de l'oposició. El president de la comissió s'elegeix per sorteig entre els seus integrants. Celebrat el sorteig, es sap que el president triat ha estat un home. Quin partit té més possibilitats de dirigir la comissió?

Exercici 84. S'ha fet un estudi d'un nou tractament sobre 120 persones que pateixen certa enfermetat. Trenta d'elles ja han patit l'enfermetat amb anterioritat. Entre les persones que l'han patida anteriorment, el 80% ha reaccionat positivament al nou tractament. De les que no la han patida amb anterioritat, el percentatge de la reacció positiva ha estat del 90%.

- a. Si triem a l'atzar un pacient, quina és la probabilitat de què no reaccioni positivament al nou tractament?
- b. Si un pacient ha reaccionat positivament al tractament, quina és la probabilitat de què no hagi patit l'enfermetat amb anterioritat?

Apèndix A

Àrees i volums

A.1 Definicions geomètriques

1. Un *polígon* és una figura plana composta per un nombre finit de segments rectes que s'uneixen format una figura tancada. Els seus punts s'anomenen *vèrtexos* i els segments *costats*.
2. El *perímetre* d'un polígon és la suma de les longituds dels seus costats
3. Un *triangle* és un polígon que té tres costats.
4. Un *rectangle* és un polígon que té quatre costats que formen angles de 90° . Quan en un rectangle, tots els costats són iguals, aquests formen un *quadrat*
5. En general, un polígon de quatre costats s'anomena *quadrilàter*. Casos especials dels quadrilàter són el rectangle, el quadrat, el rombe, el romboide i el trapezi.
6. El *trapezi* és un quadrilàter que té un parell de costats paral·lels.
7. Un quadrilàter amb dos parells de costats paral·lels s'anomena *paral·lelogram*. Casos especials d'un paral·lelogram són el rombe, el romboide, el rectangle i el quadrat.
8. Un *rombe* és un paral·lelogram que té tots els costats iguals
9. Un *romboide* és un paral·lelogram tal que els costats oposats són paral·lels i els costats adjacents no són iguals i els angles no són rectes
10. Un rectangle és un paral·lelogram que té tots els angles rectes. El quadrat és el cas particular amb tots els costats iguals.
11. Quan tots els costats d'un polígon són iguals, aquest s'anomena *polígon regular*.
12. Segons el nombre de costats, el polígon pot ser un *pentàgon* (de cinc costats), un *hexàgon* (de sis costats), un *heptàgon* (de set costats), etc.
13. L'*apotema* d'un polígon regular és el segment que va des del centre del polígon a la meitat d'un costat
14. Un *cercle* és la porció de pla dels punts que estan a distància menor o igual que un nombre fixat, que s'anomena *radi*. La *circumferència* és la vora del cercle
15. Un *políedre* és un cos geomètric delimitat

per un nombre finit de cares poligonals. Les *arestes* són els costats dels polígons que el limiten. Els *vèrtexs* són els punts comuns a dues o més cares.

16. Un *prisma* és un políedre que té dues cares iguals i paral·leles (les *bases*) i cert nombre de cares laterals que són paral·lelograms (les *cares laterals*). Si les cares laterals no formen un angle de 90° amb les bases es parla de *prismes oblics*. Si les cares laterals són rectangles s'anomena *prisma rectangular*.

17. Una *piràmide* és un políedre que té per base un polígon i les seves cares laterals són triangles que tenen un vèrtex comú,

el qual s'anomena *vèrtex* de la piràmide.

18. Un *cilindre* és un cos de revolució que s'obté en girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats.

19. Un *con* és un cos de revolució que s'obté en girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets. El *costat* que va del seu vèrtex a la base (un cercle) s'anomena *generatriu*.

20. Una *esfera* és un cos de revolució que s'obté en girar un semicercle al voltant del seu diàmetre. Equivalentment són els punts de l'espai que estan a distància menor o igual que el radi d'aquest semicercle.

A.2 Àrees de les figures planes més usuals

Existeixen diversos tipus de figures planes. Les més usuals són les següents (figura A.1).

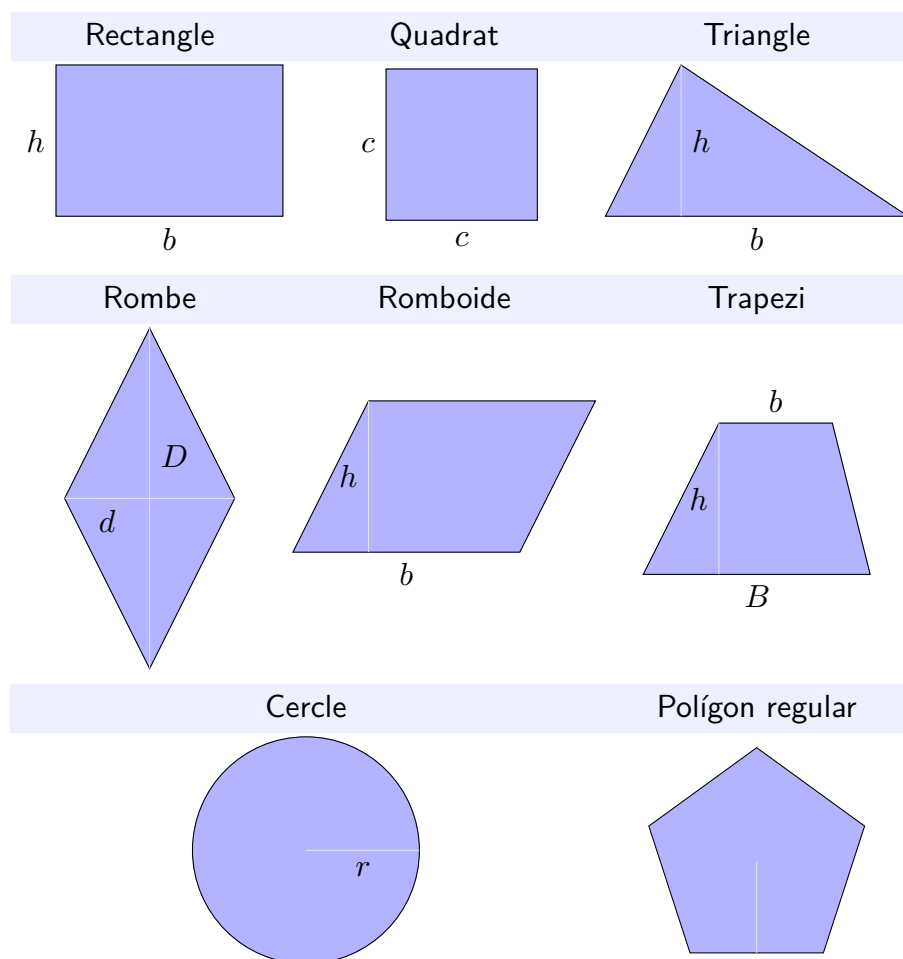


Figura A.1 Àrees de les figures planes més usuals

Les fórmules de les àrees d'aquestes figures són les següents (taula A.1).

Figura	Àrea	Figura	Àrea
Rectangle	$A = b \cdot h$	Quadrat	$A = c \cdot c = c^2$
Triangle	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	Rombe	$A = \frac{D \cdot d}{2}$

Taula A.1a Àrea de les figures més usuals

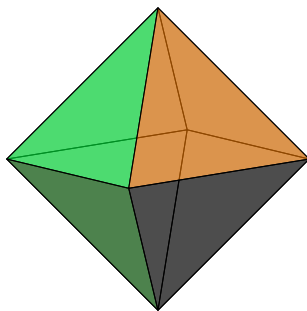
Romboide	$A = b \cdot h$	Trapezi	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Cercle	$A = \pi \cdot r^2$	Polígon regular	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

Taula A.1b Àrea de les figures més usuals

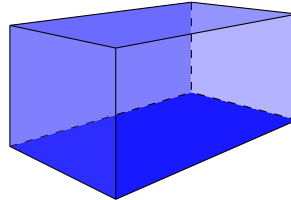
Nota 1. No fa falta saber la fórmula de totes les figures, ja que sempre es poden reduir a unions de rectangles i triangles. Ho podíeu demostrar? Podeu deduir les fórmules de cadascuna de les figures anteriors? Podeu usar tisores i cinta adhesiva.

A.3 Volums i àrees dels cossos geomètrics més usuals

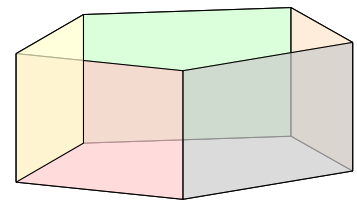
² Si desenvolupem el con, A_L és l'àrea d'un sector circular de longitud $2\pi r$ i radi g .



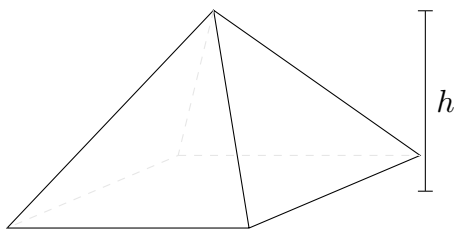
1. Políedre
El volum depèn del tipus de políedre



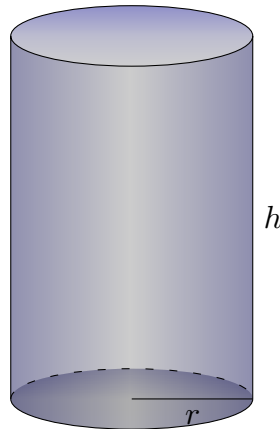
2. Ortoedre
 $A = A_L + 2 \cdot A_B$
 $V = A_B \cdot h$



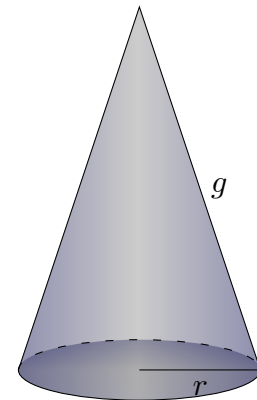
3. Prisma
 $A = A_L + 2 \cdot A_B$
 $V = A_B \cdot h$



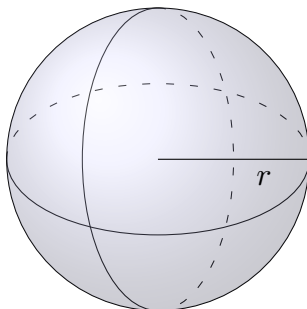
4. Piràmide
 $A = A_B + A_L$
 $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$



5. Cilindre
 $A = A_L + 2 \cdot A_B$
 $= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$
 $V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$



6. Con
 $A = A_L + A_B$
 $= \pi \cdot g \cdot r + \pi \cdot r^2$
 $V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$



7. Esfera
 $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
 $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Figura A.2 Volums (i algunes àrees) dels cossos geomètrics més usuals²
Àrees i volums

Apèndix B

Solucions

Aquí hi ha algunes solucions, pistes o resolucions dels exercicis d'aquest document.

- ?? : (a.) $x = 20$ (b.) $x = 4$, (c.) $x = 33$, (d.) $x = 27$, (e.) $x = 12$, (f.) $x = 24$,
(g.) $x = -60$, (h.) no té solució, (i.) $x = -6$, (j.) $x = 24/5$, (k.) $x = 30$,
(l.) $x = 1$, (m.) $x = 24$, (n.) $x = \frac{1}{2}$, (o.) $x = 3$, (p.) $x = -3$, (q.) $x = 0$,
(r.) $x = 5$, (s.) $x = 4$, (t.) $x = 64$, (u.) $x = 15$, (v.) $x = 3$, (w.) $x = -8$,
(x.) $x = 60$, (y.) $x = -\frac{9}{2}$
- ?? (a.) $x = 11$ (b.) $x = 2$ (c.) $x = -1$ (d.) $x = 20$
- ?? (a.) $x = 4$ (b.) $x = -47$ (c.) $x = 2$ (d.) $x = -89$ (e.) $x = 2$ (f.) $x = 144$
- ?? (a.) $x = 7/4$ (b.) $x = 6/5$ (c.) $x = -7/3$ (d.) $x = 5$ (e.) $x = 3$ (f.) $x = 7$
(g.) $x = 5/6$ (h.) $x = 2$
- ?? (a.) $x = -1$ (b.) $x = 3/2$ (c.) $x = 2$ (d.) $x = 44$ (e.) $x = -1$ (f.) $x = -5$
(g.) $x = -2/3$ (h.) $x = 8/13$ (i.) $x = 1/3$ (j.) $x = -1/2$
- ?? (a.) $x = 1/2$ (b.) $x = 1/4$ (c.) $x = 1$ (d.) $x = -40$ (e.) $x = -1/6$ (f.) $x = -3$
- ?? (a.) $x = 1$ (b.) $x = 15$ (c.) no té solució (d.) $x = 2/5$ (e.) $x = 1$ (f.) $x = 17$
(g.) $x = 1$ (h.) $x = 1/6$ (i.) $x = 4$ (j.) $x = 21$ (k.) $x = -1$ (l.) $x = -25$
- 35 : (a.) L'esdeveniment impossible = \emptyset , (b.) l'esdeveniment segur = $\{1, 2, 3, 4\}$
(c.) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$,
 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$
- 36 : $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.
- 37 : (a.) 12 (b.) 6 (c.) 6
- 38 : (a.) 1 carta (b.) 13 (c.) 1 (d.) 12 (e.) 19 (f.) 3
- 39 : (a.) $\{2, 4, 6\}$ (b.) $\{1, 3, 5\}$ (c.) $\{4, 6\}$ (d.) $\{2, 4, 5, 6\}$ (e.) $\{2\}$ (f.) $\{1, 2, 3, 5\}$
- 42 : (a.) $1/3$, (b.) $1/2$, (c.) $1/2$, (d.) $2/3$, (e.) $2/3$, (f.) $1/6$, (g.) 0, (h.) $2/3$
- 43 : (a.) $1/12$, (b.) $1/16$, (c.) $1/2$, (d.) $7/16$, (e.) 0, (f.) $5/16$
- 45 : $1/200$, (a.) $1/10$
- 46 : (a.) $1/10$, (b.) $3/5$, (c.) $2/5$, (d.) $1/5$, (e.) $2/5$, (f.) $2/5$
- 59 : (a.) $1/10$, (b.) $3/5$, (c.) $2/5$, (d.) $9/10$
- 61 : $23/42$

62 : $95/161$

63 : $1/188$

64 : $4/35$

65 : (a.) $1/6$, (b.) $7/16$

Índex alfabètic

