claramente $\vec{w} = (\ldots)$ és un vector perpendicular a $\vec{v_r}$: $(-1)\cdot 5 + 5\cdot 1 = 0$

Per tant, la recta cercada és

$$\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$$

d) $r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -2 - 6\lambda \end{cases}$

$P(1,1)$

Tenim que $\vec{v_r} = (5, -6)$ és el v.d de r.

$\vec{w} = (6, 5)$ és perpendicular a $\vec{v_r}$:

$6\cdot 5 + 5\cdot(-6) = 0$

Per tant:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$$

és la recta cercada

16a) Calcula el valor de a per a què les rectes $r: 3x + ay + 4 = 0$ i $s \equiv 4x - 2y - 1 = 0$ siguin:

a) paral·leles.

Trobem els seus vectors directors

$\vec{v_r} = (-a, 3)$

$\vec{v_s} = (2, 4)$

Si són paral·leles $\Rightarrow$ han de ser proporcionals.

$\longrightarrow -\frac{a}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow -4a = 6 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$

b) perpendiculars

Volem que $\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0 \Rightarrow -2a + 12 = 0$

$$\rightarrow \quad a = \frac{-12}{-2} = \boxed{6}$$

c) Formin un angle de 45º

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}| \cdot \cos \overset{45^\circ}{\alpha}$$

$$-2a+12 = \sqrt{a^2+a} \cdot \sqrt{4+16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-2a+12 = \sqrt{a^2+a} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-2a+12 = \sqrt{a^2+a} \left(\sqrt{20} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{20/2} = \sqrt{10}$$

$$-2a + 12 = \sqrt{10(a^2+a)}$$

$$\cancel{(-2a+12)^2 = 10(a+1) \cdot a}$$

$$(-2a+12)^2 = 10(a^2+a)$$

$$4a^2 + 144 - 48a = 10a^2 + 10a$$

$$4a^2 + 144 - 48a - 10a^2 - 10a = 0$$

$$-6a^2 - 58a + 144 = 0$$

$$-3a^2 - 29a + 72 = 0$$

$$a = \frac{29 \pm \sqrt{1705}}{-6} \quad \begin{cases} \dfrac{29 + \sqrt{1705}}{-6} \\[2ex] \dfrac{29 - \sqrt{1705}}{-6} \end{cases}$$

(Hem de comprovar quina és la bona)

d) Formin un angle de 60°

$$\overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\overrightarrow{v_s}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos 60°$$

$$-2a+12 = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{2}$$

$$-2a+12 = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{\frac{20}{4}}$$

$$-2a+12 = \sqrt{5(a^2+9)}$$

$$(-2a+12)^2 = 5a^2+9$$

$$4a^2+144-48a = 5a^2+9$$

$$-a^2-48a+135=0$$

$$a = \frac{48 \pm \sqrt{2844}}{-2}$$

$$\frac{48 - \sqrt{2844}}{-2}$$

$$\frac{48 + \sqrt{2844}}{-2}$$

(Hem de comprovar quin és la bona)

170) Calculeu l'angle que formen les rectes següents:

a) $r: x-y+1=0 \rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{(1,1)}$

$s: 7x+2y-3=0 \rightarrow \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{(-2,7)}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = |\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}| \cdot \cos \alpha$$

$$-2+7 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{53} \cdot \cos \alpha$$

$$5 = \sqrt{106} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 60'94°}$$

b) $r: y = -3x + 4$
$s: y = -x + 1$

$r:$ $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4)$
$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1,1)$ $\Big\rangle$ $\vec{v_r} = \overrightarrow{(1,-3)}$

$s:$ $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$
$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1,0)$ $\Big\rangle$ $\vec{v_s} = \overrightarrow{(1,-1)}$

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}| \cdot \cos \alpha$

$1 + 3 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$

$4 = \sqrt{20} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{20}} \Rightarrow \alpha \simeq 26'56°$

c) $r: 2x + y + 4 = 0 \Rightarrow \vec{v_r} = \overrightarrow{(-1,2)}$
$s: -3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{v_s} = \overrightarrow{(-2,-3)}$

$\Rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}| \cdot \cos \alpha$

$2 - 6 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \alpha$

$-4 = \sqrt{65} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha \simeq 60'25°$

d) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} \Rightarrow \vec{v_r} = \overrightarrow{(2,3)}$
$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} \Rightarrow \vec{v_s} = \overrightarrow{(3,-2)}$

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \vec{v_r}$ i $\vec{v_s}$ són
perpendiculars $\Rightarrow \alpha = 90°$

171) Donada la recta $r: 2x-3y+1=0$, calcula:

a) el seu vector director i un vector perpendicular.

$\vec{v_r} = (3, 2)$

Volem $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{v_r}$. P.e. podem dir

$\vec{w} = (-2, 3)$, ja que

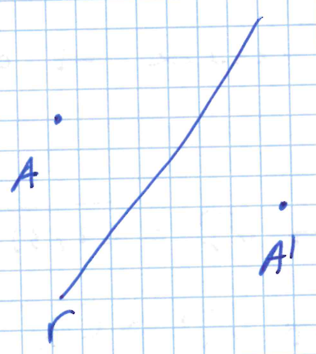
$\vec{w}\cdot\vec{v_r} = 3\cdot(-2) + 2\cdot 3 = 0$.

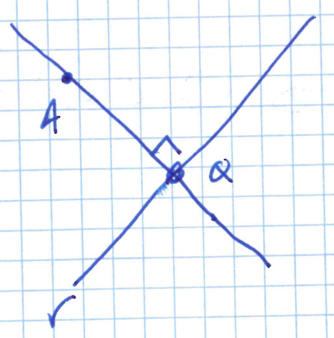
b) l'equació de la recta que passa pel punt $A(3,-5)$ i que és perpendicular a la recta $r$

Podem usar $\vec{w}$ com al vector de la recta buscada:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+5}{3}$$

c) el punt simètric del punt A respecte de la recta r.




Primer trobem el punt de tall de r i de la recta perpendicular.

$$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+5}{3} \Rightarrow 3(x-3) = -2(y+5) \end{cases}$$

$\Rightarrow 3x - 9 = -2y - 10$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 6y + 2 = 0 \\ 9x + 6y + 3 = 0 \\ \hline 13x \qquad + 5 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{-5}{13}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \left(\frac{-5}{13}\right) - 3y + 1 = 0$$

$$\frac{-10}{13} - 3y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 + \frac{10}{13}}{-3} = \frac{\frac{-3}{13}}{\frac{-3}{1}} = \frac{-\cancel{3}}{-\cancel{3} \cdot 13}$$

$$= \frac{1}{13}$$

$\Rightarrow \left(\frac{-5}{13}, \frac{1}{13}\right)$ és el punt de tall

$\Rightarrow$ Q és el punt mitjà de $A(3,-5)$ i $A'(x,y)$

$$\left(\frac{-5}{13}, \frac{1}{13}\right) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-5}{13} = \frac{3+x}{2} \Rightarrow -10 = 39 + 13x \\ \frac{1}{13} = \frac{-5+y}{2} \Rightarrow 2 = -65 + 13y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-49}{13} \qquad \Rightarrow A'\left(-\frac{49}{13}, \frac{67}{13}\right)$$

$$y = \frac{67}{13}$$

172) Calcula la pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes següents:

a) $x + 3y = 4$

$\Downarrow$

$3y = 4 - x \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$

$\cancel{y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x \Rightarrow m = -1}$

$\Rightarrow$ pendent $m = -\frac{1}{3}$

ordenada a l'origen $= \frac{4}{3}$

b) $4y + 5 = -x$

$y = \frac{-x-5}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

$n = -\frac{5}{4}$

c) $2x - 7y = 0 \Rightarrow y = \frac{-2x}{-7} = \frac{2}{7}x$

$\Rightarrow m = \frac{2}{7}$

$n = 0.$

d) $-8y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{-8} = -1$

$\Rightarrow m = 0, \quad n = -1.$

173) Calcula les equacions de la recta que passa pels punts A(−1,0) i B(−4,−1). Calcula el seu vector director i almenys tres punts més de la

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-3,-1)}$ és el seu vector director.

$$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$$ Eq. paramètrica.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{-1}$$ Eq. contínua

$$-1(x+1) = -3y$$
$$-x-1 = -3y$$
$$-x+3y-1=0$$ Eq. general

$$y = \frac{-x}{-3} - \frac{1}{-3} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$ eq. explícita.

Si hem de calcular 2 punts més, podem substituir les variables a l'eq. que vulguem. P.e.

Si $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow (0, \frac{1}{3})$

Si $x = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \cancel{(1, \frac{2}{3})}\ (1, \frac{2}{3})$

174) Calcula totes les eq. de la recta que passa pel punt $A(3,-5)$ i que segueix la direcció $\vec{v}(-1,7)$. Calcula la seva pendent

eq. cont. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{7} \Rightarrow 7(x-3) = -y-5$

$7x - 21 = -y - 5$

eq. para. $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 7\lambda \end{cases}$

$7x + y - 16 = 0$ eq. general

pendent $\longleftarrow$ $y = -7x + 16$

175) Calcula totes les eq. de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-5,1)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-7,-2)}$

Par. $\begin{cases} x = 2 - 7\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$

v.d $(-B,A)$:

$-2x + 7y + C = 0$

Cont. $\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y-3}{-2}$

Passa per A: $-2\cdot 2 + 7\cdot 3 + C = 0$

$-4 + 21 + C = 0$

$C = -16$

$\Rightarrow -2x + 7y - 16 = 0$ Eq. general.

176) Donada la recta $y = 2x + 8$, calcula:

a) el seu vector director.

$-2x + y - 8 = 0$

v.d és de la forma $(-B, A) = \overrightarrow{(-1,-2)}$

b) eq. de la recta paral·lela que passa pel punt $(0,-8)$.

Si és paral·lela ~~té~~ té el mateix v.d.

$\dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y+8}{-2}$ ; $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+8}{-2}$

c) un vector perpendicular a la recta

P.e. $\overrightarrow{(2,-1)}$ és perp. a $\overrightarrow{(-1,2)}$

ja que: $2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) = 0$.

d) l'eq. de la recta perpendicular que passa pel punt $(0,-8)$

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+8}{-1}$

147) Calculeu els punts de tall dels parells de rectes següents.

a) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{4}$

$s: 3x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 + 5y$

$$x = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}y$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}y - 3}{2} = \frac{y+1}{4}$$

$$\frac{20}{3}y - \frac{44}{3} = 2y + 2$$

$$20y - 44 = 6y + 6$$

$$14y = 50$$

$$y = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{7}$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{125}{21} = \frac{37}{7}$$

$$\Rightarrow P.T. \left(\frac{37}{7}, \frac{25}{7}\right)$$

b) $r: y = 6x - 10$

$s: 9x - 3y + 27 = 0$

$$9x - 3(6x - 10) + 27 = 0$$

$$9x - 18x + 30 + 27 = 0$$

$$-9x = -57$$

$$\boxed{x = \frac{19}{3}}$$

c) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

$s: \; y = -x + 2$

$\Rightarrow \; -1 + 10\lambda = -(3 + 2\lambda) + 2$

$$-1 + 10\lambda = -3 - 2\lambda + 2$$

$$10\lambda + 2\lambda = -3 + 2 + 1$$

$$12\lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

$\Rightarrow \; x = 3 + 2 \cdot 0 = 3$

$\quad\; y = -1 + 10 \cdot 0 = -1.$

$\Rightarrow$ $(3, -1)$ és el punt de tall.

d) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ $\Rightarrow$ Pensa que les $\lambda$ són diferents.

$s: \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = -5k \\ y = 2 - 6k. \end{cases}$

$\begin{cases} -5k = 3 + 2\lambda \\ -1 + 10\lambda = 2 - 6k \end{cases}$

$\begin{cases} -2\lambda - 5k = 3 \\ 10\lambda + 6k = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 5} \begin{cases} -10\lambda - 25k = 15 \\ 10\lambda + 6k = 3 \end{cases}$

$/ \quad 19k = 18$

$$K = -\frac{18}{19}$$ (Ens podríem haver aturat aquí i trobar el punt de tall a s.)

$$-2\lambda - 5 \cdot \left(-\frac{18}{19}\right) = 3$$

$$-2\lambda = 3 - \frac{90}{19}$$

$$-2\lambda = \frac{-33}{19}$$

$$\lambda = \frac{33}{38}$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 + 2 \cdot \frac{33}{38} = \frac{90}{19}$$

$$y = -1 + 10 \cdot \frac{33}{38} = \frac{146}{19}$$

$\Rightarrow$ Punt de tall $\left(\frac{90}{19}, \frac{146}{19}\right)$

e) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{4}$

$s: \dfrac{x}{10} = \dfrac{y+8}{-1} \Rightarrow -x = 10y + 80$

$$x = -10y - 80$$

$$\Rightarrow \frac{-10y - 80 - 3}{2} = \frac{y+1}{4}$$

$$-40y - 332 = 2y + 2$$

$$-42y = 334$$

P.T

$y = \underline{-167} \Rightarrow x = \underline{-1670} + 80$

f) $r: \ 3x - 2y + 6 = 0$

$s: \ 7y - 8x + 2 = 0$

$\cdot 8 \quad r: \ 24x - 16y + 48 = 0$

$\cdot 3 \quad s: \ -24x + 21y + 6 = 0$

$$5y = 54$$

$$\boxed{y = \frac{54}{5}}$$

$$\Rightarrow \quad 3x - 2 \cdot \frac{54}{5} + 6 = 0$$

$$3x - \frac{108}{5} + 6 = 0$$

$$3x = \frac{78}{5}$$

$$\boxed{x = \frac{26}{5}}$$

$\Rightarrow$ P.T es $\left( \frac{26}{5}, \frac{54}{5} \right)$

~~g)~~

~~$r: y = 4x - 2$~~

~~$s: y = 10x - 1$~~

g) $r: y = 4x - 2$

$s: y = 10x - 8$

$$4x - 2 = 10x - 8$$

$$-6x = -6$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 4 \cdot 1 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$\Rightarrow (1, 2)$ és el punt de tall.

h) $r: y = 4x - 2$

$s: y = 4x - 10$

$$4x - 2 = 4x - 10$$

$$0x = -8$$

$$0 = -8 \Rightarrow$$ no té punts de tall.

És perquè són paral·leles (tenen la mateixa pendent $m = 4$ i diferent ordenada a l'origen).

i) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

$s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{3 + 2\lambda - 2}{3} = \frac{-1 + 10\lambda + 2}{3}$$

$$\frac{2\lambda + 1}{3} = \frac{10\lambda + 1}{3} \Rightarrow 2\lambda + 1 = 10\lambda + 1$$

$$\Rightarrow -8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x = 3,\ y = -1$$

$\Rightarrow (3, -1)$ és el punt de tall.

j) r: $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

s: $10x - 2y + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad 10(3 + 2\lambda) - 2(-1 + 10\lambda) + 3 = 0$

$30 + 20\lambda + 2 - 20\lambda + 3 = 0$

$0\lambda = -35$

$0 \neq -35$

$\Rightarrow$ no té punt de tall.

k) r: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+10}{-2}$

s: $y = 10x - 12$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{10x - 12 + 10}{-2}$

$\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{10x-2}{-2}$

$\Rightarrow \quad -2(x-2) = 3(10x-2)$

$\Rightarrow \quad -2x + 4 = 30x - 6$

$-32x = -10$

$x = \dfrac{5}{16} \Rightarrow y = 10 \cdot \dfrac{5}{16} - 12 = \dfrac{-71}{8}$

$\Rightarrow$ P.T $\left(\dfrac{5}{16}, \dfrac{-71}{8}\right)$