VF3

106) Apliquem la regla de Cramer per resoldre els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

. Tenim 3 incògnites i 3 equacions.

. $|A| = -1-1-1+1-1-1 = -4 \neq 0$

Per tant, podem aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{\cancel{-1}+\cancel{1}-1-1-1-1}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-1-1-1-1}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1-1+\cancel{1}-\cancel{1}-1-1}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Per tant, les solucions són $(1,1,1)$

b) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \\ 3y+2z=-1 \end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 6+4-9 = 1 \neq 0$

• 3 eq. i 3 incògnites ⇒ Podem aplicar Crámer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{4+1-6}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-8+3}{1} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-3+12-2}{1} = \frac{7}{1} = 7.$$

Solució: $(-1, -5, 7)$

c) $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x \quad\; - z = 0 \\ \quad y - z = -1 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Es compleixen les condicions de Crámer, ja que tenim que el nº eq = nº incògnites i $|A| \neq 0$:

$|A| = 2 + 1 + 1 = 4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2+2-1}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Solucions $x = \frac{3}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = \frac{3}{4}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ y - z = 4 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Es compleixen les condicions de Cràmer: 3 incòg. i 3 eq., $|A| = 6 + 4 = 10$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{8+8+16}{10} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{24-8+12}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{12-16-8}{10} = \frac{-12}{10} = \frac{-6}{2}$$

Sol: $\left(\frac{16}{5}, \frac{14}{5}, -\frac{6}{2}\right)$

e) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ -5x - 4y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = -16 - 9 - 20 + 16 + 30 + 6 = 7 \neq 0$

Es compleixen les condicions de la regla de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{0}{7} = 0.$$

Sol. $(0,0,0)$

NOTA: Quan el $rg A = 3 \Rightarrow$ els sistemes homogenis són compatible determinats i tenen com a solució sempre la trivial: $(0,0,0)$

f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = -1 + 2 + 6 + 3 - 4 - 1 = 5 \neq 0$

Es compleixen les condicions de la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-1+3-2-1}{5} = \boxed{\frac{-1}{5}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1+1-3-2}{5} = \boxed{\frac{-3}{5}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2+2+1-1}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

UFB

Sistemes d'equacions.

107) Classifiqueu els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases}$

Siguin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matriu de coeficients i ampliada, respectivament. Hem d'estudiar el rg A i rg M.

$|A| = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \text{rg } A \neq 3.$

Però $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2.$

Hem de veure si rg M és 2 o no.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 - 12 - 2 = -25 \neq 0$$

$\Rightarrow \text{rg } M = 3 \Rightarrow$ el sistema és incompatible.

b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 5x + z = 2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3 - 5 + 2 = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 10 + 4 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 10 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$\Rightarrow rg\, M \neq 3$ i $rg\, M = 2$ perquè hi ha el matrix menor.

$\Rightarrow$ C.I.

c) $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y \quad - t = 2 \\ \quad z - t = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$rg\, A \leq 3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3$$

$\Rightarrow rg\, M = 3.$

Com que hi ha 4 incògnites $\Rightarrow$ C.I.

d) $\begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg\ A, M \leq 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2 \Rightarrow rg\ M = 2$$

$\Rightarrow$ C.I.

e) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -3 - 3 - 2 + 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 3$$

$\Rightarrow rg\ M = 3 \Rightarrow$ C.D.

108) Discutiu els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = m^2 + \cancel{1} - \cancel{1} - 1 - \cancel{m} + \cancel{m} = m^2 - 1$

$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

- Si $m \neq 1, m \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3$

$\Rightarrow rg\, M = 3 \Rightarrow$ C.D.

- Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 4 - 4 - 2 + 1$$

$$= -6 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 3$$

$\Rightarrow$ Incompatible

- Si $m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \Rightarrow rg\, A = 2.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - \cancel{1} - 4 - 4 - 2 + \cancel{1}$$

$$= -12 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, M = 3 \Rightarrow$ incompatible.

b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$|A| = 4m + 4 + 9 - 6m - 8 - 3$

$= -2m + 2$

$-2m + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-2}{-2} = 1$

- Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 \Rightarrow rg\, M = 3$

$\Rightarrow$ C.D

- Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow rg\, A = 2$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3 + m^2 + 1 - 3m - m - 1 = m^2 - 4m + 3$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

• Si $m \neq 1, m \neq 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 \Rightarrow rg\, M = 3$
$\Rightarrow$ C.D.

• Si $m = 1 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, A = 2.$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 5 + 4 - 12 - 4 - 5 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(2 columnas iguales)}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 5 + 12 - 4 - 12 - 5 = 0$$

$\Rightarrow rg\, M = 2 \Rightarrow$ C.I.

• Si $m = 3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\,A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\,A = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 45 + 4 - 36 - 12 - 5 = 8 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\,M = 3 \Rightarrow$ incompatible

d) $\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$|A| = m^2 + 1 + 1 - 1 - m - m = m^2 + 1 - 2m$

$m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$= \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1.$

• Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\,A = 3 = rg\,M \Rightarrow$ C.D.

• Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\,A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que tots els elements són iguals, tots els menors d'ordre 2 són nuls $\Rightarrow$ rg $A \neq 2$

Però $|1| \neq 0 \Rightarrow$ rg $A = 1$.

D'altra banda,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tots els menors d'ordre 3 són nuls, ja que tenen dues columnes iguals

Per tant, rg $M \neq 3$.

I tenim que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ rg $M = 2 \Rightarrow$ incompatible

109) Resol, si es pot, els sistemes següents:

a) $\begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 5x - y + 4z = 3 \\ -3x + 3y - 5z = -2 \end{cases}$

En primer lloc, vegem si el sistema té cap solució.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$|A| = -5 - 24 + 15 - 3 + 50 + 12 = 45 \Rightarrow$ rg $A = 3$

$\Rightarrow$ rg $M = 3 \Rightarrow$ CD.

Per tant té solució i és única. Aplicarem la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{45} = \frac{15 - 16 + 9 - 2 + 30 - 36}{45} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{45} = \frac{15 - 36 - 10 + 9 + 75 - 8}{45} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{45} = \frac{-2 - 18 + 45 - 9 + 20 + 9}{45} = 1.$$

Solución $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$

b) $\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 1 \\ x - y + 3z = -4 \\ 3x - 4y + z = -6 \end{cases}$ Miremos primero si tiene solución

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2 + 18 - 20 + 15 - 2 + 24 = 33 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg\,A = 3 = rg\,M \Rightarrow C.D.$$

Podemos aplicar entonces la regla de Cramer para hallar la solución.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 3 \\ -6 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{33} = \frac{-1 - 36 + 80 - 30 + 8 + 12}{33} = \frac{33}{33} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}}{33} = \frac{-8+9-30+60-1+36}{33} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}}{33} = \frac{12-24-4+3+12-32}{33} = -1.$$

Solució $x=1$, $y=2$, $z=-1$.

c) $\begin{cases} x - 3y + 8z = 2 \\ x + 3y - z = 8 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3 - 3 + 16 + 24 + 3 + 2 = 45 \neq 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{rg } A = 3 = \text{rg } M \\ 3 \text{ incògnites} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{C.D.}$$

Feim Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 8 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{45} = \frac{6-9+128+72+24+4}{45} = \frac{225}{45} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{45} = \frac{8+2-24+64-2-3}{45} = \frac{45}{45} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{45} = \frac{3-3+16+24+3+2}{45} = 1$$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 6x - 4y + 7z = 11 \\ -x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 7 & 11 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $|A| = -\cancel{12} - 14 + \cancel{12} - 4 - 36 - 14$
  $= -68 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 \Rightarrow rg\, M = 3 \Rightarrow$ C.D.

- Apliquem la regla de Crámer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 11 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-68} = \frac{-12 + 28 + 22 + 8 - 66 - 14}{-68} = \frac{-34}{-68} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 11 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-68} = \frac{33 - 7 + 12 + 11 - 18 - 14}{-68} = -\frac{17}{68}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & 11 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-68} = \frac{-8 - 22 + 12 - 4 - 24 - 22}{-68} = \frac{-68}{-68} = 1.$$

e) $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = -5 + 2 + 8 - 4 - 5 + 4 = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2.$

Com que ampliem M amb una ~~fila~~ columna de zeros, llavors tots els menors d'ordre 3 de M són nuls.

$\Rightarrow \operatorname{rg} M = 2 \Rightarrow$ C.I.

Hem de parametritzar una variable i dir les equacions independents.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ les dues primeres equacions són independents. Per tant el sistema queda.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Sigui $z = \lambda$ un nombre qualsevol.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 2\lambda \\ -x + y = \lambda \end{cases}$$

$$2y = 3\lambda$$

$$y = \frac{3\lambda}{2}$$

$$x = 2\lambda - \frac{3\lambda}{2} = \frac{4\lambda - 3\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

$\Rightarrow$ les solucions del sistema són

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{3\lambda}{2}, \quad z = \lambda$$

$\Rightarrow \text{rg}\, M = 2 \Rightarrow$ C.I.

Hem de parametritzar una variable i dir les equacions independents.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ les dues primeres equacions són independents. Per tant el sistema queda.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Sigui $z = \lambda$ un nombre qualsevol.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 2\lambda \\ -x + y = \lambda \end{cases} \longrightarrow x = 2\lambda - \frac{3\lambda}{2} = \frac{4\lambda - 3\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

$$2y = 3\lambda$$

$$y = \frac{3\lambda}{2}$$

$\Rightarrow$ les solucions del sistema són

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{3\lambda}{2}, \quad z = \lambda$$

f) $\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + 5y + 7z = 1 \\ -x - y + 5z = 1 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

- $|A| = 25 - 35 - 1 + 5 - 15 + 1 = -20 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A = 3 = \text{rg}\, M$
$\Rightarrow$ C.D.

- Apliquem, per tant, la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{125 + 21 - 1 - 5 - 15 + 35}{-20} = \frac{160}{-20} = \boxed{-8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{5 - 35 + 1 + 1 - 25 - 7}{-20} = \frac{-60}{-20} = \boxed{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-20} = \frac{5 - 3 - 5 + 25 - 3 + 1}{-20} = \frac{20}{-20} = \boxed{-1}$$

110) Resoleu els sistemes compatibles de l'exercici 107.

b) A l'apartat b, hem vist que el sistema és C.I.

I atès que $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & +1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

$\Rightarrow$ el sistema original és equivalent a:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Per resoldre'l, parametritzem una variable:

sigui $z = \lambda$, un nombre real qualsevol

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y = -\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2 - \lambda}{5} = \frac{-\lambda}{5} + \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{5} = \frac{-3\lambda - 4}{5} = \frac{-3\lambda}{5} - \frac{4}{5}$$

Per tant, les solucions són:

$$x = \frac{-\lambda}{5} + \frac{2}{5},$$

$$y = \frac{-3\lambda}{5} - \frac{4}{5}$$

$$z = \lambda$$

amb λ un nombre qualsevol.

c) Sabem que 10 7c és un sistema compatible indeterminat. A més, sabem que totes les equacions són linealment independent.

Parametritzem una variable, per exemple ~~z~~ t.

Sigui $t = \lambda$ un nombre qualsevol.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 - \lambda \\ x - y \quad\;\; = 2 + \lambda \\ \qquad\quad z = \lambda \end{cases}$$

Sabem que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2+\lambda & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-(1-\lambda) + \lambda + 2 + \lambda}{-2}$$

$$= \frac{-1 + \lambda + \lambda + 2 + \lambda}{-2} = \frac{3\lambda + 1}{-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 2+\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2 + \lambda - \lambda - (1-\lambda)}{-2}$$

$$= \frac{2 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} - 1 + \lambda}{-2} = \frac{\lambda + 1}{-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 & 2+\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-\lambda-\lambda}{-2} = \frac{-2\lambda}{-2} = \lambda$$

Per tant, les solucions són:

$$x = \frac{3\lambda - 1}{-2},\ y = \frac{\lambda+1}{-2},\ z = \lambda,\ t = \lambda$$

on λ és un nombre qualsevol.

d) Sabem que les dues equacions són linealment independents.

Tenim 2 equacions i 4 incògnites $\Rightarrow$ Hem de parametritzar 2 incògnites.

Siguin $z = \lambda$, $t = \mu$ nombres reals qualsevol

El sistema, llavors, és igual a:

$$\begin{cases} x - y = 4 + \lambda - \mu \\ x + y = 2 - \lambda + \mu \end{cases}$$

Sabem que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+\lambda-\mu & -1 \\ 2-\lambda+\mu & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4+\cancel{\lambda}-\cancel{\mu}+2-\cancel{\lambda}+\cancel{\mu}}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+\lambda-\mu \\ 1 & 2-\lambda+\mu \end{vmatrix}}{2} = \frac{2-\lambda+\mu-(4+\lambda-\mu)}{2}$$

$$= \frac{2-\lambda+\mu-4-\lambda+\mu}{2} = \frac{2\mu-2\lambda-2}{2}$$

$$= \mu - \lambda - 1$$

Per tant, la solució és:

$(3, -\lambda + \mu - 1, \lambda, \mu)$

on λ, μ són nombres qualssevol.

e) El sistema és C.D. i $|A| = -2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

<u>NOTA</u>: Els sistemes homogenis que són C.D. sempre tenen com a (única) solució la trivial $(0,0,0)$.

111) Resoleu aquests sistemes compatibles indeterminats.

a) $\begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ x + 3y + 4z = 11 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 4 + 4 + 9 + 1 - 24 + 6$
$= 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

Com que sabem que el sistema és C.I, sabem que les dues primeres equacions són linealment independents ($\Delta \neq 0$):

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Parametritzem: $z = \lambda$ un nombre qualsevol

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 - \lambda \\ 3x - y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

I el resolem per Cràmer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5-2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-(3-\lambda) - 2(5-2\lambda)}{-5} = \frac{-3+\lambda-10+4\lambda}{-5}$$

$$= -\lambda + \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ 3 & 5-2\lambda \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-(5-2\lambda) - 3(3-\lambda)}{-5} = \frac{-5+2\lambda-9+3\lambda}{-5}$$

$$= -\lambda + \frac{14}{5}$$

Per tant les solucions són:

$$\left(-\lambda + \frac{13}{5}, -\lambda + \frac{14}{5}, \lambda\right)$$

amb λ un nombre qualsevol.

5) $\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 12 \\ x + y + 3z = +6 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$

Com que sabem que és C.I, basta que mirem quines eq. són linealment independents

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ la 1a i 2a equacions són dependents (de fet es veu que la 1a eq. és igual a dues vegades la 2a)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow$ la 2a i 3a equacions són linealment independents.

$\Rightarrow$ El sistema és:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

Parametritzem: $z = \lambda$, un nombre qualsevol.

$$\begin{cases} x + y = 6 - 3\lambda \\ 3x - y = -\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6-3\lambda & 1 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-6+3\lambda+\lambda}{-4} = -\lambda + \frac{6}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6-3\lambda \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-\lambda - 3(6-3\lambda)}{-4} = -2\lambda + \frac{18}{4}$$

Per tant, la solució és:

$$\left(-\lambda + \frac{6}{4}, \ -2\lambda + \frac{18}{4}, \ \lambda\right),$$

per λ un nombre qualsevol.

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - 6y + 3z = 18 \\ x - 2y + z = 6 \end{cases}$

Aquí es veu claramen! que la 3a equació és igual que la 1a eq. $\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 3x - 6y + 3z = 18 \end{cases}$

I també la 2a eq és igual a la 1a per 3.

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tenim 1 eq i 3 incògnites. $\Rightarrow$ hem de parametritzar 2 incògnites.

Siguin $y = \lambda$, $z = \mu$, on λ, μ són nombres qualssevol

$$\Rightarrow x = 6 + 2\lambda - \mu$$

$\Rightarrow$ Les solucions són:

$$(6 + 2\lambda - \mu, \ \lambda, \mu)$$

amb λ i μ nombres qualsevols.

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ 2x - y = 5 \\ 5x + z = 20 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$\Rightarrow$ La 1a i 2a eq. són linealment independents.

Com que, per l'enunciat, sabem que és C. I

$\Rightarrow$ que el sistema és equivalent a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Sigui $z = \lambda$ un nombre qualsevol.

Per tant,

$$\begin{cases} x + 2y = 10 - \lambda \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10-\lambda & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10 + \lambda - 10}{-5} = \frac{\lambda - 20}{-5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10-\lambda \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5 - 2(10-\lambda)}{-5} = \frac{5 - 20 + 2\lambda}{-5}$$

$$= \frac{2\lambda - 15}{-5}$$

Les solucions són $\left(\frac{\lambda - 20}{-5}, \frac{2\lambda - 15}{-5}, \lambda\right)$ on λ és un nombre real.

112) Discutiu i resoleu els sistemes següents en funció del paràmetre corresponent:

a) $\begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$|A| = -m - m - 1 - \cancel{1} + \cancel{1} - m^2$

$= -m^2 - 2m - 1$

$-m^2 - 2m - 1 = 0$

$\Rightarrow m = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{2 \pm 0}{-2} = -1$

$-m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2$

• Si $m \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$\Rightarrow$ C.D.

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ m & -1 & m \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 - 2m - 1} = \dfrac{-\cancel{m} + \cancel{m} - \cancel{m} + 1 + \cancel{m} - m^2}{-m^2 - 2m - 1}$

$= \dfrac{-(m^2 - 1)}{-(m+1)^2} = -\dfrac{(m-1)(m+1)}{-(m+1)^2} = \dfrac{m-1}{m+1}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} m & m & -1 \\ 1 & m & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 - 2m - 1} = \dfrac{m^2 + m^2 + 1 + \cancel{m} - \cancel{m} + m^2}{-m^2 - 2m - 1}$

$= \dfrac{3m^2 + 1}{-(m+1)^2}$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-m^2-2m-1} = \frac{\cancel{m} - \cancel{m} + m + m - 1 - m^2}{-m^2-2m-1}$$

$$= \frac{-m^2+2m-1}{-(m+1)^2} = \frac{-(m-1)^2}{-(m+1)^2} = \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2$$

Por tant, les solus son:

$$\left(\frac{m-1}{m+1}, \frac{3m^2+1}{-(m+1)^2}, \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2} \right)$$

• Si $m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3.$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cancel{-1} \cancel{+1} - 1 - 1 - 1 - 1 = -4 \neq 0$$

Por tant, $rg\, M = 3 \Rightarrow$ incompatible.

b) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 6a + 10 - 6 + 3a + 8 + 15$$

$$= 9a + 27$$

$$9a + 27 = 0 \Rightarrow a = \frac{-27}{9} = -3$$

• Si $a \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & a & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9a+27} = \frac{4a + 20 + 12 + 6a - 16 + 10}{9a+27}$$

$$= \frac{10a + 26}{9a+27}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{9a+27} = \frac{-24 - 10 - 12 - 12 - 8 + 30}{9a+27} = \frac{-36}{9a+27}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & a & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9a+27} = \frac{6a + 8 + 4 - 2a + 8 + 12}{9a+27} = \frac{4a+32}{9a+27}$$

• Si $a = -3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 + 8 + 4 + 6 + 8 + 12 = 20$$

$\Rightarrow rg\, M = 3 \Rightarrow$ incompatible.

c) $\begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \qquad - az = 1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a & 7 & 20 & 1 \\ a & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -8a^2 + 161 - 160 + 7a^2 = -a^2 + 1$$

$$-a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1.$$

• Si $a \neq 1,\ a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$\Rightarrow$ C.D.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{-a^2+1} = \frac{-8a + 161 - 160 + 7a}{-a^2+1} = \frac{-a+1}{-a^2+1}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 20 \\ a & 1 & 23 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}}{-a^2+1} = \frac{\cancel{-a^2} + 23 + 20a - 20 + \cancel{a^2} - 23a}{-a^2+1}$$

$$= \frac{-3a+3}{-a^2+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ a & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2+1} = \frac{8a+7-8-7a}{-a^2+1} = \frac{a-1}{-a^2+1}$$

• Si $a = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(2 columnes iguals)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 23 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(2 columnes iguals)}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 20 & 1 \\ 8 & 23 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow rg\, M = 2. \Rightarrow$ C. I.

Parametritzem: $\begin{cases} x + 7y + 20z = 1 \\ x + 8y + 23z = 1 \end{cases}$

$z = \lambda$, and λ un nombre fixe.

$$\begin{cases} x + 7y = 1 - 20\lambda \\ x + 8y = 1 - 23\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-20\lambda & 7 \\ 1-23\lambda & 8 \end{vmatrix}}{1} = \frac{8(1-20\lambda) - 7(1-23\lambda)}{1}$$

$$= 8 - 160\lambda - 7 + 161\lambda = 1 + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-20\lambda \\ 1 & 1-23\lambda \end{vmatrix}}{1} = \frac{1-23\lambda - (1-20\lambda)}{1} = -3\lambda$$

Les solutions sont $(1+\lambda, -3\lambda, \lambda)$, où λ est un nombre quelconque.

- Si $a = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 20 \\ -1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 7 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 7 - 8 + 7 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 3.$$

$\Rightarrow$ incompatible.

1) $\begin{cases} mx + y = 2-2m \\ x + my = m-1. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 2-2m \\ 1 & m & m-1 \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2 - 1$$

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

• Si $m \neq 1$, $m \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2 = \text{rg } M$

$\Rightarrow$ C.D

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-2m & 1 \\ m-1 & m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m(2-2m) - (m-1)}{m^2-1}$$

$$= \frac{2m - 2m^2 - m + 1}{m^2-1} = \frac{-2m^2 + m + 1}{m^2 - 1}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2-2m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m(m-1) - (2-2m)}{m^2-1}$$

$$= \frac{m^2 - m - 2 + 2m}{m^2-1} = \frac{m^2 + m - 2}{m^2-1}$$

• Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rg } M = 1$ clarament. (totes les columnes són iguals a la 1a o són nul·les).

$\Rightarrow$ $\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{rg A} = rg M \Rightarrow$ C.I. $\Rightarrow$ el sistema és:

$$\{ x + y = 0$$

$y = \lambda$, on λ és un nombre real

$x = -\lambda$

$\Rightarrow$ Solució: $x = -\lambda$, $y = \lambda$

on λ és un nº real

• Si $m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg A = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg M = 2$$

i $rg A = 1 \Rightarrow$ incompatible.

$\Rightarrow$ $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{rg\, A}} = rg\, M \Rightarrow$ C.I. $\Rightarrow$ el sistema és:

$$\{ x + y = 0$$

$y = \lambda$, on λ és un nombre qualsevol

$x = -\lambda$

$\Rightarrow$ Solució: $x = -\lambda$, $y = \lambda$
on λ és un nº qualsevol.

• Si $m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 2$$

i $rg\, A = 1 \Rightarrow$ incompatible.

e) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = a^2 - 2a$

$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a = 2$

• Si $a \neq 0$, $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, M$

$\Rightarrow$ C.D.

Aplicam la regla de cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}}{a(a-2)} = \frac{2a-4}{a(a-2)} = \frac{2\cancel{(a-2)}}{a\cancel{(a-2)}} = \frac{2}{a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{a(a-2)} = \frac{4-2a}{a(a-2)} = \frac{2(2-a)}{a(a-2)} =$$

$$= \frac{-2\cancel{(a-2)}}{a\cancel{(a-2)}} = \frac{-2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a(a-2)} = \frac{a^2-2a}{a(a-2)} = \frac{a(a-2)}{a(a-2)} = 1.$$

$\Rightarrow$ Solucions $\left(\frac{2}{a}, -\frac{2}{a}, 1\right)$

- Si $a=0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$ rg $A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 3 \Rightarrow \text{el}$$

sistema és incompatible.

- Si $a = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Tots els menors d'ordre 2 de M són 0, ja que ~~$\$$~~ sempre contenen dues columnes iguals $\Rightarrow rg\, M \neq 3$. I, per tant, ~~$rg\, A \neq 2$~~

$rg\, M = 2$.

$\Rightarrow$ C. I.

Parametritzem:

Com que $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ la 1a i 2a equacions són independents. Per tant, el sistema és equivalent a:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x \qquad\quad = 2 \end{cases}$$

Sigui $z = \lambda$, amb λ un nombre qualsevol.

Llavors:

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ 2x = 2 \end{cases}$$

observem que el sistema és tant senzill que es pot resoldre directament, sense fer servir la regla de Cràmer:

- De la segona equació: $2x = 2 \Rightarrow x = 1$
- Per tant, substituint a la 1-a equació:

$$1 + y = 1 - \lambda \Rightarrow y = 1 - \lambda - 1$$

$$\Rightarrow y = -\lambda$$

Llavors, la solució és $(1, -\lambda, \lambda)$, on λ és un nombre qualsevol.

113) Hi ha algun valor de a per al qual el sistema tingui infinites solucions?

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y + z = a+3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a+2 \end{cases}$$

El problema és equivalent a saber quan és compatible indeterminat.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 1 & a+3 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que tenim que sigui compatible indeterminat, s'ha de verificar que:

- $\text{rg } A = \text{rg } M$
- $\text{rg } A = \text{rg } M < 3.$

- $|A| = a+1 + 3a - a - 2a = a+1$

$a+1 = 0 \Rightarrow a = -1,$

- Si $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3 = \text{rg } M$
$\Rightarrow$ C.D. $\Rightarrow$ No es el cas que volem.

- Si $a = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A \neq 3.$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A = 2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6+2+2 = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow \text{rg } M = 3 \Rightarrow$ incompatible.

$\Rightarrow$ tampoc és el cas que volem.

$\Longrightarrow$ No hi ha cap valor de a pel qual el sistema sigui C.I.

114) Siguin

x = cotxes blancs produïts

y = cotxes negres produïts

z = cotxes vermells produïts

$$\begin{cases} x+y+z=140 \\ y=\frac{3}{5}x \\ z=\frac{1}{4}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=140 \\ 5y=3x \\ 4z=y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=140 \\ -3x+5y=0 \\ -y+4z=0 \end{cases}$$

Apliquem la regla de Cràmer per resoldre aquest sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 140 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 20+3+12 = 35$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 140 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{35} = \frac{2800}{35} = 80$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 140 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{35} = \frac{1680}{35} = 48$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 140 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{35} = \frac{420}{35} = 12$$

R: Es produeixen 80 cotxes blancs, 48 cotxes negres i 12 cotxes vermells.

115) Siguin

x = diners que porta en Pere

y = - - - - - - - Joan

z = " " ... n'Àngel

Llavors:
$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ z = x + y \\ x = \frac{3}{2} y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 200 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Per resoldre el sistema aplicarem la regla de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 + 3 + 2 + 3 = 10$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{600}{10} = 60$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{10} = \frac{600+400}{10} = \frac{1000}{10} = 100$$

Per tant, en Pere té 60 €, en Joan en té 40 i n'Àngel, 100.

116) Siguin

x = preu del paquet de moniato

y = " " " nata

z = " " " " xocolata

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 15'75 \\ 2x + y + z = 10€ \\ x + y + z = 7'5 \end{cases}$$

(Si no volem fer servir nombres decimals, podem multiplicar la 1a i 3a equacions per 100 i 10 respectivament)

$\Rightarrow$ Apliquem la regla de Cramer per resoldre aquest sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 15'75 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 7'5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \cancel{3} + \cancel{2} + \cancel{2} - 1 - \cancel{4} - \cancel{3} = -1.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15'75 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 7'5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{15'75 + 15 + 10 - 7'5 - 20 - 15'75}{-1} = \boxed{2'50}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15'75 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 7'5 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{30 + 15'75 + 15 - 10 - 31'50 - 22'5}{-1} = \boxed{3'25}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 15'75 \\ 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 7'5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{22'5 + 20 + 31'5 - 15'75 - 30 - 30}{-1} =$$

$$= \boxed{+1'75}$$

Per tant, els pastissets de moniato, nata i xocolata valen, respectivament, 2'50 €, 3'25 € i 1'75 €.

117) Siguin

x = nombre de pomes,
y = " " peres
z = " " plàtans.

Sabem que:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Resoldrem aquest sistema per la regla de Cramer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 + \cancel{1} + 6 - \cancel{1} + 3 + 2 = 12$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12 + 24}{12} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12+36}{12} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{72-12}{12} = 5$$

Per tant hi ha 3 pomes, 4 peres i 5 plàtans.

118) Siguin

x = quantitat A de dòlars invertits

y = - - - - B - - - - - -

z = - - - - C - - - - - -

$$\begin{cases} x+y+z = 20000 \\ \frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y + \frac{6}{100}z = 1050 \\ \frac{5}{100}x + \frac{6}{100}y + \frac{4}{100}z = 950 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 20.000 \\ 4x+5y+6z = 105.000 \\ 5x+6y+4z = 95.000 \end{cases}$$

Resolem aquest sistema usant la regla de Cràmer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 20.000 & 1 & 1 \\ 105000 & 5 & 6 \\ 95000 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{400.000+570000+630000-475000-420000-720000}{20+30+24-25-16-36}$$

$$= \frac{-15000}{-3} = \boxed{5000}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20.000 & 1 \\ 4 & 105.000 & 6 \\ 5 & 95.000 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{420.000 + 600.000 + 380.000 - 525.000 - 320.000 - 570.000}{-3}$$

$$= \frac{-15.000}{-3} = \boxed{5000}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 20.000 \\ 4 & 5 & 105.000 \\ 5 & 6 & 95.000 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{475.000 + 525.000 + 480.000 - 500.000 - 380.000 - 630.000}{-3}$$

$$= \frac{-30000}{-3} = \boxed{10.000}$$

Per tant, A = 5000 €, B = 5000 € i C = 10 000 €.

119) Siguin

x = nombre de còpies venudes al preu original

y = - - - - - al 30% de descompte

z = - - - - - - - - al 40% de descompte.

[30% de descompte vol dir que es ven al 70% del preu original]

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 12x + 8'40y + 7'2z = 6384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

[Un 70% de 12 és 8'40 €]

[Ídem amb el 40%: 7'20 €]

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 120x + 84y + 72z = 63.840 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Apliquem la regla de Cràmer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 84 & 72 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 120 & 84 & 72 & 63840 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 168 - 72 + 240 + 84 - 240 - 144 = 36$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 63840 & 84 & 72 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{100800 + 127680 - 127680 - 86400}{36}$$

$$= 400$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 120 & 63840 & 72 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{127680 - 43200 + 63840 - 144000}{36}$$

$$= 120$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 120 & 84 & 63840 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{36} = \frac{-63840 + 144000 + 50400 - 127680}{36}$$

$$= 80$$

Per tant, s'han venut 400 còpies al preu original, 120 còpies al 30% i 80 còpies al 40% de descompte.

120) Siguin

x = nombre de bitllets de 10€

y = ·· - - - - de 20€

z = · - - - - de 50€

$$\begin{cases} x+y+z=95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=95 \\ x+2y+5z=200 \\ x-2y \quad\;\; =0 \end{cases}$$

Aplicarem la regla de Cràmer per a resoldre el sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 5 & 200 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 5-2-2+10 = 11$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 95 & 1 & 1 \\ 200 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{11} = \frac{-400+950}{11} = 50$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 95 & 1 \\ 1 & 200 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{11} = \frac{475-200}{11} = 25$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 95 \\ 1 & 2 & 200 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{11} = \frac{200-190-190+400}{11} = 20.$$

121) Siguin x = la xifra de les centenes
y = la xifra de les desenes
z = la xifra de les unitats.

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x=y+2z \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-297 \end{cases}$$

$\boxed{x}\ \boxed{y}\ \boxed{z}$ ordre original
El nombre és $100x+10y+z$

$\boxed{z}\ \boxed{y}\ \boxed{x}$ ordre invertit
El nombre és
$100z+10y+x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ -99x\quad+99z=-297 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ -x\quad+z=-3 \end{cases}$$

Resolem aquest sistema per la regla de Cramer:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -1+2-\cancel{1}-\cancel{1}=-1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-7+6-3}{-1}=4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{14-3-7-6}{-1}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{3-7+3}{-1}=1$$

El nombre és 421