260) Trobeu les arrels dels polinomis següents:

a) $x^4+3x^3-40x^2$

Trobar les arrels del polinomi significa trobar les solucions de l'equació

$$x^4+3x^3-40x^2=0$$

Només sabem trobar les arrels senceres.

Com que no té terme independent, hem de factoritzar el polinomi:

$$x^2(x^2+3x-40)=0$$

Per tant, les arrels del polinomi inicial són les arrels de x^2 i de $x^2+3x-40$.

- $x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{0} \Rightarrow x=0$
- $x^2+3x-40=0$

Apliquem la fórmula general de 2n grau

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-40)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{-3\pm13}{2}=\begin{cases}\dfrac{-3+13}{2}=\boxed{5}\\[2ex]\dfrac{-3-13}{2}=\boxed{-8}\end{cases}$$

Per tant, les arrels són 0, 5 i −8.

b) $2x^3 - x^2 - 118x - 315$

Com que té terme independent, podem usar el teorema de Ruffini per trobar les arrels enteres del polinomi.

$Div(315) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 15, \pm 21, \pm 35,$
$\pm 45, \pm 63, \pm 105, \pm 315\}$, ja que:

$$\begin{array}{r|l} 315 & 5 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$\Rightarrow$ els divisors de 315 són els nombres que s'obtenen prenent els factors de 315 un a un, dos a dos, etc.

1 factor: $3, 5, 7$

2 factors: $3^2 = 9$, $3 \cdot 5 = 15$, $3 \cdot 7 = 21$
$5 \cdot 7 = 35$

3 factors: $3^2 \cdot 5 = 45$, $3^2 \cdot 7 = 63$,
$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

4 factors: $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$

0 factors: 1

Provem amb 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & -118 & -315 \\ 1 & & 2 & 1 & -117 \\ \hline & 2 & 1 & -117 & \boxed{-432} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 no és arrel

Si provem amb -5 funciona:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & -1 & -118 & -315 \\
-5 & & -10 & +55 & 315 \\
\hline
 & 2 & -11 & -63 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$$2x^2 - 11x - 63$$

Per tant, $\boxed{-5}$ és arrel.

Llavors

$$2x^3 - x^2 - 118x - 315 = (x+5)\cdot(2x^2 - 11x - 63)$$

Per saber les arrels de $2x^2 - 11x - 63$ apliquem la fórmula de segon grau:

$$2x^2 - 11x - 63 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4\cdot 2\cdot(-63)}}{2\cdot 2} =$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 504}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{11 \pm 25}{4}$$

$$\frac{11+25}{4} = \boxed{9}$$

$$\frac{11-25}{4} = \boxed{\frac{-7}{2}}$$

c) $x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x$

Com que no tenim terme independent, factoritzem

$$x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x = x(x^4 - 2x^3 - 3x + 6)$$

Hem de trobar els divisors de 6.

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow \mathrm{Div}(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 0 & -3 & 6 \\
1 & & 1 & -1 & -1 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & -4 & \boxed{2}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 no és arrel

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 0 & -3 & 6 \\
-1 & & -1 & 3 & -3 & 6 \\
\hline
 & 1 & -3 & 3 & -6 & \boxed{12}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ -1 no és arrel

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 0 & -3 & 6 \\
2 & & 2 & 0 & 0 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 2 és arrel.

$$\downarrow$$

$$x^3 + 0x^2 + 0x - 3$$

$$\Rightarrow x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 6x = x \cdot (x-2) \cdot (x^3 - 3)$$

$x^3 - 3$ és un polinomi raonablement fàcil de trobar les seves arrels reals:

$$x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$\Rightarrow$ Les arrels són $0, 2, \sqrt[3]{3}$

d) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$

Hem de cercar les arrels reals del polinomi:

$12 = 2^2 \cdot 3$

0 factors $\Rightarrow$ 1
1 factor $\Rightarrow$ 2, 3
2 factors $\Rightarrow$ $2^2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$
3 factors $\Rightarrow$ $2^2 \cdot 3 = 12$

$\Rightarrow \mathrm{Div}(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -2 & 12 \\ 1 & & 1 & 2 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -6 & -8 & \boxed{4} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 <u>no</u> és arrel

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -2 & 12 \\ -1 & & -1 & 0 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -8 & 6 & \boxed{6} \end{array}$$

$\Rightarrow$ -1 no és arrel

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -8 & -2 & 12 \\ 2 & & 2 & 6 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{2 és arrel}}$

$\Rightarrow x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = (x-2) \cdot (x^3 + 3x^2 - 2x - 6)$

$\mathrm{Div}(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Provem amb -3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -2 & -6 \\ -3 & & -3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$-3$ és arrel,}}$

$\Rightarrow x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = (x-2)(x+3)\cdot(x^2-2)$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Les arrels del polinomi són $2, -3, \sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

e) $3x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 90x$.

Factoritzar

Si diem $p(x) = 3x^4 - 12x^3 - 33x^2 + 90x$ al polinomi inicial tenim que

$$p(x) = x\,(3x^3 - 12x^2 - 33x + 90)$$

$\Rightarrow 0$ és arrel de $p(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2\cdot 3^2 \cdot 5$

0 Factors $\Rightarrow 1$

1 Factor $\Rightarrow 2, 3, 5$

2 Factors $\Rightarrow \underset{6}{2\cdot 3}, \underset{10}{2\cdot 5}, \underset{15}{3\cdot 5}, \underset{9}{3^2}$

3 Factors $\Rightarrow 2\cdot 3\cdot 5 = 30$
$2\cdot 3\cdot 3 = 18$
$3\cdot 3\cdot 5 = 45$

4 Factors $\Rightarrow 90$.

$\mathrm{Div}(90) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 15, \pm 18, \pm 30, \pm 45\}$

Si provem amb $x = 2$, funciona:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -12 & -33 & 90 \\ 2 & & 6 & -12 & -90 \\ \hline & 3 & -6 & -45 & \boxed{0} \end{array}$$

$$p(x) = x \cdot (x-2) \cdot (3x^2 - 6x - 45)$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-45)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 540}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm 24}{6} \begin{cases} \boxed{5} \\ \boxed{-3} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ les arrels de $p(x)$ són $0, 2, -3$ i 5

f) $x^4 + 28x^3 - 60x^2 = x^2(x^2 + 28x - 60)$

$$x^2 - 28x - 60 = 0 \longrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{28 \pm 32}{2} \begin{cases} 30 \\ -2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Arrels són $0, -2$ i 30.

261/ c) $x^4 + 3x^3 - 40x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 3x - 40) = 0$

$\hookrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\hookrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 13}{2} \begin{cases} \boxed{5} \\ \boxed{-8} \end{cases}$$

b) $2x^3 - x^2 - 118x = 315$

$2x^3 - x^2 - 118x - 315 = 0$

315	5
63	7
9	3
3	3
1	

$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

0 Factors $\Rightarrow 1$

1 Factors $\Rightarrow 3, 5, 7$

2 Factors $\Rightarrow 3^2 = 9,\ 3 \cdot 5 = 15,\ 3 \cdot 7 = 21$
$5 \cdot 7 = 35$

3 Factors $\Rightarrow 3^2 \cdot 5 = 45$
$3^2 \cdot 7 = 63$
$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

4 Factors $\Rightarrow 315$

$Div(315) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 15, \pm 21, \pm 35, \pm 45, \pm 63, \pm 105, \pm 315\}$

Si provem de fer Ruffini amb $x = -5$ funciona:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -118 & -315 \\ -5 & & -10 & 55 & +315 \\ \hline & 2 & -11 & -63 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -5 \text{ és arrel}$$

$2x^2 - 11x - 63 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 2 \cdot (-63)}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{625}}{4} = \frac{11 \pm 25}{4} \begin{cases} \boxed{9} \\ \boxed{-\frac{7}{2}} \end{cases}$$

c) $x^3 - \frac{5x^2}{2} + x = 0$

$2x^3 - 5x^2 + 2x = 0$

$x(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$\rightarrow \boxed{x = 0}$

$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} \boxed{2} \\ \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

d) $12x^4 - 39x^2 + 27 = 0$

És una biquadrada. Feim el canvi $t = x^2$

$12t^2 - 39t + 27 = 0$

$$t = \frac{39 \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 27}}{2 \cdot 12} = \frac{39 \pm \sqrt{225}}{24}$$

$$= \frac{39 \pm 15}{24} \begin{cases} \frac{9}{4} \\ 1 \end{cases}$$

Com que $t = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

Ara bé, a les biquadrades hi pot haver solucions "falses"

Ho hem de comprovar a l'equació original:

$$12 \cdot 1^4 - 39 \cdot 1^2 + 27 = 0 \Rightarrow 1 \text{ és solució}$$

$$12 \cdot (-1)^4 - 39 \cdot (-1)^2 + 27 = 0 \Rightarrow -1 \text{ és solució}$$

$$12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 39 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 27 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \text{ és solució}$$

$$12 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 39 \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 27 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \text{ és solució.}$$

No té cap solució falsa

Per tant, les solucions de l'equació són $\pm 1, \pm \frac{3}{2}$.

FACTORITZACIÓ

262) Factoritzeu els polinomis següents:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Cercam les arrels enteres al mateix temps per factoritzar

$Div(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Feim Ruffini amb $x = 1$.

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$\Rightarrow$ 1 és arrel

Si diem $p(x)$ al polinomi original, tenim que

$$p(x) = (x-1)\cdot(x^2 - x - 6)$$

Cercam les arrels de $x^2 - x - 6$ usant la fórmula general de segon grau:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-1)\cdot(x-3)(x+2)$$

b) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

$Div(9) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

	1	−1	9	−9
1		1	0	9
	1	0	9	0

$\Rightarrow$ 1 és arrel i, per tant,

$$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x-1)\cdot(x^2+9)$$

$x^2 + 9$ no té arrels, per tant, aquesta és la factorització cercada

$$x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = -9$$
$$x = \pm\sqrt{-9}$$

no té solució

c) $15x^3+25x^2-10x$

Treiem factor comú:

$$15x^3+25x^2-10x = 5x\,(3x^2+5x-2)$$

Aplicam la fórmula general de segon grau:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm7}{6}$$

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{-12}{6}=-2$$

$$\Rightarrow 15x^3+25x^2-10x = 5x\cdot\left(3\,(x-\tfrac{1}{3})\cdot(x+2)\right)$$

$$= 15x\,(x-\tfrac{1}{3})\cdot(x+2)$$

Aquest exercici també es podria haver fet treient factor comú x i no 5x.

d) $3x^3-3x^2-6x$

Treiem factor comú:

$$3x^3-3x^2-6x = 3x(x^2-x-2)$$

Aplicam la fórmula de segon grau:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$$

$$2$$

$$-1$$

$$\Rightarrow 3x^3-3x^2-6x = 3x\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

e) $2x^4+4x^3-10x^2-8x+12$

$Div(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

12	2
6	2
3	3
1	

$12 = 2^2\cdot 3$

3 Factors $\Rightarrow 2^2\cdot 3 = 12$

2 Factors $\Rightarrow 2^2 = 4$, $2\cdot 3 = 6$

1 Factor $\Rightarrow 2, 3$

0 factors $\Rightarrow 1$.

Provem amb $x = 1$ fent Ruffini per veure si és arrel zero.

	2	4	-10	-8	12
1		2	6	-4	-12
	2	6	-4	-12	0

Per tant, 1 és arrel i per tant

$2x^4+4x^3-10x^2-8x+12 = (x-1)\cdot(2x^3+6x^2-4x-12)$

Volem cercar les arrels zeros de $2x^3+6x^2-4x-12$

	2	6	-4	-12
1		2	8	4
	2	8	4	-8

1 no és arrel

	2	6	-4	-12
-1		-2	-4	8
	2	4	-8	-4

-1 no és arrel

	2	6	-4	-12
2		4	20	32
	2	10	16	20

2 no és arrel

	2	6	-4	-12
-2		-4	-4	16
	2	2	-8	4

-2 no és arrel.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ 3 & & 6 & 36 & 96 \\ \hline & 2 & 12 & 32 & \boxed{84} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -4 & -12 \\ -3 & & -6 & 0 & 12 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

3 no és arrel

-3 és arrel

$$\Rightarrow 2x^4+4x^3-10x^2-8x+12 = (x-1)\cdot(x+3)\cdot(2x^2-4)$$

$$2x^2-4=0$$
$$2x^2=4$$
$$x^2=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2x^4+4x^3-10x^2-8x+12 = \boxed{2\cdot(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}$$

f) $-x^3+x^2+4x-4$

$Div(4)=\{\pm1, \pm2, \pm4\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & -1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 és arrel.

$$-x^3+x^2+4x-4 = (x-1)\cdot(-x^2+4)$$

$$-x^2+4=0$$
$$-x^2=-4$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm2$$

$$\Rightarrow -x^3+x^2+4x-4 = -1\cdot(x-1)\cdot(x-2)(x+2)$$

g) $-5x^4+20x^2-20$

Si feim el canvi $t=x^2$, obtenim una equació biquadrada

$$-5t^2+20t-20=0$$

$$t=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot(-5)\cdot(-20)}}{2\cdot(-5)}=\frac{-20\pm 0}{-10}\begin{cases}2\\2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 2 és arrel doble

$$\Rightarrow -5t^2+20t-20=-5(t-2)\cdot(t-2)$$

Si ara desfeim el canvi $t=x^2$

$$\Rightarrow -5x^4+20x^2-20=-5(x^2-2)\cdot(x^2-2)$$

$$x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2-2=(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow -5x^4+20x^2-20=-5(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Reordenant això és igual a

$$-5(x-\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$
$$=-5(x-\sqrt{2})^2\cdot(x+\sqrt{2})^2$$

<u>Reflexió</u>: Si haguéssim provat de fer Ruffini amb el polinomi original per cercar les arrels enteres, no haguéssim obtingut cap resta 0 perquè el polinomi <u>no</u> té arrels enteres ($\pm\sqrt{2}$ són les seves arrels)

h) $3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x$

Treiem factor comú:

$$3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x = x\,(3x^3 - 6x^2 - 27x + 54)$$

Millor però:

$$3x\,(x^3 - 2x^2 - 9x + 18)$$

ja que els divisors de 18 són més pocs que els de 54.

$\text{Div}(18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$18 = 3^2 \cdot 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 1 & & 1 & -1 & -10 \\ \hline & 1 & -1 & -10 & \boxed{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ -1 & & -1 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & \boxed{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2 és arrel.

$\Rightarrow 3x\,(x^3 - 2x^2 - 9x + 18) = 3x\,(x-2)(x^2-9)$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$\Rightarrow 3x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 54x = 3x\,(x-2)(x-3)(x+3)$

42) Resolem les equacions següents:

a) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

Calculem primer el valor del determinant:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = (x-2)x^2 - x(1-2x)$$
$$= x^3 - 2x^2 - x + 2x^2$$
$$= x^3 - x$$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

Per tant, les solucions són $x=0$, $x=1$, i $x=-1$.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Si diem Δ al determinant, tenim que:

$\Delta = 3 - 2a - 1 = -2a + 2$

$\Delta = 0 \Rightarrow -2a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2}{-2} = \boxed{1}$

c) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a+6)(a-1) - 6(a-1)$

$= 3a - 3 + a^2 - a + \cancel{6a} - \cancel{6} - \cancel{6a} + \cancel{6}$

$= a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$

$\Rightarrow a = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$ $\begin{cases} \boxed{1} \\ \boxed{-3} \end{cases}$

73) Per a quin valor de x s'anul·la el determinant següent?

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (-x)^3 + x + x$$

$$= -x^3 + 2x = 0$$

$$\hookrightarrow x(-x^2+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

o bé

$$-x^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Per a $x = 0$ i $x = \pm\sqrt{2}$

74) Resoleu l'equació:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}}_{} = 0$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

75) Trobeu en funció de a, el valor del determinant.

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + a^3 + a^3 - a^2(a+1) - a^2(a+1) - a^2(a+1)$$

$$= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + 2a^3 - 3a^2(a+1)$$

$$= \cancel{a^3} + \cancel{3a^2} + 3a + 1 + \cancel{2a^3} - \cancel{3a^3} - \cancel{3a^2}$$

$$= 3a + 1$$

76) Trobeu en funció de a el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a \\ a & a+1 & 1 \\ a+2 & a & a+1 \end{vmatrix}$$ i digueu quan val 0

Diem Δ al determinant

$$\Delta = (a+1)^3 + (a+2)^2 + a^3 - a(a+1)(a+2) - (a+2)a(a+1) - a(a+1)$$

$$= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^3 - (a^3 + 3a^2 + 2a) - (a^3 + 3a^2 + 2a) - (a^2 + a)$$

$$= \cancel{a^3} + \cancel{3a^2} + \underline{3a} + 1 + \cancel{a^2} + \underline{4a} + 4 + \cancel{a^3} - \cancel{a^3} - \underbrace{3a^2} - \underline{2a} - \cancel{a^3} - \cancel{3a^2} - \underline{2a} - \cancel{a^2} - \underline{a} = -3a^2 + 2a + 5$$