VIB.

MATRIUS

77) Calculeu el valor de x perquè les matrius A i B siguin iguals, amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -x+4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A = B \Longrightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ -2 = -2 \\ -x+4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow -x = -4$ $\boxed{x = 4.}$

(simultàniament)

78) Calculeu $A-B$, $B-A$ i $-A+B$ amb

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1+1 & 0+2 & 3+3 \\ 0-5 & -4-4 & 2+5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -5 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -1+1 & -2-0 & -3-3 \\ 5-0 & 4+4 & -5-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

Noteu que $A - B = -(B-A)$, ja que tenen signes oposats. És a dir $A-B$ i $B-A$ són matrius oposades.

$$-A+B = \begin{pmatrix} 1-1 & 0-2 & -3-3 \\ 0+5 & 4+4 & -2-5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

79) Calculeu

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 20 \\ 0 & 25 & 10 \\ 10 & -25 & -5 \end{pmatrix}$$

80) Escriviu les matrius traspostes de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 15 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 15 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

81) Calculeu els productes de les matrius següents:

a) $$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3×3 $\qquad$ 3×2

Les podem multiplicar i ens donarà una matriu d'ordre 3×2

$$\begin{pmatrix} -2\cdot(-1)+0+0 & -2\cdot 2+(-1)\cdot(-5)+0 \\ 3\cdot(-1)+0+2\cdot 3 & 3\cdot 2+5\cdot(-5)+2\cdot 2 \\ -4\cdot(-1)+0+6\cdot 3 & -4\cdot 2+0+6\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -15 \\ 22 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4+0 & 2-6 & 1-4 \\ 0+0 & 0-24 & 0-16 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 0 & -24 & -16 \end{pmatrix}$$

c) $$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}}$$

82) Calculeu, si en té, la matriu inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -3+15+10 = 22 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Com que $|A| \neq 0$, A té inversa.

Anem a calcular-la:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -15 & -1 & -5 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -15 & -1 & -5 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}^t}{22}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 7 & -15 & 9 \\ -1 & -1 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}}{22} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7/22 & \frac{-15}{22} & \frac{9}{22} \\ \frac{-1}{22} & \frac{-1}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{-5}{22} & \frac{-5}{22} & \frac{3}{22} \end{pmatrix}$$

[redacted]

83) Calcula la matriu inversa de B en funció del paràmetre α, on

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -24 + \alpha - 28 - 6$$

$$= \alpha - 58.$$

$\alpha - 58 = 0 \Rightarrow \alpha = 58.$

- Si $\alpha = 58 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow$ B no té inversa
- Si $\alpha \neq 58 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow$ B té inversa

$$\Rightarrow \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -7 & \alpha \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -7 & \alpha \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 4 & 1 \\ -28+\alpha & -8 & -2 \\ -21-3\alpha & -6+\alpha & 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -15 & -28+\alpha & -21-3\alpha \\ 4 & -8 & -6+\alpha \\ 1 & -2 & 13 \end{pmatrix}}{\alpha - 58}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-15}{\alpha-58} & \frac{\alpha-28}{\alpha-58} & \frac{-3\alpha-21}{\alpha-58} \\ \frac{4}{\alpha-58} & \frac{-8}{\alpha-58} & \frac{\alpha-6}{\alpha-58} \\ \frac{1}{\alpha-58} & \frac{-2}{\alpha-58} & \frac{13}{\alpha-58} \end{pmatrix}$$

84) Calculeu el valor del rang de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- Sabem que el rang d'aquesta matriu és $\leq \min\{2, 4\} = 2$.

- Mirem a veure si pot ser 2. Prenem un determinant qualsevol d'ordre 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 6 = 30 \neq 0.$$

Com que aquest menor és diferent de 0, llavors ~~ve~~ el rang és 2.

85) Calcular rg A en funció del paràmetre α, on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

. Sabem que $rg\, A \leq 3$. Vegem si pot ser 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -7 & \alpha \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -24 + \alpha - 28 - 6$$
$$= \alpha - 58.$$

$$\alpha - 58 = 0 \Rightarrow \alpha = 58.$$

- Si $\alpha \neq 58 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3$
- Si $\alpha = 58 \Rightarrow |A| = 0$ i $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 58 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

i $rg\, A \neq 3$. Mirem si $rg\, A$ ~~és~~ és 2.
Per això hem de trobar un menor d'ordre 2 que no s'anul·li.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 7 = 13 \neq 0$$

Com que $\Delta \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$.

En conclusió, si $\alpha \neq 58 \Rightarrow rg\, A = 3$ i si $\alpha = 58 \Rightarrow rg\, A = 2$.

86) Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

calculeu, si és possible, AB i BA.

$\left.\begin{array}{l} A \text{ té ordre } 3\times 3 \\ B \text{ té ordre } 3\times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ AB es pot calcular i té ordre 3×2

BA no es pot calcular.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

87) Calculeu $3AA^t - 2I$, quan $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$3AA^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 39 & -12 & -15 \\ -12 & 15 & -9 \\ -15 & -9 & 42 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 37 & -12 & -15 \\ -12 & 13 & -9 \\ -15 & -9 & 40 \end{pmatrix}$$

88) Comproveu que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ amb les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 30 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 30 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \; , \; B^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 30 & 24 \end{pmatrix}$$

Per tant, efectivament $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

89) Determineu els valors de m per als quals es verifica que $X^2 - \frac{5}{2} X + I = 0$, amb $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si X verifica l'equació matricial, llavors:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} m & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - \frac{5}{2} m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La igualtat de matrius implica la igualtat d'element a element. Per tant

$$m^2 - \frac{5}{2} m + 1 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0$$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Els valors de m cercats són 2 i $\frac{1}{2}$.

90) Determinau a i b de forma que es verifiqui $A^2 = A$ amb $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$

Si A verifica l'equació matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

Per tant, $\left.\begin{array}{l} 4-a = 2 \\ -2-b = -1 \\ 2a+ab = a \\ -a+b^2 = b \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -2+1 = -1 \end{array}$

(Això és un sistema d'equacions. S'han de verificar les igualtats simultàniament)

Hem de comprovar si es verifiquen les altres equacions:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 \text{ ?} \\ 4 - 2 = 2 \text{ sí} \\ -2 + (-1)^2 = -1 \text{ ?} \\ -2 + 1 = -1 \text{ sí} \end{array}\right)$$

Per tant el sistema té solució
$a = 2$
$b = -1$.

Aleshores els valors exactes són $a=2$ i $b=-1$.

NOTA. Si A verifica que $A^2=A$ es diu que la matriu és idempotent.

91) Trobeu totes les matrius X de la forma:

$$X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$ tals que

$$X^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X\cdot X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \Rightarrow a=\pm\sqrt{1}=\pm 1. \\ a+b=0 \\ b^2=1 \Rightarrow b=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \\ b+c=0 \\ c^2=1 \Rightarrow c=\pm\sqrt{1}=\pm 1. \end{cases}$$

Si $a=+1 \Rightarrow a+b=0$ implica que $1+b=0 \Rightarrow b=-1$
i $b+c=0$ " " $-1+c=0 \Rightarrow c=1$

Si $a=-1 \Rightarrow -1+b=0 \Rightarrow b=1$
$1+c=0 \Rightarrow c=-1.$

Per tant, tenim dues matrius:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que compleixen amb la condició donada.

92) Calcula dos nombres reals m i n tals que
$A + mA + nI = 0$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m & m \\ 2m & 3m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2m+n+2 & m+1 \\ 2m+2 & 3m+n+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m+n+2 = 0 \\ m+1 = 0 \Rightarrow m = -1 \\ 2m+2 = 0 \Rightarrow m = -1. \\ 3m+n+3 = 0 \end{cases}$$

$2\cdot(-1)+n+2 = 0$

$\Downarrow$

$n = 0$

$\downarrow$

$3\cdot(-1) + 0 + 3 = 0$ sí.

$\Rightarrow \boxed{m = -1 \text{ i } n = 0}$

93) Siguin A i B les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trobeu les condicions que han de complir els coeficients a, b i c perquè es verifiqui que $AB = BA$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} 5a+2c = 5a+2b \\ 5b+2c = 5b+2a \\ 5c+2a = 5c+2c \\ 2b+5c = 2c+5c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} c=b \\ c=a \\ a=c \\ b=c. \end{array} \Rightarrow a=b=c$$

Per tant, $a = b = c = X$ un nombre qualsevol.

94) Trobeu dues matrius X i Y que verifiquin el sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Podem reescriure el sistema matricial com:

$$\left\{\begin{aligned} 2X - 3Y &= A \\ X - Y &= B \end{aligned}\right.$$

De la segona equació, tenim que $X = B + Y$.
Per tant, substituint a la primera equació:

$$2(B+Y) - 3Y = A$$
$$2B + 2Y - 3Y = A$$
$$2B - 1Y = A$$
$$-1Y = A - 2B$$
$$Y = -A + 2B$$

I, per tant, $X = B + Y = B - A + 2B$
$= -A + 3B$.

Per tant,
$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

95) Calculeu, si és possible, la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$|A| = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ A no té inversa

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3 \neq 0 \rightarrow$ A té inversa.

$Adj(B) = \begin{pmatrix} |3| & -|3| \\ -|2| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Per tant, $B^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{-3} = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-3}$

$= \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ +1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -30 - 12 + 27 + 45 - 36 + 6$

$= 0$

$\Rightarrow$ C no té inversa

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 24 + 36 + 60 - 6 + 12$$
$$= 73 \neq 0$$

$\Rightarrow D^{-1}$ existeix.

$$\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -15 & 24 \\ 10 & -11 & 3 \\ 12 & 16 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 \\ -15 & -11 & 16 \\ 24 & 3 & -11 \end{pmatrix}}{73} = \begin{pmatrix} \frac{7}{73} & \frac{10}{73} & \frac{12}{73} \\ \frac{-15}{73} & \frac{-11}{73} & \frac{16}{73} \\ \frac{24}{73} & \frac{3}{73} & \frac{-11}{73} \end{pmatrix}$$

96) Calculeu la matriu inversa de cadascuna de les matrius següents:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

$|A| = -a - 6$

$-a - 6 = 0 \Rightarrow a = -6.$

- Si $a = -6 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A$ no té inversa.

- Si $a \neq -6 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$ té inversa.

En aquest cas, la podem calcular

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} a & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} a & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}{-a-6} = \begin{pmatrix} \frac{a}{-a-6} & \frac{-2}{-a-6} \\ \frac{-3}{-a-6} & \frac{-1}{-a-6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-a}{a+6} & \frac{2}{a+6} \\ \frac{3}{a+6} & \frac{1}{a+6} \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 3 & b & 6 \end{vmatrix} = -30 - 12 + 9b + 45 - 36 + 2b$$

$$= 11b - 33$$

$11b - 33 = 0 \Rightarrow b = 3.$

- Si $b = 3 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow B$ no té inversa
- Si $b \neq 3 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow B$ té invers.

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ b & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ b & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -30+2b & -24 & 3b+15 \\ -12+3b & -3 & -b+6 \\ 11 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -30+2b & -12+3b & 11 \\ -24 & -3 & 11 \\ 3b+15 & -b+6 & -11 \end{pmatrix}}{11b-33}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-30+2b}{11b-33} & \frac{-12+3b}{11b-33} & \frac{11}{11b-33} \\ \frac{-24}{11b-33} & \frac{-3}{11b-33} & \frac{11}{11b-33} \\ \frac{3b+15}{11b-33} & \frac{-b+6}{11b-33} & \frac{-11}{11b-33} \end{pmatrix}$$

Com que $11b-33 = 11(b-3)$, podem simplificar, opcionalment, algunes expressions.

$$= \begin{pmatrix} \frac{2(b-15)}{11(b-3)} & \frac{3(b-4)}{11(b-3)} & \frac{1}{b-3} \\ \frac{-24}{11(b-3)} & \frac{-3}{11(b-3)} & \frac{1}{b-3} \\ \frac{3(b+5)}{11(b-3)} & \frac{-b+6}{11(b-3)} & \frac{-1}{b-3} \end{pmatrix}$$

97) Digueu en funció dels paràmetres corresponents quan les matrius següents són regulars. En cas de ser-ho, trobeu la seva inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{pmatrix}$

- Calculem primer $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} = (\alpha+2)^3 + 1 + 1 - (\alpha+2) - (\alpha+2) - (\alpha+2)$$

$$= \alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8 + 2 - 3(\alpha+2)$$

$$= \alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 10 - 3\alpha - 6$$

$$= \alpha^3 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4$$

$$(\alpha+2)^3 = 1\alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot 2 + 3\alpha \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$$

$$= 1\alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8$$

els coeficients són la fila 4 ($n=3$) del triangle de Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \leftarrow n=0 \\ & & 1 & & 1 & & \leftarrow n=1 \\ & 1 & & 2 & & 1 & \leftarrow n=2 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \leftarrow n=3 \end{array}$$

- Volem saber quan $|A| = 0$. Trobem les arrels senceres del polinomi en qüestió.

$Div(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 6 & 9 & 4 \\ 1 & & 1 & 7 & 16 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & \boxed{20} \end{array} \Rightarrow 1 \text{ \underline{no} és arrel}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 6 & 9 & 4 \\ -1 & & -1 & -5 & -4 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -1 \text{ és arrel}$$

i

$$\alpha^3 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4 = (\alpha+1)(\alpha^2 + 5\alpha + 4)$$

$$\alpha^2 + 5\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$= \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow |A| = 0$ si i només si $\alpha = -1$ o $\alpha = -4$.

A més, per Ruffini, $|A| = (\alpha+1)^2(\alpha+4)$

- Si $\alpha \neq -1$ i $\alpha \neq -4 \Rightarrow A$ és regular.

Calculem en aquest cas la seva inversa

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 \\ 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \alpha+2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 \\ 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 \\ 1 & \alpha+2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha+2)^2 & -(\alpha+1) & -\alpha-1 \\ -(\alpha+1) & (\alpha+2)^2 & -(\alpha+1) \\ -\alpha-1 & -(\alpha+1) & (\alpha+2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2\cdot(\alpha+4)} & \frac{-(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} & \frac{-(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} \\ \frac{-(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} & \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} & \frac{-(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} \\ \frac{-(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} & \frac{-(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} & \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} \end{pmatrix}$$

$x-1$

$-(\alpha+1)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} & \frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha+4)} & \frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha+4)} \\ \frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha+4)} & \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} & \frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha+4)} \\ \frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha+4)} & \frac{-1}{(\alpha+1)(\alpha+4)} & \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2(\alpha+4)} \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$|A| = a^2 - 2 + 1 + \cancel{a} - \cancel{a} - 2 = a^2 - 3$$

$$a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

- Si $a \neq \sqrt{3}$; $a \neq -\sqrt{3} \Rightarrow |A| \neq 0$

$\Rightarrow$ A es regular.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2-2 & -a-2 & 1+a \\ -a+1 & a+1 & -2 \\ 2-a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2-2 & -a-2 & a+1 \\ -a+1 & a+1 & -2 \\ -a+2 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a^2-2}{a^2-3} & \frac{-a+1}{a^2-3} & \frac{-a+2}{a^2-3} \\ \frac{-a-2}{a^2-3} & \frac{a+1}{a^2-3} & \frac{-1}{a^2-3} \\ \frac{a+1}{a^2-3} & \frac{-2}{a^2-3} & \frac{a-1}{a^2-3} \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = -4 - 10a - 72 + 40 - 12 - 6a$$
$$= -16a - 48 = 0 \Rightarrow a = -3$$

- Si $a \neq -3 \Rightarrow A$ es regular.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & a \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & a \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+6a & -6-5a & -8 \\ -28 & 18 & -16 \\ 2a-8 & a+12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4+6a}{-16a-48} & \frac{-28}{-16a-48} & \frac{2a-8}{-16a-48} \\ \frac{-6-5a}{-16a-48} & \frac{18}{-16a-48} & \frac{a+12}{-16a-48} \\ \frac{-8}{-16a-48} & \frac{-16}{-16a-48} & \frac{-8}{-16a-48} \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \alpha+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = 2\alpha + 14(\alpha+1) - 18 + 14 - 6 - 6\alpha(\alpha+1)$$

$$= \underbrace{2\alpha} + \underbrace{14\alpha} + 14 - 18 + 14 - 6 - 6\alpha^2 - \underbrace{6\alpha}$$

$$= -6\alpha^2 + 10\alpha + 4.$$

$$-6\alpha^2 + 10\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-6) \cdot 4}}{2 \cdot (-6)}$$

$$= \frac{-10 \pm 14}{-12} \left\langle \begin{array}{l} -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \\ 2 \end{array} \right.$$

Si $\alpha \neq 2$ i $\alpha \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow A$ és regular.

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & \alpha+1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & \alpha+1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & \alpha+1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 3 & \alpha+1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6\alpha-4 & +7\alpha+4 & 4 \\ -8 & \alpha+7 & -6\alpha+14 \\ 2\alpha+4 & -\alpha(\alpha+1)-3 & -2\alpha-6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-6\alpha-4}{-6\alpha^2+10\alpha+4} & \frac{-8}{-6\alpha^2+10\alpha+4} & \frac{2\alpha+4}{-6\alpha^2+10\alpha+4} \\ \frac{7\alpha+4}{-6\alpha^2+10\alpha+4} & \frac{\alpha+7}{-6\alpha^2+10\alpha+4} & \frac{-\alpha(\alpha+1)-3}{-6\alpha^2+10\alpha+4} \\ \frac{4}{-6\alpha^2+10\alpha+4} & \frac{-6\alpha+14}{-6\alpha^2+10\alpha+4} & \frac{-2\alpha-6}{-6\alpha^2+10\alpha+4} \end{pmatrix}$$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a-1 & -2 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = -2 - a + (a-1)(a+1) + 2 - a(a-1) + a + 1$$

$$= \cancel{-2} \cancel{-a} + \cancel{a^2} \cancel{-1} \cancel{+2} - \cancel{a^2} + a \cancel{+a} \cancel{+1} = a$$

Si $a \neq 0 \Rightarrow A$ es regular.

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & 1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ a-1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+a+1 & -a+1-1 & (a-1)(a+1)+2 \\ -a+a+1 & 0 & -a-1+a \\ -a+2 & 1+a-1 & -2-a(a-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-1 & -a & a^2+1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -a+2 & a & -a^2+a-2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{-a+2}{a} \\ \frac{-a}{a} & 0 & \frac{a}{a} \\ \frac{a^2+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{-a^2+a-2}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{-a+2}{a} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{a^2+1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{-a^2+a-2}{a} \end{pmatrix}$$

f) $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 2m^2 + 2m^2 - 4m^2 = 0 \Rightarrow$ Independentment de m, $|A|$ sempre dóna $0 \Rightarrow A$ no té inversa.

$\Rightarrow A$ no és regular $\Rightarrow$ No podem trobar la seva inversa (perquè no en té).

g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 4 & 4 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = \cancel{4m} + 2m - \cancel{4m} - m$
$= m$

Si $m \neq 0 \Rightarrow A$ és regular.
En aquest cas,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m & 4 \\ m & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m & 4 \\ m & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 3m & -2m \\ 1 & -m & m \\ 0 & m & -m \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{m} & \frac{1}{m} & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|A| = a+1 - a^2 - 1 = -a^2 + a = 0$

$a(-1a+1) = 0$

$\to a = 0$

$\to a = 1$

Si $a \neq 0$ i $a \neq 1 \Rightarrow A$ és regular.

En aquests casos, podem calcular A^{-1}:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ a+1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a+1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -a^2+a+1 & a \\ -a & a & a \\ 1 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{-a^2+a} & \frac{-a}{-a^2+a} & \frac{1}{-a^2+a} \\ \frac{-a^2+a+1}{-a^2+a} & \frac{a}{-a^2+a} & \frac{-1}{-a^2+a} \\ \frac{a}{-a^2+a} & \frac{a}{-a^2+a} & \frac{-a}{-a^2+a} \end{pmatrix}$$

[Podríem simplificar $\frac{a}{-a^2+a} = \frac{a}{a(-a+1)} = \frac{1}{-a+1}$.]

i) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = -4 + 6\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 + 6 - 8\lambda$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\Rightarrow$ no té solució.

$\Rightarrow |A| \neq 0$ sempre $\Rightarrow$ A sempre és regular

Sempre podem trobar A^{-1}.

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & \lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-2\lambda & 2+2\lambda & \lambda \\ 3+\lambda^2 & -4-\lambda^2 & -\lambda \\ 6-\lambda & -8+2\lambda & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-2\lambda}{\lambda^2+2} & \frac{3+\lambda^2}{\lambda^2+2} & \frac{6-\lambda}{\lambda^2+2} \\ \frac{2+2\lambda}{\lambda^2+2} & \frac{-4-\lambda^2}{\lambda^2+2} & \frac{-8+2\lambda}{\lambda^2+2} \\ \frac{\lambda}{\lambda^2+2} & \frac{-\lambda}{\lambda^2+2} & \frac{-2}{\lambda^2+2} \end{pmatrix}$$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \cancel{2} - \cancel{2} - 2a^3 + 2a - \cancel{2}a + \cancel{2}a$$

$$= -2a^3 + 2a = 0$$

$$2a(-a^2+1) = 0$$

$$\Gamma \; -2a^3+2a = -2a(a^2-1) = -2a(a-1)(a+1) \rfloor$$

$\rightarrow a = 0$

$\rightarrow -a^2+1=0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1.$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ i $a \neq -1 \Rightarrow A$ és regular.

Calculem A^{-1} en aquestes,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2a & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -a \\ 2a & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a & -2a-2 & 2a^2-2 \\ -1-a^2 & 2+2a & -2a+2 \\ -1+a & 2-2a^2 & 2-2a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{-2a(a-1)(a+1)} & \frac{-1-a^2}{-2a(a-1)(a+1)} & \frac{-1+a}{-2a(a-1)(a+1)} \\ \frac{-2a-2}{-2a(a-1)(a+1)} & \frac{2+2a}{-2a(a-1)(a+1)} & \frac{2-2a^2}{-2a(a-1)(a+1)} \\ \frac{2a^2-2}{-2a(a-1)(a+1)} & \frac{-2a+2}{-2a(a+1)(a-1)} & \frac{2-2a}{-2a(a-1)(a+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{-2a(a-1)} & \frac{a^2+1}{2a(a-1)(a+1)} & \frac{1}{-2a(a+1)} \\ \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{-a(a-1)} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{a(a+1)} \end{pmatrix}$$

k) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \cancel{-1} + 2k + k + \cancel{1} = 3k.$

Si $k \neq 0 \Rightarrow A$ és regular.

En aquest cas, Calculem A^{-1}.

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & +2 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ k & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -k+1 & k \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1+2k & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3k} & \frac{1}{k} & \frac{-1}{3k} \\ \frac{-k+1}{3k} & \frac{-1}{k} & \frac{1+2k}{3k} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e) $$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a^2 + 2 + \cancel{2a} - \cancel{2a} - a - 2a$$

$$= a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (2)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \Rightarrow A$ és regular.

Calculem, en aquest cas, A^{-1}.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-2 & -a+2 & 0 \\ 1 & a-2 & -a+1 \\ 2-2a & 0 & a^2-a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cancel{a-2}}{(a-1)\cancel{(a-2)}} & \frac{1}{(a-1)(a-2)} & \frac{-2\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a-2)} \\ \frac{-\cancel{(a-2)}}{(a-1)\cancel{(a-2)}} & \frac{\cancel{a-2}}{(a-1)\cancel{(a-2)}} & 0 \\ 0 & \frac{-\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a-2)} & \frac{a\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a-2)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a-1} & \frac{1}{(a-1)(a-2)} & \frac{-2}{a-2} \\ \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a-2} & \frac{a}{a-2} \end{pmatrix}$$

m) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = a^2 + 2a + \cancel{2a} - a^3 - 2 - \cancel{2a}$$

$$= -a^3 + a^2 + 2a - 2 = 0$$

$\text{Div}(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$

	-1	1	2	-2
1		-1	0	2
	-1	0	2	$\boxed{0}$

$$-a^3 + a^2 + 2a - 2$$
$$= (a-1)(-a^2+2)$$

$$-a^2 + 2 = 0$$
$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Si $a \neq 1$ i $a \neq \sqrt{2}$, $a \neq -\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ A es regular.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-2 & -2+2a & 2-a^2 \\ a-1 & a-a^2 & 0 \\ 2-a^2 & 0 & a^2-2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a-2}{(a-1)(-a^2+2)} & \frac{1}{-a^2+2} & \frac{1}{a-1} \\ \frac{2}{-a^2+2} & \frac{-a}{-a^2+2} & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{-1}{a-1} \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$

$$|A| = a^3 + \cancel{2a} + 4 - 2a^2 - \cancel{2a} - 2a$$

$$= a^3 - 2a^2 - 2a + 4 = 0$$

$\mathrm{Div}(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & & 1 & -1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & \boxed{1} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & & -1 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & & 2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2 és arrel.

$$a^3 - 2a^2 - 2a + 4$$
$$= (a-2)(a^2-2)$$
$$= (a-2)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$$

$\Rightarrow$ Si $a \neq 2$, $a \neq \sqrt{2}$, $a \neq -\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ A és regular.

En aquest casos, calculam A^{-1}.

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ a & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 2 \\ a & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2-2 & 0 & 2-a^2 \\ -(a-2) & a^2-2a & 0 \\ 2-2a & -(2a-4) & a^2-2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a^2-2} & \frac{2-2a}{(a-2)(a^2-2)} \\ 0 & \frac{a}{a^2-2} & \frac{-2}{a^2-2} \\ \frac{-1}{a-2} & 0 & \frac{1}{a-2} \end{pmatrix}$$

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4a \end{pmatrix}$

$$|A| = 4a^3 \cancel{-1} \cancel{+1} - a + 4a - a$$

$$= 4a^3 + 2a = 0$$

$$2a(2a^2+1) = 0$$

$\to a = 0$

$\to 2a^2+1 = 0$

$a^2 = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$ no té solució.

Si $a \neq 0 \Rightarrow A$ és regular.

En aquest cas, podem calcular A^{-1}?

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 4a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 4a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4a^2-1 & -4a+1 & 1-a \\ 4a+1 & 4a^2-1 & -a-1 \\ -1-a & -a+1 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4a^2-1}{4a^3+2a} & \frac{4a+1}{4a^3+2a} & \frac{-1-a}{4a^3+2a} \\ \frac{-4a+1}{4a^3+2a} & \frac{4a^2-1}{4a^3+2a} & \frac{-a+1}{4a^3+2a} \\ \frac{1-a}{4a^3+2a} & \frac{-a-1}{4a^3+2a} & \frac{a^2+1}{4a^3+2a} \end{pmatrix}$$

p) $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$

$$|A| = k^3 - 1 - k - \cancel{k} + k^2 + \cancel{k}$$

$$= k^3 + k^2 - k - 1 = 0$$

$\mathrm{Div}(1) = \{\pm 1\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad |A| = (k-1)(k^2+2k+1)$$

$$= (k-1)(k+1)^2 = 0$$

$\to k = 1$

$\to k = -1.$

Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow A$ es regular.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & -1 \\ k & k \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k^2+1 & -(k^2-1) & -2k \\ k-1 & k^2-1 & k-1 \\ -(k+1) & 0 & k(k+1) \end{pmatrix}$$

$k^2-1 = (k-1)(k+1)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{k^2+1}{(k-1)(k+1)^2} & \dfrac{1}{(k+1)^2} & \dfrac{-1}{(k-1)(k+1)} \\ \dfrac{-1}{k+1} & \dfrac{1}{k+1} & 0 \\ \dfrac{-2k}{(k-1)(k+1)^2} & \dfrac{1}{(k+1)^2} & \dfrac{k}{(k-1)(k+1)} \end{pmatrix}$$

98) Calculeu el rang de cadascuna de les matrius següents:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 16 + 2 + 6 - 4 = 14 \neq 0$

Com que $|A| \neq 0 \Rightarrow$ hem trobat un menor no nul d'ordre 3 $\Rightarrow rg\, A = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 + 10 - 1 = 20 \neq 0$

Hem trobat un menor no nul d'ordre 3 $\Rightarrow rg\, B \geq 3$

$\mathcal{I}$ $rg\, B \leq \min\{3, 4\} = 3$

$\Longrightarrow rg\, B = 3.$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Sigui $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 40 - 10 - 30 \Rightarrow$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 30 - 10 - 10 - 30$$
$$= -20 \neq 0$$

Com que $\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow rg\ C = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Sabem que $rg\ D \leq 3$

Mirem si pot ser 3.

Sigui: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 3 - 14 - 4$$
$$= 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 - 4 = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -14 + 9 - 3 + 8$$
$$= 0$$

Com que tots els menors d'ordre 3 s'anul·len

$\Rightarrow rg\ D \neq 3$.

Mirem si $rg\, D = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2 = 5 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, D = 2$

99) Estudieu el rang de les matrius següents el valor del paràmetre que hi apareix:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|A| = 2a - 6 - a + 4 = a - 2$

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3$
- Si $a = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A \neq 3$.

Mirem si $rg\, A = 2$ o més petit.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, A = 2$

En conclusió si $a \neq 2 \Rightarrow rg\, A = 3$

si $a = 2 \Rightarrow rg\, A = 2$.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|B| = 12 + 12 - a^2 - 9a - 2a + 8$$

$$= -a^2 - 11a + 32$$

$$-a^2 - 11a + 32 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot (-1) \cdot 32}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{249}}{-2}$$

- Si $a \neq \frac{11 \pm \sqrt{249}}{-2} \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow rg\, B = 3$

- Si $a = \frac{11 + \sqrt{249}}{-2} \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow rg\, B \neq 3.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10 \neq 0 \Rightarrow rg\, B = 2$$

- Si $a = \frac{11 - \sqrt{249}}{-2} \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow rg\, B \neq 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow rg\, B = 2.$$

c) $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$

Sabem que $rg\ C \leq 2$

Sigui $\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1$

$-a^2 + 1 = 0 \Rightarrow 1 = a^2 \Rightarrow a = \pm 1$

- Si $a \neq +1,\ a \neq -1 \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow rg\ C = 2$
- Si $a = 1 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ <u>No</u> podem assegurar que $rg\ C \neq 2$, ja que hi ha altres menors d'ordre 2:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (1ª i 3ª columna)

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ (2ª, 3ª columna)

$\Rightarrow$ tots els menors d'ordre 2 són nuls.

$\Rightarrow rg\ C \neq 2$

És clar que $|1| = 1 \Rightarrow rg\ C = 1$

• Si $a = -1 \Rightarrow \Delta = 0$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, C = 2$

En conclusió,

• Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow rg\, C = 2$

• Si $a = 1 \Rightarrow rg\, C = 1$

• Si $a = -1 \Rightarrow rg\, C = 2$.

d) $D = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$

$$|D| = -t^3 + 1 + 1 + \cancel{t} - \cancel{t} - t$$
$$= -t^3 - t + 2 = 0$$

$Div(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

1 és arrel

$-t^3 - t + 2 =$

$(t - 1)(-t^2 - t - 2)$

$$-t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{-2} \quad \text{no té solució}$$

- Si $t \neq 1 \Rightarrow |D| \neq 0 \Rightarrow rg\, D = 3$
- Si $t = 1 \Rightarrow |D| = 0 \Rightarrow rg\, D \neq 3$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg\, D = 2.$$

e) $$E = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$$

$$|E| = t^3 + \cancel{4t} - 2t - \cancel{4t} = t^3 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow t(t^2 - 2) = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

- Si $t \neq 0$ i $t \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow |E| \neq 0 \Rightarrow rg\, E = 3$
- Si $t = 0 \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg\, E = 2$$

- Si $t = \sqrt{2} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\, E = 2$$

- Si $t = -\sqrt{2} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg\, E = 2$$

En conclusió, si $t \neq 0$ i $t \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow rg\, E = 3$

altrament, $rg\, E = 2$.

VIB

CORRECCIÓ D'ERRORS

99 f) $F = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$

$|F| = (t+3)(t-1)^2 - 16 + 4(t+3)$

$= (t+3)(t^2-2t+1) - 16 + 4t + 12$

$= t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 6t + 3 - 16 + 4t + 12$

$= t^3 + t^2 - t - 1 = 0$

$Div(1) = \{\pm 1\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\downarrow$

$t^2 + 2t + 1.$

$t^3 + t^2 - t - 1$

$= (t-1)(t^2+2t+1)$

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$= \dfrac{-2 \pm 0}{2} < \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)(t+1)^2$

$\Rightarrow$ arrels 1 i -1.

- Si $t \neq 1$ i $t \neq -1 \Rightarrow |F| \neq 0 \Rightarrow rg\, F = 3$
- Si $t = 1 \Rightarrow |F| = 0 \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg\, F = 2$

• Si $t=-1 \Rightarrow |F|=0 \Rightarrow rg\, F \neq 3$

$$F=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$rg\, F = 2$$

g) $G=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Sabem que $rg\, G \leq 3$.

Sigui

$$\Delta = \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2+2+4-4t-4-t$$
$$= 2t^2-5t+2$$

$2t^2-5t+2=0$

$$t=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{5\pm 3}{4} \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

• Si $t\neq 2$ i $t\neq \frac{1}{2} \Rightarrow |\Delta| \neq 0 \Rightarrow rg\, G = 3$

• Si $t=2 \Rightarrow \Delta=0$, $G=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sigui

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+8+2-4-2-8=0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16+2+4-16-4-2=0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8+1+4-8-4-1=0$$

$\Rightarrow$ Tots els menors d'ordre 3 són nuls $\Rightarrow$ rg $B = 2$, ja que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$

100) Estudieu el rang de la matriu següent en funció de a, b i c:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|A| = 5b(a+b) + 5c(b+c) + 5a(a+c) - 5b(b+c) - 5a(a+b) - 5c(a+c)$$

$$= \cancel{5ab} + \cancel{5b^2} + \cancel{5bc} + \cancel{5c^2} + \cancel{5a^2} + \cancel{5ac} - \cancel{5b^2} - \cancel{5bc} - \cancel{5a^2} - \cancel{5ab} - \cancel{5ac} - \cancel{5c^2}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ rg $A \neq 3$

Sigui $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a.$

$5b - 5a = 0 \Rightarrow a = b.$

- Si $a \neq b \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$ rg $A = 2$

Si $a = b \Rightarrow \Delta = 0$

i $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & a & c \\ a+c & a+c & 2a \end{pmatrix}$

Sigui $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0$

$\Rightarrow c = a.$

$\hookrightarrow$ si $a \neq c \Rightarrow \Delta_2 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2$

$\hookrightarrow$ si $a = c \Rightarrow \Delta_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & a & a \\ 2a & 2a & 2a \end{pmatrix}$$

Clarament, tenim que tots els menors d'ordre 2 són 0, ja que tenen dues columnes iguals.

$\Rightarrow rg\ A \neq 2$

$|5| = 5 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 1.$

Per tant, en resum, si $a = b = c \Rightarrow rg\ A = 1$

altrament, $rg\ A = 2$.