VFB

Exercicis de geometria plana

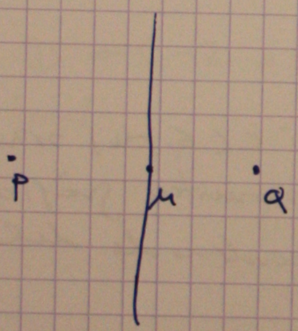
122) Calculeu les coordenades del punt mitjà del segment determinat pels punts $P(-3,7)$ i $Q(-5,3)$

Aplicant la teoria, tenim que el punt mitjà R serà igual a

$$R = \left(\frac{-3+(-5)}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = (-4, 5)$$

123) Donat el punt $P(0,-5)$, calculeu les coordenades del punt simètric de P respecte del punt $M(-1,12)$.

Si diem Q al punt simètric de P, tenim que M és el punt mitjà de P i Q.



Per tant, si $Q(x,y)$, llavors

$$M = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y-5}{2}\right)$$

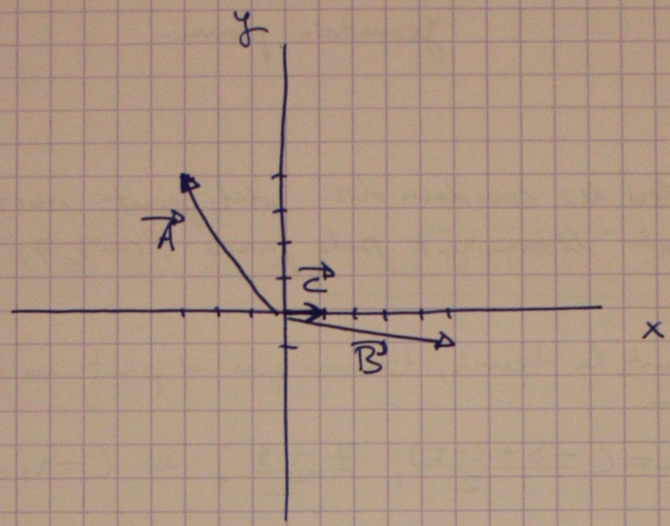
I al mateix temps, $M=(-1,12)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}, \frac{y-5}{2}\right) = (-1,12)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = -1 & \Rightarrow x = -2 \\ \frac{y-5}{2} = 12 & \Rightarrow y-5 = 24 \Rightarrow y = 29. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ El punt demanat és $Q = (-2, 29)$.

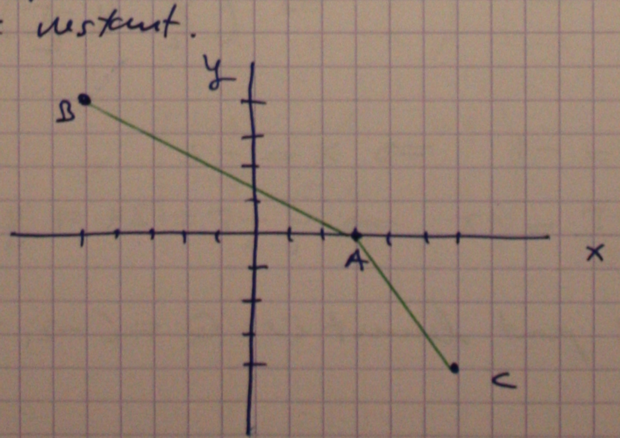
124) Representeu gràficament els vectors $\overrightarrow{A(-3,4)}$, $\overrightarrow{B(5,-1)}$ i $\overrightarrow{C(1,0)}$.



125) Calculeu les components del vector d'origen $P(-2,1)$ i que acaba en el punt $Q(-3,-5)$.

Ens demanen el vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(-3-(-2), -5-1)}$
$= \overrightarrow{(-1,-6)}$

126) Els punts $A(3,0)$, $B(-5,4)$ i $C(6,-4)$ són vèrtexs d'un paral·lelogram. Representeu gràficament aquests punts i calculeu les coordenades del vèrtex restant.



Per trobar el punt D farem el següent:

1) Calcularem el vector $\vec{AC}$
2) Situarem el vector $\vec{AC}$ amb origen B. El seu final serà el punt D.

Tot això ho podem fer perquè ABCD és un paral·lelogram i, per tant, $\vec{AC} = \vec{BD}$.

$$\vec{AC} = \overrightarrow{(6-3,\ -4-0)} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

Si $D = (x, y)$, llavors:

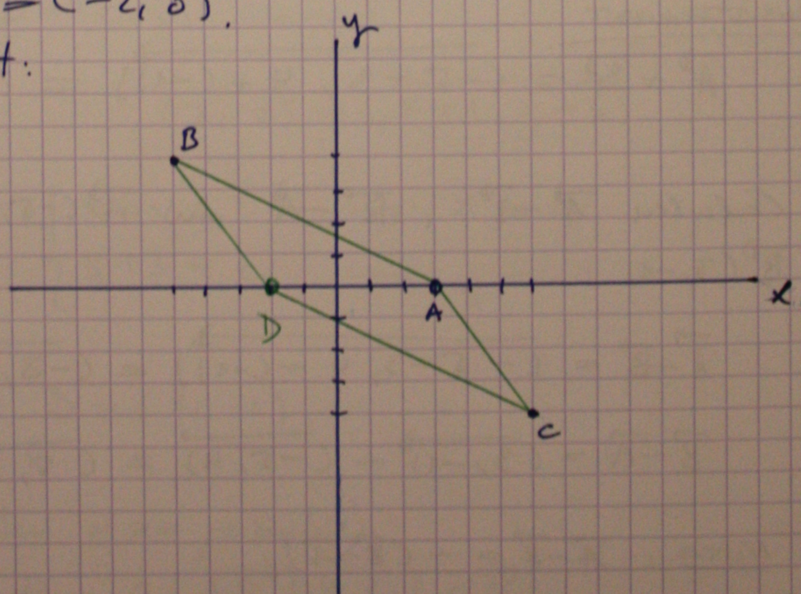
$$\vec{BD} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{(x+5,\ y-4)} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+5 = 3 \\ y-4 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ y = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow D = (-2, 0)$.

Per tant:



Per trobar el punt D farem el següent:

1) Calcularem el vector $\vec{AC}$
2) Situarem el vector $\vec{AC}$ amb origen B. El seu final serà el punt D.

Tot això ho podem fer perquè ABCD és un paral·lelogram i, per tant, $\vec{AC} = \vec{BD}$.

$$\vec{AC} = \overrightarrow{(6-3, -4-0)} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

Si $D = (x, y)$, llavors:

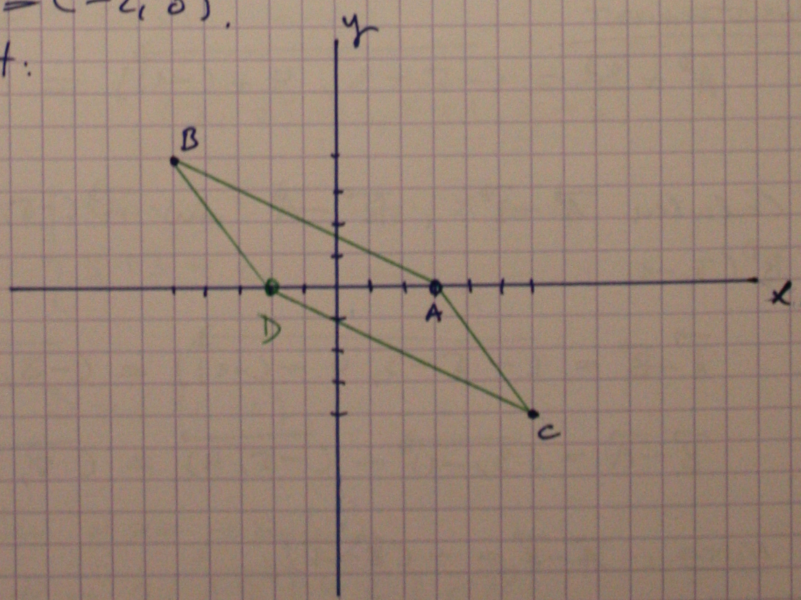
$$\vec{BD} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{(x+5, y-4)} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+5=3 \\ y-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-2 \\ y=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow D = (-2, 0).$$

Per tant:

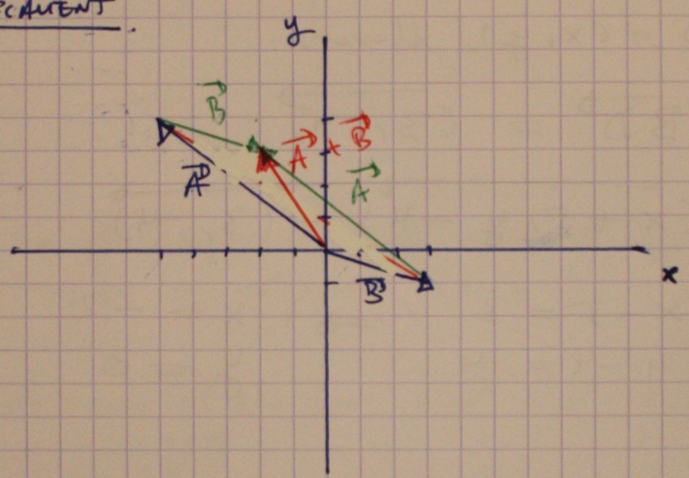


127) Calculeu el valor del mòdul del vector $\vec{A}(-5,1)$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}.$$

128) Calculeu gràficament i analíticament la suma dels vectors $\vec{A}(-5,4)$ i $\vec{B}(3,-1)$.

GRÀFICAMENT.



ANALÍTICAMENT.

$$\vec{A} + \vec{B} = (\overrightarrow{-5+3,\ 4+(-1)}) = (\overrightarrow{-2,3}).$$

129) Calculeu $\vec{A}-\vec{B}$ i $\vec{B}-\vec{A}$ amb $\vec{A}(-5,4)$ i $\vec{B}(3,-1)$

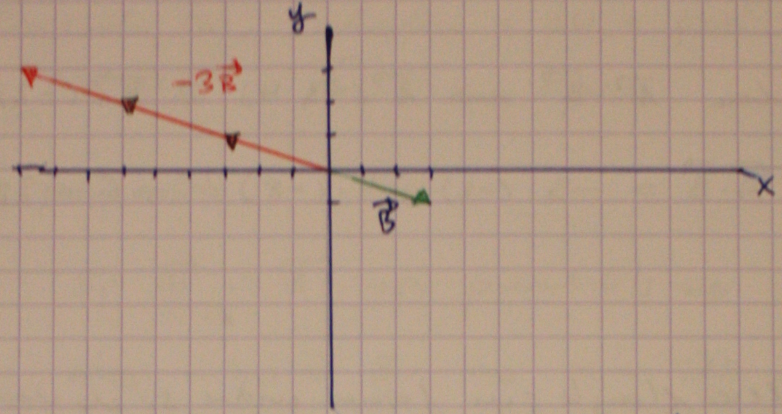
$$\vec{A}-\vec{B} = (\overrightarrow{-5-3,\ 4-(-1)}) = (\overrightarrow{-8,5})$$

$$\vec{B}-\vec{A} = (\overrightarrow{3,-1}) - (\overrightarrow{-5,4}) = (\overrightarrow{8,-5})$$

NOTA: $\vec{A}-\vec{B} = -(\vec{B}-\vec{A})$.

130) Calculeu gràficament i analíticament el producte $-3\cdot\vec{B}$ amb $\vec{B}(3,-1)$

GRÀFICAMENT.



ANALÍTICAMENT

$$-3\cdot\vec{B} = -3\cdot\overrightarrow{(3,-1)} = \overrightarrow{(-3\cdot 3,\ -3\cdot(-1))}$$
$$= \overrightarrow{(-9,\ 3)}$$

131) Determineu si els vectors següents són paral·lels entre sí:

a) $\vec{A}(1,-3)$ i $\vec{B}(5,-6)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{1} = 5 \\ \frac{-6}{-3} = 2 \end{array}\right\} \text{Com que } 5 \neq 2 \Rightarrow \vec{A} \text{ i } \vec{B}$$

<u>no</u> són paral·lels.

b) $\vec{C}(3,-1)$ i $\vec{D}(-6,2)$

$$\frac{-6}{3} = -2 = \frac{2}{-1} \Rightarrow \text{són paral·lels}$$

c) $\vec{E}(3,0)$ i $\vec{F}(5,0)$

En aquest cas, no podem dividir $\frac{0}{0}$, ja que la divisió entre 0 no existeix. Així, és veu que $\frac{5}{3}\vec{E} = \vec{F}$:

$$\frac{5}{3}\left(\overrightarrow{3,0}\right) = \left(\frac{5}{3}\cdot 3, \frac{5}{3}\cdot 0\right) = \overrightarrow{(5,0)} = \vec{F}$$

132) Calculeu $\vec{A}\cdot\vec{B}$ amb $\vec{A}(-3,4)$ i $\vec{B}(-2,-8)$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -3\cdot(-2) + 4\cdot(-8) = +6 - 32 = -26$$

133) Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\vec{A}(-2,-5)$ i $\vec{B}(-3,2)$.

Sabem que

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha$$

on α = angle que formen $\vec{A}$ i $\vec{B}$

Calculem cada part:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -2\cdot(-3) + (-5)\cdot 2$$

$$= +6 - 10 = -4$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Per tant,

$$-4 = \sqrt{29}\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\alpha$$

$$-4 = \sqrt{29\cdot 13}\cdot\cos\alpha$$

$$-4 = \sqrt{377}\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{377}} \simeq -0{,}206$$

$\Rightarrow \alpha = \arccos -0'206 = \boxed{101'88^\circ}$

134) En cada cas, calculeu x per a què els vectors $\vec{A}(8,-15)$ i $\vec{B}(2,x)$ siguin:

a) paral·lels.

Si $\vec{A}$ i $\vec{B}$ són paral·lels $\Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{x}{-15}$

$\Rightarrow -30 = 8x \Rightarrow x = \frac{-30}{8} = \boxed{-\frac{15}{4}}$

b) perpendiculars

$\vec{A}$ i $\vec{B}$ són perpendiculars $\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$\Rightarrow 8 \cdot 2 + (-15) \cdot x = 0$

$\Rightarrow 16 - 15x = 0 \Rightarrow -15x = -16$

$x = \frac{-16}{-15}$

$x = \boxed{\frac{16}{15}}$

c) formin un angle de 60°.

Si formen un angle de 60° $\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \frac{1}{2}$

$8 \cdot 2 + (-15) \cdot x = \sqrt{8^2 + (-15)^2} \cdot \sqrt{2^2 + x^2} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 16 - 15x = \sqrt{289} \cdot \sqrt{4 + x} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 32 - 30x = \sqrt{289} \cdot \sqrt{4 + x}$

$$32 - 30x = 17 \cdot \sqrt{4+x}$$

$$\frac{32-30x}{17} = \sqrt{4+x} \qquad (A)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{32-30x}{17}\right)^2 = 4+x$$

(elevant al quadrat cada membre de l'equació)

$$\Rightarrow \frac{(32-30x)^2}{289} = 4+x$$

$$\Rightarrow 900x^2 - 1920x + 1024 = 1156 + 289x$$

$$900x^2 - 2209x - 132 = 0$$

$$x = \frac{2209 \pm \sqrt{(-2209)^2 - 4 \cdot 900 \cdot (-132)}}{2 \cdot 900}$$

$$= \frac{2209 \pm \sqrt{4883413}}{1800}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2209 + 2209'84}{1800} = 2'51 \\[2ex] \dfrac{2209 - 2209'84}{1800} = -0'05 \end{cases}$$

D'aquests dos valors, només el segon verifica l'equació (A).

135) Donat el vector $\vec{A}(5,12)$, dóna

a) un vector paral·lel.

Qualsevol nombre per $\vec{A}$ donarà lloc a un vector paral·lel. Per exemple

$$2 \cdot \vec{A} = \overrightarrow{(10, 24)}.$$

b) un vector perpendicular.

Si $\vec{B}(x,y)$ és perpendicular $\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$$\Rightarrow \quad 5 \cdot x + 12 \cdot y = 0$$

Com que no tenim cap condició suplementària per x i y, podem prendre els valors que vulguem:

$$x = 2 \Rightarrow \quad 10 + 12y = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-10}{12} = \boxed{\frac{-5}{6}}$$

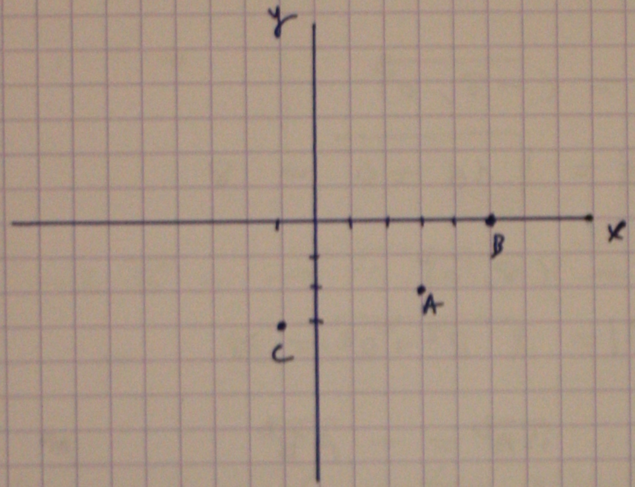
$$\Rightarrow \vec{B}\left(2, -\frac{5}{6}\right).$$

VFB

GEOMETRIA PLANA

EXERCICIS PROPOSATS.

147) Els punts $A(3,-2)$, $B(5,0)$ i $C(-1,-3)$ són vèrtexs d'un paral·lelogram. Calculeu la posició de l'altre vèrtex. I trobeu el seu perímetre.



Com que és un paral·lelogram, sabem que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Si $D=(x,y)$, llavors

$$\overrightarrow{(2,2)} = \overrightarrow{(x+1,\ y+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 2 & \Rightarrow x = 1 \\ y+3 = 2 & \Rightarrow y = -1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = (1,-1).$$

Per trobar el seu perímetre:

$$P = 2|\overrightarrow{AB}| + 2|\overrightarrow{CA}|$$

$$= 2|\overrightarrow{(2,2)}| + 2|\overrightarrow{(4,1)}|$$

$$= 2\sqrt{2^2+2^2} + 2\sqrt{4^2+1^2}$$

$$= 2\sqrt{8} + 2\sqrt{17} = 2(\sqrt{8} + \sqrt{17})$$

148) Donats els punts $A(3,1)$, $B(-5,1)$, $C(-4,-2)$, $D(0,-3)$, calculeu analíticament les components i els mòduls dels vectors:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-8, 0)}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+0} = 8$

b) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{(8, 0)}$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{8^2+0^2} = 8$

<u>NOTA</u>: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(1, -3)}$

d) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{(-1, 3)}$

e) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(4, -1)}$

f) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{(-3, -4)}$

g) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{(5, -4)}$

h) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{(7, 3)}$

149) Calculeu l'extrem del vector $\overrightarrow{AB} = (3,-4)$ si sabem que el seu origen és donat al punt $A(2,-5)$

Sigui $C = (x,y)$ l'extrem de $\overrightarrow{AB}$

Llavors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

$$\overrightarrow{(x-2,\ y+5)} = \overrightarrow{(3,-4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=3 & \Rightarrow x=5 \\ y+5=-4 & \Rightarrow y=-9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'extrem final és $(5,-9)$.

b) Trobeu l'origen del vector $\overrightarrow{CD} = (-5,1)$ si sabem que el seu extrem final és donat pel punt $D(-5,2)$

Sigui $C=(x,y)$.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(-5,1)}$$

$$\overrightarrow{(-5-x,\ 2-y)} = \overrightarrow{(-5,1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5-x=-5 & \Rightarrow x=0 \\ 2-y=1 & \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $C=(0,1)$.

150) Donats els punts $A(3,0)$, $B(2,3)$, $C(-2,1)$ i $D(7,2)$, esbrineu si els vectors següents són equipol·lents:

a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.

Sabem que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1,3)}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(9,1)}$ $\qquad \frac{9}{-1} = -9 \neq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ No.

b) $\vec{AC}$, $\vec{DB}$

$\vec{AC} = \overrightarrow{(-5, 1)}$
$\vec{DB} = \overrightarrow{(-5, 1)}$

Són iguals. Per tant, són equipolents.

c) $\vec{BC}$, $\vec{DA}$

$\vec{BC} = \overrightarrow{(-4, -2)}$
$\vec{DA} = \overrightarrow{(-4, -2)}$

Són iguals, per tant equipolents

151) Les coordenades del punt A són el doble de les del punt B. Sabent que $\vec{AB} = \overrightarrow{(-2, 5)}$, calculeu les coordenades dels punts A i B.

$A = (2x, 2y)$
$B = (x, y)$

per l'enunciat

$\vec{AB} = \overrightarrow{(-2, 5)} \Rightarrow \overrightarrow{(x-2x, y-2y)} = \overrightarrow{(-2, 5)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{(-x, -y)} = \overrightarrow{(-2, 5)} \Rightarrow$ $x = 2$
$y = -5$

$\Rightarrow$ $A = (4, -10)$
$B = (2, -5)$

152) Donats els vectors $\vec{u} = \overrightarrow{(7, -4)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-5, -2)}$ i $\vec{w} = \overrightarrow{(-6, 0)}$, calculeu:

a) $5\vec{u} - 2\vec{v} = 5\overrightarrow{(7, -4)} - 2\overrightarrow{(-5, -2)}$

$= (\overrightarrow{35,-20}) + (\overrightarrow{10,4}) = (\overrightarrow{45,-16})$

El seu mòdul és $\sqrt{45^2+(-16)^2} = \sqrt{2281}$.

b) $3\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{w} = (\overrightarrow{21,-12}) + (\overrightarrow{4,0}) = (\overrightarrow{25,-12})$

el seu mòdul és $\sqrt{25^2+(-12)^2} = \sqrt{769}$.

c) $-\vec{w} - 3(\vec{u} - \vec{v}) = (\overrightarrow{6,0}) - 3(\overrightarrow{12,-2})$

$= (\overrightarrow{6,0}) + (\overrightarrow{-36,6}) = (\overrightarrow{-30,6})$

el seu mòdul és $\sqrt{(-30)^2+6^2} = \sqrt{936}$

d) $-3\vec{v} + 5\vec{u} + \vec{w} = (\overrightarrow{15,6}) + (\overrightarrow{35,-20}) + (\overrightarrow{-6,0})$

$= (\overrightarrow{44,-14})$

el seu mòdul és $\sqrt{44^2+(-14)^2} = \sqrt{2132}$

153) Trobeu quatre vectors paral·lels i dues perpendiculars al vector $\vec{u}(-5,4)$. En podeu trobar d'unitaris?

Paral·lels.

Per exemple $2\cdot(\overrightarrow{-5,4}) = (\overrightarrow{-10,8})$

$3(\overrightarrow{-5,4}) = (\overrightarrow{-15,12})$

$-1(\overrightarrow{-5,4}) = (\overrightarrow{5,-4})$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{-5,4}) = (\overrightarrow{-\frac{5}{2},2})$

Si volem un vector unitari, hem de veure

Trim mòdul de $\vec{u}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2+4^2} = \sqrt{41}.$$

Per tant $\frac{1}{\sqrt{41}}\vec{u}$ serà un vector unitari, és a dir, $\overrightarrow{\left(\frac{-5}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}\right)}$ és un vector que cercam. De fet unitaris i paral·lels a $\vec{u}$, només n'hi ha dos:

$$\overrightarrow{\left(\frac{-5}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}\right)} \text{ i } \overrightarrow{\left(\frac{5}{\sqrt{41}}, \frac{-4}{\sqrt{41}}\right)}$$

PERPENDICULARS.

Si $\vec{v}(x,y)$ és perpendicular a $\vec{u}(-5,4)$, llavors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow -5x+4y=0$

- Si prenem $x=1 \Rightarrow y=\frac{5}{4}$

  $\Rightarrow \overrightarrow{\left(1, \frac{5}{4}\right)}$ és perpendicular a $\vec{u}$

- Si prenem $x=2 \Rightarrow y=\frac{10}{4}$

  $\Rightarrow \overrightarrow{\left(2, \frac{10}{4}\right)}$ és perpendicular a $\vec{u}$

- Si prenem $x=-1 \Rightarrow y=-\frac{5}{4}$

  $\Rightarrow \overrightarrow{\left(-1, -\frac{5}{4}\right)}$ és perpendicular a $\vec{u}$

Ara volem un vector perpendicular i unitari (o sigui ortonormal) a $\vec{u}$.

$\overrightarrow{\left(1, \frac{5}{4}\right)}$ era perpendicular.

Calculem el seu mòdul. Si fos 1, ja hauríem acabat:

$$\left|\overrightarrow{\left(1, \frac{5}{4}\right)}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{41}{16}}$$

$\Rightarrow$ el vector $\frac{1}{\sqrt{\frac{41}{16}}} \overrightarrow{\left(1, \frac{5}{4}\right)}$

$$= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{41}} \overrightarrow{\left(1, \frac{5}{4}\right)} = \overrightarrow{\left(\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{41}}, \frac{5\sqrt{16}}{4\sqrt{41}}\right)}$$

És el vector cercat.

154) Calculeu l'angle que formen els vectors següents i adreis conclusions sobre la seva direcció i sentit:

a) $\vec{u}(5,2)$, $\vec{v}(10,4)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 58$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{10^2+4^2} = \sqrt{116}$$

$\Rightarrow$ angle que formen és:

$58 = \sqrt{29} \cdot \sqrt{116} \cdot \cos\alpha$

$58 = 58 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 1$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow$ Tenen la mateixa direcció i sentit

$\Rightarrow$ Són proporcionals (es veu mirant les seves components)

b) $\vec{u}(-3, 15)$
$\vec{v}(2, -10)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 - 150 = -156$
$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 225} = \sqrt{234}$
$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 100} = \sqrt{104}$

$-156 = \sqrt{234} \cdot \sqrt{104} \cdot \cos\alpha$

$-156 = 156 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -1$

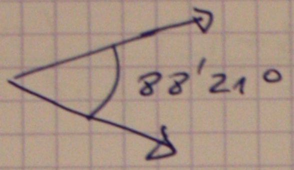
$\Rightarrow$ mateixa direcció però distint sentit

c) $\vec{u}(3, 4)$
$\vec{v}(-50, 40)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -150 + 160 = 10$
$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$|\vec{v}| = \sqrt{(-50)^2 + 40^2} = \sqrt{4100}$

$10 = 5 \cdot \sqrt{4100} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4100}} = \cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 88'21^\circ \Rightarrow$ diferent direcció



d) $\vec{u}(-3,4)$, $\vec{v}(-2,10)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 6 + 40 = 46$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}$$

$$46 = 5\cdot\sqrt{104}\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{46}{5\sqrt{104}} \simeq 0'902$$

$\Rightarrow \alpha \simeq 25'5^\circ \Rightarrow$ diferent direcció

155) Donats els punts $A(2,3)$ i $B(-5,4)$, dobeu els punts que divideixen el segment AB en dues parts iguals, en dues parts iguals i en quatre parts iguals.

a) el punt P que divideix AB en dues parts iguals és el punt mitjà de A i B

$$P = \left(\frac{2-5}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

b) Siguin P, Q els punts que divideixen al segment AB en dues parts iguals

Sabem que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AP}$

Per tant $\overrightarrow{(-7,1)} = 3\,\overrightarrow{(x-2, y-3)}$

si $P=(x,y)$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{(-7,1)} = \overrightarrow{(3x-6, 3y-9)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7 = 3x-6 \Rightarrow -1 = 3x = x = -\frac{1}{3} \\ 1 = 3y-9 \Rightarrow 3y = 10 \Rightarrow y = \frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{10}\right)$$

Ara sabem que $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$

$\Rightarrow$ si $Q = (x,y)$, llavors

$$\overrightarrow{(x-2, y-3)} = 2 \cdot \overrightarrow{\left(-\frac{7}{3}, -\frac{27}{10}\right)}$$

$$\overrightarrow{(x-2, y-3)} = \overrightarrow{\left(-\frac{14}{3}, -\frac{54}{10}\right)}$$

$$\overrightarrow{(x-2, y-3)} = \overrightarrow{\left(-\frac{14}{3}, -\frac{27}{5}\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = -\frac{14}{3} \Rightarrow 3x-6 = -14 \\ y-3 = -\frac{27}{5} \Rightarrow 5y-15 = -27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -8/3 \;, \; y = -12/5$$

$$\Rightarrow Q(-8/3, -12/5)$$

c)

UIB

Resolució exercicis proposats. #2.

156) Troba la recta determinada per:

a) Els punts $A(-2,-1)$ i $B(2,4)$

Trobem un vector director de la recta:
Com que A, B pertanyen a la recta, llavors $\vec{AB}$ és un vector director d'aquesta.

$$\vec{AB} = \overrightarrow{(4,5)}$$

Per tant, les equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \end{cases}$$

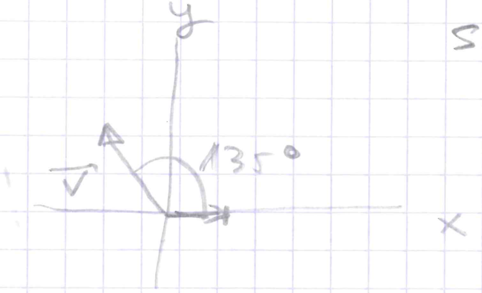
b) El punt $P(1,-4)$ i el vector director $\vec{v}(5,-3)$.

Si anomenem r a aquesta recta, llavors r expressada amb l'eq. contínua és:

$$r: \frac{x-1}{5} = \frac{y+4}{-3}$$

c) El punt $P(-1,-2)$ i l'angle que forma amb l'eix OX és $\alpha = 135^\circ$

Per la segona condició, tenim que el vector director $\vec{v}$ de la recta forma un angle de 135° amb el vector $(1,0)$ (aquest vector està damunt l'eix OX)



Si $\vec{v} = (x,y)$

$$\vec{v}\cdot(1,0) = |\vec{v}|\cdot|(1,0)|\cdot\cos 135°$$

$$x = \sqrt{x^2+y^2}\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{x^2+y^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\right]$$

$$-\sqrt{2}\,x = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = x^2+y^2 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow \quad \pm x = \pm y$$

Ara bé, pel dibuix, tenim que l'única solució possible és $x = -y$. (o $-x = y$)

$\Rightarrow \vec{v} = (-y, y)$, amb y un nombre qualsevol

Podem prendre $\vec{v} = (-1,1)$ el seu vector director.

[**NOTA**: Tot això ens ho podríem haver estalviat si haguéssim reparat que un angle de 135° amb l'eix OX vol dir que la recta forma un angle de 45° amb l'eix OY. I el vector $(-1,1)$ forma aquest angle]

$$\Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1}$$

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = y+2$$

d) El punt $P(1,-1)$ i la pendent $m=2$

Trobem la recta amb l'eq. explícita

$$y = mx + n$$

Per l'enunciat $m=2 \Rightarrow y = 2x+n$
Com que P està a la recta $\Rightarrow -1 = 2\cdot 1 + n$

$$\Rightarrow n = -1-2 = -3$$

$\Rightarrow y = 2x-3$ és l'eq. de la recta

e) La pendent $m=2$ i l'ordenada a l'origen -5

$$y = 2x - 5$$

157) Donada la recta r que passa pel punt $P(-5,-3)$ i que té vector director $\vec{v}(12,8)$:

a) Trobeu les equacions vectorials i paramètrica de la recta

Vectorial

Si $X=(x,y)$ pertany a r, llavors

$$\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(-5,-3)} + \lambda\,\overrightarrow{(12,8)}$$

Paramètrica
$$\begin{cases} x = -5 + 12\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \end{cases}$$

b) Troba 3 punts que pertanyin a r:

Simplement hem de substituir valors qualssevol a λ:

Si $\lambda = 1 \Rightarrow x = -5 + 12 = 7$
$y = -3 + 8 = 5$ $\Rightarrow (7, 5)$

Si $\lambda = -1 \Rightarrow x = -5 - 12 = -17$
$y = -3 - 8 = -11$ $\Rightarrow (-17, -11)$

Si $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -5 + 12 \cdot \frac{1}{2} = 1$
$y = -3 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 1$ $\Rightarrow (1, 1)$

Tots aquests punts pertanyen a r.

c) Esbrina si els punts $(-11, -7)$ i $(2, 1)$ pertanyen a la recta.

Aquests punts són de la recta si, i només si, substituint les seves coordenades, verifiquen les equacions de la recta

$$\begin{cases} -11 = -5 + 12\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-11+5}{12} = -\frac{1}{2} \\ -7 = -3 + 8\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-7+3}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Com que les λ són la mateixa, això vol dir que el sistema té solució $\Rightarrow$ el punt $(-11, -7)$ pertany a la recta r.

$$\begin{cases} 2 = -5 + 12\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{2+5}{12} = \dfrac{7}{12} \\ -1 = -3 + 8\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1+3}{8} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Com que les λ són diferents $\Rightarrow$ el punt $(2,-1)$ no pertany a la recta.

158) Donada la recta s que passa pel punt $P(4,-3)$ i que té vector director $\vec{v}(2,-7)$

a) Troba l'equació contínua de la recta.

$$s: \frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{-7}$$

b) Troba tres punts que pertanyin a s.

- Si $x = 2 \Rightarrow \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{y+3}{-7}$

$\Rightarrow -1 = \dfrac{y+3}{-7} \Rightarrow 7 = y+3 \Rightarrow y = 4$

$\Rightarrow (2, 4)$ és de s

- Si $x = 4 \Rightarrow \dfrac{4-4}{2} = \dfrac{y+3}{-7} \Rightarrow 0 = y+3$

$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow (4,-3)$ és de s.

- Si $x = -2 \Rightarrow \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{y+3}{-7}$

$-3 \cdot (-7) = y+3 \Rightarrow 21 - 3 = y \Rightarrow y = 18$

$\Rightarrow (-2, 18)$ és de s.

Noteu que prenem valors parells de x per a aconseguir nombres senzills.

c) Esbrineu si els punts (8,−7) i (0,11) pertanyen a la recta.

Si (8,−7) fos de s ⇒ verificaria l'eq. contínua ⇒

$$\frac{8-4}{2} = \frac{-7+3}{-7}$$

$$2 = \frac{-4}{-7} \quad \text{que és fals}$$

⇒ (8,−7) no pertany a la recta s.

Per (0,11) farem el mateix.

$$\frac{0-4}{2} = \frac{11+3}{-7}$$

$$-2 = -2$$

⇒ (0,11) pertany a s.

15a) Dona de la recta s que passa pel punt P(−2,3) i que té vector director $\vec{v}(-1,4)$:

a) Trobeu l'equació general de la recta.

Fem primer la contínua:

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{4}$$

$$\Rightarrow (x+2)\cdot 4 = -1\cdot(y-3)$$

$$4x+8 = -y+3$$

$$\boxed{4x+y+5=0}$$

Ho haguéssim pogut fer també així:

Per teoria sabem que el vector (−B, A) és el vector director de s ⇒ B = 1 i A = 4

$\Rightarrow s: 4x + y + C = 0$

Com que P és de s:

$$4\cdot(-2) + 3 + C = 0$$

$$-8 + 3 + C = 0 \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{s: 4x + y + 5 = 0}$$

Aquesta darrera tàctica només serveix per 2D.

b) Trobeu dues punts que pertanyin a s

Substituim valors a l'eq. general.

Si $x = 1 \Rightarrow 4 + y + 5 = 0 \Rightarrow y = -9$

$\Rightarrow (1, -9) \in s$

Si $x = -1 \Rightarrow -4 + y + 5 = 0 \Rightarrow y = -1$

$\Rightarrow (-1, -1) \in s$

Si $y = 3 \Rightarrow 4x + 3 + 5 = 0 \Rightarrow 4x = -8$

$\Rightarrow x = -2$

$\Rightarrow (-2, 3) \in s.$

c) Esbrineu si els punts $(-5, 15)$ i $(4, 3)$ pertanyen a la recta.

Hem de veure si satisfan l'eq. general.

$4\cdot(-5) + 15 + 5 = -20 + 15 + 5 = 0$

$\Rightarrow (-5, 15) \in s.$

$4 \cdot 4 + 3 + 5 = 16 + 3 + 5 = 24 \neq 0$

$\Rightarrow (4,3) \notin s.$

160) Troba l'equació general de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-3,-2)$.

Opc 1. Feim primer la contínua i després la general.

$\overrightarrow{AB} = (-5,-5)$

Podem prendre $\overrightarrow{(-1,-1)}$ com el vector director.

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1}$

$\Rightarrow -x+2 = -y+3$

$\Rightarrow \boxed{-x+y-1=0}$

Opc 2. Feim la explícita i després la general.

$y = mx+n$

$\begin{cases} 3 = 2m+n \Rightarrow n = 3-2m \\ -2 = -3m+n \end{cases}$

$\Downarrow$

$-2 = -3m + 3 - 2m$

$-5 = -5m \Rightarrow m = 1$

$\Rightarrow n = 3 - 2 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow y = x+1 \Rightarrow \boxed{-x+y-1=0}$

OPC3 (Normesa 2D)

$A'x + B'y + C' = 0$

$\overrightarrow{AB} = (-5, -5) = (-B', A')$

$\Rightarrow B' = 5, \quad A' = -5$

$\Rightarrow$ la recta es $-5x + 5y + c' = 0$

Con que $A = (2,3) \Rightarrow -5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + c' = 0$

$\Rightarrow -10 + 15 + c' = 0$

$c' = -5$

$\Rightarrow$ la recta es $-5x + 5y - 5 = 0$

(simplificada $-x + y - 1 = 0$)

... l'equació explícita de la recta que:

a) passa pel punt $A(-3,-1)$ i té pendent $m=-2$

$$y = mx + n$$

és l'eq. explícita d'una recta genèrica.

Com que $m=-2 \Rightarrow y = -2x + n$

Com que A està a la recta $\Rightarrow -1 = -2\cdot(-3) + n$

$\Rightarrow n = -1 - 6 = -7 \Rightarrow$ la recta és

$$\boxed{y = -2x - 7}$$

b) passa pel punt $A(-4,-2)$ i $B(-3,-1)$

Com que no demanen cap equació concreta, farem la paramètrica.

$\vec{AB} = (1,1)$ és el vector director

$$\begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \end{cases}$$

c) passa pel punt $A(-5,2)$ i té coordenada a l'origen -4

$$y = mx - 4$$

I passa per $A \Rightarrow 2 = m\cdot(-5) - 4$

$\Rightarrow 2 = -5m - 4 \Rightarrow m = \dfrac{2+4}{-5} = \dfrac{-6}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{6}{5}x - 4}$$

162) Trobeu un punt i el vector director de cadascuna d'aquestes rectes;

a) $\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(-10,-4)} + k\overrightarrow{(-9,7)}$

Es tracta de l'eq. vectorial.

$(-10,-4)$ és el punt inicial

$\overrightarrow{(-9,7)}$ és el v.d

b) $\dfrac{x-15}{-1} = \dfrac{y+2}{6}$

És recta de l'eq. contínua $\rightarrow$ $\overrightarrow{(-1,6)}$ és el v.d

$(15,-2)$ és un punt

c) $2x - 5y + 3 = 0$

És recta de l'eq. general.

OPC 1

$\overrightarrow{(-B,A)}$ és el v.d

$\overrightarrow{(5,2)}$ és el v.d

I substituint donem un punt.

$x = 0 \rightarrow -5y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

$\rightarrow (0, \frac{3}{5})$ és un punt

OPC 2. Trobem dos punts A i B de la recta i $\overrightarrow{AB}$ serà un vector director

Si $x = 1 \rightarrow 2 - 5y + 3 = 0$

$\rightarrow y = \frac{-5}{-5} = 1$

$\rightarrow (1,1)$ és de la recta.

Per tant $A = (0, \frac{3}{5})$, $B = (1,1)$ són dos punts de la recta

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(1, \frac{2}{5})}$ és un v.d.

NOTA: $5 \cdot \overrightarrow{AB}$ = al vector director que hem trobat abans.

d) $y = -5x + 10$

Triem un punt:

A: si $x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (0, 10)$

B: si $x = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (1, 5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(1, -5)}$

e) $\begin{cases} x = 2 - 8k \\ y = 3 + 6k \end{cases}$

És directa d'una eq. paramètrica.

(2, 3) és un punt

$\overrightarrow{(-8, 6)}$ és un vector director.

f) $x - 5 = \dfrac{y + 4}{12}$

És una eq. contínua $\rightarrow$ v.d és $\overrightarrow{(1, 12)}$

punt $(5, -4)$

g) $x + 3y + 1 = 0$

És una eq. general.

Si $y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$ és un punt

Si $y = 2 \Rightarrow x = -1 - 6 = -7 \Rightarrow (-7, 2)$ és un punt

$\Rightarrow \overrightarrow{(6, -2)}$ és un vector director

h) $y = -\frac{3}{2}x - 2$

$(0, -2)$ és un punt

Si $x = 2 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (2, -5)$ és un punt

c) $\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 11 + k \end{cases}$

És una eq. paramètrica
$(-7, 11)$ és un punt
$\overrightarrow{(-1, 1)}$ és un v.d.

d) $$\frac{-x-5}{-1} = \frac{4y+4}{8}$$

No és exactament una eq. contínua. La hem de transformar.

$$\frac{-x-5}{-1} = \frac{x+5}{1}$$

$$\frac{4y+4}{8} = \frac{4(y+1)}{8} = \frac{y+1}{4}$$

$\Rightarrow \dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+1}{4}$ que és l'eq. contínua.

$\Rightarrow \overrightarrow{(1, 4)}$ és el v.d
$(-5, -1)$ és un punt.

k) $-2x - y - 12 = 0$
És tracta de l'eq. general
$\overrightarrow{(-B, A)}$ és el v.d $\Rightarrow \overrightarrow{(1, -2)}$ és v.d

Si $x = 1 \Rightarrow y = -2 - 12 = -14$

$\Rightarrow (1, -14)$ és un punt.

e) $y = x + 4$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 5$ $(1,5)$
Si $x = 2 \Rightarrow y = 6$ $(2,6)$ són punts.

163) Indiqueu si els punts següents estan alineats:

a) $A(-1,1)$, $B(2,1)$, $C(8,5)$

A, B, C estan alineats si, i només si, $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ són proporcionals.

$\vec{AB} = \vec{(3,0)}$
$\vec{AC} = \vec{(9,4)}$

clarament no són proporcionals: $\frac{3}{9} \neq \frac{0}{4}$

b) $D(-1,2)$, $E(0,0)$, $F(2,-2)$

$\vec{DE} = \vec{(1,-2)}$
$\vec{DF} = \vec{(3,-4)}$ $\frac{3}{1} \neq \frac{-4}{-2}$

$\Rightarrow D, E, F$ no estan alineats

En cas negatiu, obteniu-ne un que hi estigui:

a) $\vec{AB} = \vec{(3,0)}$
$G = (x,y)$
$\vec{AG} = \vec{(x+1, y-1)}$

$\vec{AB}$ i $\vec{AG}$ han de ser proporcionals

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
i x pot ser arbitrari.

b) $H = (x, y)$

$\overrightarrow{DE} = (1, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{DH} = (x+1, y-2)$ $\qquad$ han de ser proporcionals

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2}$$

$$\Rightarrow -2(x+1) = 1(y-1)$$

$$-2x - 2 = y - 1$$

$$-2x - y - 1 = 0$$

Triem $x = 2 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (2, -5)$

Per tant, $(2, -5)$ està alineat amb D i E.

164) Estudieu la posició relativa de les rectes següents:

a) $r: 6x - 15y + 1 = 0$
$s: -10x + 25y + 1 = 0$

Passem les equacions de les rectes a eq. explícites

$$r: \quad y = -\frac{6x - 1}{-15} = \frac{6}{15}x + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}x - \frac{1}{15}$$

$$s: \quad y = \frac{10x - 1}{25} = \frac{10}{25}x - \frac{1}{25} = \frac{2}{5}x - \frac{1}{25}$$

Com que la pendent de r i s és la mateixa ($\frac{2}{5}$), llavors són paral·leles.

b) $r: \; 2x - 10y + 8 = 0$

$s: \; x + 5y + 4 = 0$

Podríem fer-ho com l'exercici anterior, però ho farem diferent. Trobarem els vectors directors de r i s.

Si $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5} \Rightarrow (0, \frac{4}{5}) \in r$

Si $x = 1 \Rightarrow y = \frac{-10}{-10} = 1 \Rightarrow (1,1) \in r$

$\Rightarrow$ el seu vector director és $\overrightarrow{(1, \frac{1}{5})}$

Podem prendre com a v.d $\overrightarrow{(5, 1)}$

Si $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-4}{5} \Rightarrow (0, \frac{-4}{5}) \in s$

Si $x = 1 \Rightarrow y = \frac{-5}{5} = -1 \Rightarrow (1, -1) \in s$

$\Rightarrow \overrightarrow{(1, -\frac{1}{5})}$ és un vector director de s.

Podem prendre $\overrightarrow{(5, -1)}$

Els vectors directors de r i s són diferents $\Rightarrow$ les rectes són secants (es tallen)

c) $r: \; y = 2x + 3$

$s: \; y = 2x + 1$

Com que r i s tenen la mateixa pendent ($m = 2$), llavors poden ser paral·leles o coincidents. Però tenen distinta ordenada a l'origen (r la té igual a 3 i s, a 1)

$\Rightarrow$ són paral·leles

d) $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{4}$

$s: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+4}{-12}$

$\vec{v_r} = (1,4)$ és el v.d de r

$\vec{v_s} = (-3,-12)$ és el v.d de s.

Clarament $v_r \cdot (-3) = \vec{v_s}$. Per tant, les rectes o són paral·leles o bé coincidents.

Per descartar que són coincidents basta veure que un dels punts d'una recta no està a l'altra.

$(2,-4) \in s$.

Vegem si és o no de r:

$$\frac{2-1}{1} \stackrel{?}{=} \frac{-4-5}{4}$$

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{-9}{4}$$

No $\Rightarrow (2,-4) \notin r$

$\Rightarrow$ r i s són paral·leles

e) $r: 2x + 6y + 4 = 0$

$s: -3x - 9y - 6 = 0$

Passem-les a eq. explícites

$r: 6y = -2x - 4 \Rightarrow r: y = \dfrac{-2x-4}{6}$

$\Rightarrow r: y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$

$s: y = \dfrac{3x+6}{-9} = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$

Com que r i s coincideixen ⇒ són la mateixa recta.

f) $r: y = x+1$

$s: y = -x+1.$

Les pendents de r i s són diferents ⇒ són secants

g) $r: y = 3x + \frac{1}{2}$

$s: 6x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow s: y = \frac{-6x-1}{-2}$

$\Rightarrow s: y = 3x + \frac{1}{2}$

⇒ són coincidents

h) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4} \Rightarrow \vec{v_r} = \overrightarrow{(1,4)}$

$s: \begin{cases} x = -10 - k \\ y = 2 + k \end{cases} \Rightarrow \vec{v_s} = \overrightarrow{(-1,1)}$

Com que no són proporcionals: $\frac{1}{-1} \neq \frac{4}{1}$

⇒ són secants

i) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4} \Rightarrow \vec{v_r} = \overrightarrow{(1,4)}$

$s: 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow$ Per teoria, el vector és

$\vec{v_s} = \overrightarrow{(-B, A)} = \overrightarrow{(1,2)}$

$\vec{N_s}$ i $\vec{v_r}$ no són proporcionals $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2}\right)$

Per tant, r i s són secants.

165) Trobeu el punt d'intersecció de les rectes secants de l'exercici anterior

b) $r: 2x - 10y + 8 = 0$

$s: x + 5y + 4 = 0$

Un punt de tall verificarà les dues equacions

$$\begin{cases} 2x - 10y + 8 = 0 \\ x + 5y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x = -5y - 4$$

$$\Rightarrow 2(-5y - 4) - 10y + 8 = 0$$

$$-10y - 8 - 10y + 8 = 0$$

$$-20y = 0$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow x = -5 \cdot 0 - 4 = -4$$

$\Rightarrow (-4, 0)$ és el punt de tall.

f) $r: y = x + 1$

$s: y = -x + 1$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = -x + 1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$\Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$ és el punt de tall.

h) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$

$s: \begin{cases} x = -10-k \\ y = 2+k \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{-10-k-1}{1} = \frac{2+k-5}{4}$$

$$-k-11 = \frac{k-3}{4}$$

$$-4k-44 = k-3$$

$$-5k = 41$$

$$k = -\frac{41}{5}$$

$$\Rightarrow x = -10 + \frac{41}{5} = -\frac{9}{5}$$

$$y = 2 - \frac{41}{5} = -\frac{31}{5}$$

el punt de tall és $\left(-\frac{9}{5}, \frac{-31}{5}\right)$

i) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{4}$

$s: 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x+5$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{2x+5-5}{4}$$

$$x-1 = \frac{2x}{4}$$

$$4x-4 = 2x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \underline{x=2}$$

166) Trobeu la recta paral·lela a la recta r que passa pel punt P en els casos següents:

a) $r: 4x - 5y + 3 = 0$,
$P(-3, 5)$

Si s és la recta cercada, llavors $\vec{v_s}$ el seu vector director ha de ser proporcional a $\vec{v_r} = \overrightarrow{(5,4)}$. En particular, podem prendre $\vec{v_s} = \vec{v_r}$

$$s: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

b) $r: \dfrac{x+5}{-2} = \dfrac{y+1}{-3}$

$P(4, -10)$

La recta paral·lela a r pot tenir com a v.d $\overrightarrow{(-2,-3)}$. Per tant

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y+10}{-3}$$

c) $r: y = -5x + 3$
$P(-1, 1)$

Si s és la recta paral·lela, llavors
$y = -5x + n$.
Però com que P està a s, llavors

$$1 = -5 \cdot 1 + n \Rightarrow n = 6$$

$$\Rightarrow s: y = -5x + 6$$

167) Indiqueu si els parells de rectes següents són perpendiculars

a) $r: x-5y+1=0 \Rightarrow \vec{v_r}=\overrightarrow{(5,1)}$

$s: 10x+2y-3=0 \Rightarrow \vec{v_s}=\overrightarrow{(-2,10)}$

Si r i s fossin perpendiculars $\Leftrightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{v_s}=0$

$\Leftrightarrow$ $5\cdot(-2)+1\cdot 10=0 \Leftrightarrow$ que és vera.

$\Rightarrow$ r i s són perpendiculars.

b) $r: y=2x+4$

$s: y=-\frac{1}{2}x+8.$

Trobem el seu vector director:

si $x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4)\in r$

si $x=1 \Rightarrow y=6 \Rightarrow (1,6)\in r$

$\Rightarrow \vec{v_r}=\overrightarrow{(1,2)}$ és el seu v. director.

si $x=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow (0,8)\in s$

si $x=2 \Rightarrow y=7 \Rightarrow (2,7)\in s$

$\Rightarrow (2,-1)$ és el seu v. director

clarament $\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}=0 \Rightarrow$ r i s són perpendiculars.

T Si haguéssim aplicat la teoria que una recta que tingui pendent igual a $\frac{-1}{}$ és

c) $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{4}$

$s: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+4}{-1}$

$\vec{v_r} = (1, 4)$ donant $\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0$

$\vec{v_s} = (4, -1)$

$\Rightarrow$ r i s són perpendiculars.

d) $r: x + y + 4 = 0 \Rightarrow y = -x - 4$

$s: -x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1$

$\Rightarrow$ No són perpendiculars sinó paral·lels (tenen la mateixa pendent)

e) $r: y = x + 1 \Rightarrow -x + y - 1 = 0$

$\Downarrow$

$\vec{v_r} = (-1, -1)$

$s: y = -x - 2$

$\Downarrow$

$x + y + 2 = 0 \Rightarrow \vec{v_s} = (-1, 1)$

I $\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ r i s són perpendiculars.

f) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{7} \Rightarrow \vec{v_r} = (3, 7)$

$s: 7x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow \vec{v_s} = (-3, 7)$

$\Rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = -9 + 49 \neq 0$

$\Rightarrow$ r i s <u>no</u> són perpendiculars

1 6 ~~8~~) Trobeu l'equació de la recta perpendicular a la recta r que passa pel punt P.

a) $r: 4x - 5y + 3 = 0$

$P(-3, 5)$

El vector director de r és $\overrightarrow{(5, 4)} = \vec{v_r}$

I clarament el vector $\vec{w} = \overrightarrow{(-4, 5)}$ és perpendicular a $\vec{v_r}$:

$\vec{w} \cdot \vec{v_r} = -4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 0.$

Per tant la recta cercada és:

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-5}{5}$$

b) $r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+1}{-3}$

$P(4, -10)$

Tenim que el vector director de r és $\vec{v_r} = \overrightarrow{(-2, -3)}$

clarament $\vec{w} = \overrightarrow{(3, -2)}$ és perpendicular a $\vec{v_r}$:

$3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-3) = 0$

Per tant, la recta cercada és:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+10}{-2}$$

c) $r: y = -5x + 3$

$P(-1, 1)$

En primer lloc cerquem el vector director de r:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3)$ és punt de r

Si $x = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (1, -2)$ " " "

$\Rightarrow \overrightarrow{(-1, 5)}$ és el vector director de r.

clarament $\vec{w} = (5, 1)$ és un vector perpendicular a $\vec{v_r}$: $(-1)\cdot 5 + 5\cdot 1 = 0$

Per tant, la recta cercada és

$$\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$$

d) $r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -2 - 6\lambda \end{cases}$

$P(1,1)$

Tenim que $\vec{v_r} = (5, -6)$ és el v. d. de r.

$\vec{w} = (6, 5)$ és perpendicular a $\vec{v_r}$:

$6\cdot 5 + 5\cdot(-6) = 0$

Per tant:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$$

és la recta cercada

16 a) Calculeu el valor de a per a què les rectes $r: 3x + ay + 4 = 0$ i $s \equiv 4x - 2y - 1 = 0$ siguin:

a) paral·leles.

Trobem els seus vectors directors

$\vec{v_r} = (-a, 3)$

$\vec{v_s} = (2, 4)$

Si són paral·leles $\Rightarrow$ han de ser proporcionals.

$\Rightarrow -\frac{a}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow -4a = 6 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$

... $\vec{w} = (\ \ ,\ \ )$ és un vector perpendicular

a $\vec{v_r}$: $(-1)\cdot 5 + 5\cdot 1 = 0$

Per tant, la recta cercada és

$$\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$$

d) $r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -2 - 6\lambda \end{cases}$

$P(1,1)$

Tenim que $\vec{v_r} = \overrightarrow{(5,-6)}$ és el v.d de r.

$\vec{w} = \overrightarrow{(6, 5)}$ és perpendicular a $\vec{v_r}$:

$6\cdot 5 + 5\cdot(-6) = 0$

Per tant:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$$

és la recta cercada

16 a) Calcula el valor de a per a què les rectes $r: 3x + ay + 4 = 0$ i $s \equiv 4x - 2y - 1 = 0$ siguin:

a) paral·leles.

Trobem els seus vectors directors

$\vec{v_r} = \overrightarrow{(-a, 3)}$

$\vec{v_s} = \overrightarrow{(2, 4)}$

Si són paral·lels $\Rightarrow$ han de ser proporcionals.

$\longrightarrow -\frac{a}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow -4a = 6 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$

b) perpendiculars

Volem que $\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0 \Rightarrow -2a + 12 = 0$

$\rightarrow a = \frac{-12}{-2} = \boxed{6}$

c) Formin un angle de 45°

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}| \cdot \cos \overset{45^\circ}{\alpha}$$

$$-2a+12 = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{4+16} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-2a+12 = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-2a + 12 = \sqrt{a^2+a} \; \sqrt{20} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{20/2} = \sqrt{10}$$

$$-2a + 12 = \sqrt{10(a^2+a)}$$

$$\cancel{(-2a+12)^2 = 10(a+1) \cdot a}$$

$$(-2a+12)^2 = 10(a^2+a)$$

$$4a^2 + 144 - 48a = 10a^2 + 10a$$

$$4a^2 + 144 - 48a - 10a^2 - 10a = 0$$

$$-6a^2 - 58a + 144 = 0$$

$$-3a^2 - 29a + 72 = 0$$

$$a = \frac{29 \pm \sqrt{1705}}{-6} \quad \begin{cases} \dfrac{29 + \sqrt{1705}}{-6} \\[2ex] \dfrac{29 - \sqrt{1705}}{-6} \end{cases}$$

(Hem de comprovar quina és la bona)

d) Formin un angle de 60°

$\Rightarrow \vec{v_s} \cdot \vec{v_r} = |\vec{v_s}| \cdot |\vec{v_r}| \cdot \cos 60°$

$-2a+12 = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{2}$

$-2a+12 = \sqrt{a^2+9} \cdot \sqrt{\frac{20}{4}}$

$-2a+12 = \sqrt{5(a^2+9)}$

$(-2a+12)^2 = 5a^2+9$

$4a^2+144-48a = 5a^2+9$

$-a^2-48a+135=0$

$a = \frac{48 \pm \sqrt{2844}}{-2}$

$\frac{48 - \sqrt{2844}}{-2}$

$\frac{48 + \sqrt{2844}}{-2}$

(Hem de comprovar quin és la bona)

170) Calculeu l'angle que formen les rectes següents:

a) $r: x-y+1=0 \longrightarrow \vec{v_r} = \overrightarrow{(1,1)}$

$s: 7x+2y-3=0 \longrightarrow \vec{v_s} = \overrightarrow{(-2,7)}$

$\Rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}| \cdot \cos\alpha$

$-2+7 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{53} \cdot \cos\alpha$

$5 = \sqrt{106} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 60'94°}$

b) $r: y = -3x+4$
$s: y = -x+1$

r: $x=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4)$
$x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (1,1)$ $\Big\}$ $\vec{v_r} = \overrightarrow{(1,-3)}$

s: $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$
$x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (1,0)$ $\Big\}$ $\vec{v_s} = \overrightarrow{(1,-1)}$

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}| \cdot \cos\alpha$

$1+3 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha$

$4 = \sqrt{20} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{20}} \Rightarrow \alpha \simeq 26'56°$

c) $r: 2x+y+4=0 \Rightarrow \vec{v_r} = \overrightarrow{(-1,2)}$
$s: -3x+2y-1=0 \Rightarrow \vec{v_s} = \overrightarrow{(-2,-3)}$

$\Rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = |\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}| \cdot \cos\alpha$

$2-6 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cdot \cos\alpha$

$-4 = \sqrt{65} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha \simeq 60'25°$

d) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{3} \Rightarrow \vec{v_r} = \overrightarrow{(2,3)}$
$s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-2} \Rightarrow \vec{v_s} = \overrightarrow{(3,-2)}$

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 6-6 = 0 \Rightarrow \vec{v_r}$ i $\vec{v_s}$ són perpendiculars $\Rightarrow \alpha = 90°$

171) Donada la recta $r: 2x - 3y + 1 = 0$, calculeu:

a) el seu vector director i un vector perpendicular.

$\vec{v_r} = (3, 2)$

Volem $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{v_r}$. Per exemple podem dir

$\vec{w} = (-2, 3)$, ja que

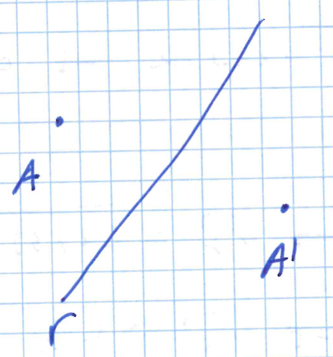
$\vec{w} \cdot \vec{v_r} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0$.

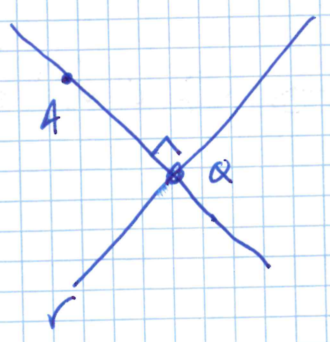
b) l'equació de la recta que passa pel punt $A(3, -5)$ i que és perpendicular a la recta r

Podem usar $\vec{w}$ com al vector de la recta buscada:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+5}{3}$$

c) el punt simètric del punt A respecte de la recta r.





Primer trobem el punt de tall de r i de la recta perpendicular.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+5}{3} \Rightarrow 3(x-3) = -2(y+5) \end{cases}$$

$\Rightarrow 3x - 9 = -2y - 10$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 2 &= 0 \\ 9x + 6y + 3 &= 0 \\ \hline 13x \quad + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-5}{13}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{-5}{13}\right) - 3y + 1 = 0$$

$$\frac{-10}{13} - 3y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 + \frac{10}{13}}{-3} = \frac{\frac{-3}{13}}{\frac{-3}{1}} = \frac{-\cancel{3}}{-\cancel{3} \cdot 13} = \frac{1}{13}$$

$\Rightarrow \left(\frac{-5}{13}, \frac{1}{13}\right)$ és el punt de tall

$\Rightarrow$ Q és el punt mitjà de $A(3,-5)$ i $A'(x,y)$

$$\left(\frac{-5}{13}, \frac{1}{13}\right) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-5+y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-5}{13} = \frac{3+x}{2} \Rightarrow -10 = 39 + 13x \\ \frac{1}{13} = \frac{-5+y}{2} \Rightarrow 2 = -65 + 13y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-49}{13} \qquad \Rightarrow A'\left(-\frac{49}{13}, \frac{67}{13}\right)$$

$$y = \frac{67}{13}$$

172) Calcula la pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes següents:

a) $x + 3y = 4$

$\Downarrow$

$3y = 4 - x \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$

$\cancel{y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x \Rightarrow m = -1}$

$\Rightarrow$ pendent $m = -\frac{1}{3}$

ordenada a l'origen $\frac{4}{3}$

b) $4y + 5 = -x$

$y = \frac{-x-5}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

$n = -\frac{5}{4}$

c) $2x - 7y = 0 \Rightarrow y = \frac{-2x}{-7} = \frac{2}{7}x$

$\Rightarrow m = \frac{2}{7}$

$n = 0$

d) $-8y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{-8} = -1$

$\Rightarrow m = 0, \quad n = -1$

173) Calcula les equacions de la recta que passa pels punts $A(-1,0)$ i $B(-4,-1)$. Calcula el seu vector director i altres dos punts més de la

$\vec{AB} = \overrightarrow{(-3,-1)}$ és el seu vector director.

$$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$$ Eq. paramètrica.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{-1}$$ Eq. contínua

$$-1(x+1) = -3y$$
$$-x - 1 = -3y$$
$$-x + 3y - 1 = 0$$ Eq. general

$$y = \frac{-x}{-3} - \frac{1}{-3} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$ eq. explícita.

Si hem de calcular 2 punts més, podem substituir les variables a l'eq. que vulguem. P.e.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right)$$
$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \cancel{\left(1, \frac{2}{3}\right)} \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

174) Calcula totes les eq. de la recta que passa pel punt $A(3,-5)$ i que segueix la direcció $\vec{v}(-1,7)$. Calcula la seva pendent

eq. cont. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{7} \Rightarrow 7(x-3) = -y-5$

$$7x - 21 = -y - 5$$

eq. para. $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 7\lambda \end{cases}$

$$7x + y - 16 = 0$$ eq. general

pendent $\longleftarrow y = -7x + 16$

175) Calculeu totes les eq. de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-5,1)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-7,-2)}$

v.d $(-B,A)$:

$-2x+7y+C=0$

Passa per A: $-2\cdot 2+7\cdot 3+C=0$

$-4+21+C=0$

$C=-16$

$\Rightarrow -2x+7y-16=0$ Eq. general.

Par. $\begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$

Cont. $\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y-3}{-2}$

176) Donada la recta $y=2x+8$, calculeu:

a) el seu vector director.

$-2x+y-8=0$

v.d és de la forma $(-B,A) = \overrightarrow{(-1,-2)}$

b) eq. de la recta paral·lela que passa pel punt $(0,-8)$.

Si és paral·lela té el mateix v.d.

$\dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y+8}{-2}$; $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+8}{-2}$

c) un vector perpendicular a la recta

P.e. $\overrightarrow{(2,-1)}$ és perp. a $\overrightarrow{(-1,2)}$

ja que: $2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) = 0$.

d) l'eq. de la recta perpendicular que passa pel punt $(0,-8)$

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+8}{-1}$

147) Calculeu els punts de tall dels parells de rectes següents.

a) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{4}$

$s: 3x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 + 5y$

$x = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}y$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}y - 3}{2} = \frac{y+1}{4}$$

$$\frac{20}{3}y - \frac{44}{3} = 2y + 2$$

$$20y - 44 = 6y + 6$$

$$14y = 50$$

$$y = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{7}$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{125}{21} = \frac{37}{7}$$

$\Rightarrow$ P.T. $\left(\dfrac{37}{7}, \dfrac{25}{7}\right)$

b) $r: y = 6x - 10$

$s: 9x - 3y + 27 = 0$

$$9x - 3(6x - 10) + 27 = 0$$

$$9x - 18x + 30 + 27 = 0$$

$$-9x = -57$$

$$\boxed{x = \frac{19}{3}}$$

c) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

$s: y = -x + 2$

$\Rightarrow \quad -1 + 10\lambda = -(3 + 2\lambda) + 2$

$-1 + 10\lambda = -3 - 2\lambda + 2$

$10\lambda + 2\lambda = -3 + 2 + 1$

$12\lambda = 0$

$\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad x = 3 + 2 \cdot 0 = 3$

$y = -1 + 10 \cdot 0 = -1.$

$\Rightarrow (3, -1)$ es el punt de tall.

d) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$ $\Rightarrow$ Pensaeu que les λ son diferents.

$s: \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = -5k \\ y = 2 - 6k. \end{cases}$

$\begin{cases} -5k = 3 + 2\lambda \\ -1 + 10\lambda = 2 - 6k \end{cases}$

$\begin{cases} -2\lambda - 5k = 3 \\ 10\lambda + 6k = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 5} \begin{cases} -10\lambda - 25k = 15 \\ 10\lambda + 6k = 3 \end{cases}$

$/ \quad -19k = 18$

$$k = -\frac{18}{19}$$ (Ens podríem haver aturat aquí i trobar el punt de tall a s.)

$$-2\lambda - 5\cdot\left(-\frac{18}{19}\right) = 3$$

$$-2\lambda = 3 - \frac{90}{19}$$

$$-2\lambda = \frac{-33}{19}$$

$$\lambda = \frac{33}{38}$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 + 2\cdot\frac{33}{38} = \frac{90}{19}$$

$$y = -1 + 10\cdot\frac{33}{38} = \frac{146}{19}$$

$\Rightarrow$ Punt de tall $\left(\frac{90}{19}, \frac{146}{19}\right)$

e) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{4}$

$s: \dfrac{x}{10} = \dfrac{y+8}{-1} \Rightarrow -x = 10y + 80$

$$x = -10y - 80$$

$$\Rightarrow \frac{-10y - 80 - 3}{2} = \frac{y+1}{4}$$

$$-40y - 332 = 2y + 2$$

$$-42y = 334$$

P.T

$y = \underline{-167} \Rightarrow x = \underline{-1670} + 80$

f) $r: 3x - 2y + 6 = 0$

$s: 7y - 8x + 2 = 0$

$\cdot 8 \quad r: 24x - 16y + 48 = 0$

$\cdot 3 \quad s: -24x + 21y + 6 = 0$

$$5y = 54$$

$$\boxed{y = \frac{54}{5}}$$

$\Rightarrow \quad 3x - 2 \cdot \frac{54}{5} + 6 = 0$

$$3x - \frac{108}{5} + 6 = 0$$

$$3x = \frac{78}{5}$$

$$\boxed{x = \frac{26}{5}}$$

$\Rightarrow$ P.T es $\left(\frac{26}{5}, \frac{54}{5}\right)$

~~g)~~

$\cancel{r: y = 4x - 2}$

$\cancel{s: y = 10x - 1.}$

g) $r: y = 4x - 2$

$s: y = 10x - 8$

$4x - 2 = 10x - 8$

$-6x = -6$

$x = 1 \Rightarrow y = 4 \cdot 1 - 2 = 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow (1, 2)$ és el punt de tall.

h) $r: y = 4x - 2$

$s: y = 4x - 10$

$4x - 2 = 4x - 10$

$0x = -8$

$0 = -8 \Rightarrow$ no té punts de tall.

És perquè són paral·leles (tenen la mateixa pendent $m = 4$ i diferent ordenada a l'origen).

i) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

$s: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{3 + 2\lambda - 2}{3} = \dfrac{-1 + 10\lambda + 2}{3}$

$\dfrac{2\lambda + 1}{3} = \dfrac{10\lambda + 1}{3} \Rightarrow 2\lambda + 1 = 10\lambda + 1$

$\Rightarrow -8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x = 3,\ y = -1$

$\Rightarrow (3, -1)$ és el punt de tall.

j) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \end{cases}$

$s: 10x - 2y + 3 = 0$

$\Rightarrow 10(3 + 2\lambda) - 2(-1 + 10\lambda) + 3 = 0$

$30 + 20\lambda + 2 - 20\lambda + 3 = 0$

$0\lambda = -35$

$0 \neq -35$

$\Rightarrow$ no té punt de tall.

k) $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+10}{-2}$

$s: y = 10x - 12$

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{10x - 12 + 10}{-2}$

$\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{10x - 2}{-2}$

$\Rightarrow -2(x-2) = 3(10x - 2)$

$\Rightarrow -2x + 4 = 30x - 6$

$-32x = -10$

$x = \dfrac{5}{16} \Rightarrow y = 10 \cdot \dfrac{5}{16} - 12 = \dfrac{-71}{8}$

$\Rightarrow P.T \left(\dfrac{5}{16}, \dfrac{-71}{8} \right)$

DE LLIBRET XISCO
CEPA LLEVANT

2(5) Quins dels vectors següents tenen la mateixa direcció?

$\vec{a} = (1,-3,2)$ $\quad \vec{c} = (-2,6,-4)$ $\quad \vec{e} = (10,-30,5)$

$\vec{b} = (2,0,1)$ $\quad \vec{d} = (5,-15,10)$

Recordem que dos vectors $\vec{x}$, $\vec{y}$ són paral·lels $\Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\vec{x} = \lambda \vec{y}$, és a dir, si $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ i $\vec{y} = (y_1,y_2,y_3)$ aleshores $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$ (p. 169, Proposició 13.5)

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$	$\vec{e}$
$\vec{a}$	—	$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ perquè $\vec{b} \nparallel \vec{a}$ NO	SÍ	SÍ	NO
$\vec{b}$	$\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{0} \neq \frac{2}{1}$ NO	—	NO	NO	NO
$\vec{c}$	$\frac{-2}{1} = \frac{6}{-3} = \frac{-4}{2} = -2$ SÍ	$\frac{-2}{2} \neq \frac{6}{0} \neq \frac{-4}{1}$ NO	—	SÍ	NO
$\vec{d}$	$\frac{5}{1} = \frac{-15}{-3} = \frac{10}{2} = 5$ SÍ	$\frac{5}{2} \neq \frac{-15}{0} \neq \frac{10}{1}$ NO	$\frac{5}{-2} = \frac{-15}{6} = -\frac{5}{2} = \frac{10}{-4} = \frac{5}{-2}$ SÍ	—	NO
$\vec{e}$	$\frac{10}{1} = \frac{-30}{-3} \neq \frac{5}{2}$ NO	$\frac{10}{2} \neq \frac{-30}{0} \neq \frac{5}{1}$ NO	$\frac{10}{-2} = -5$, $\frac{-30}{6} = -5$, $\frac{5}{-4} \neq -5$ NO	$\frac{10}{5} = \frac{-30}{-15} \neq \frac{5}{10}$ NO	—

Per tant $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{a} \parallel \vec{d}$, $\vec{c} \parallel \vec{d}$, Ex 216. Donats els vectors $\vec{a}(1,-3,2)$, $\vec{b}(2,0,1)$, calculeu.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$

c) l'angle que formen entre si $\vec{a}$ i $\vec{b}$

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2 + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2+2=4$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$4 = \sqrt{14}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\alpha$

$\frac{4}{\sqrt{70}} = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{70}}$

$\alpha = \arccos\frac{4}{\sqrt{70}} \Rightarrow \alpha = 61'43^\circ$

70	2
35	5
7	7
1	

217. Donats $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ calculeu m

$\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$

per a què els vectors:

a) siguin paral·lels

b) ortogonals.

b) ortogonals $\Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow (1,m,1)\cdot(-2,4,m) = 0$

$\Longleftrightarrow -2+4m+m = 0 \Longleftrightarrow 5m = 2 \Longleftrightarrow m = \frac{2}{5}$

a) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2m = 4 \Rightarrow m = -2 \\ 4 = m^2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2} = \pm 2 \end{cases} \Big\rangle\ \underline{m=-2}$

218. Calculeu l'angle que formen entre si els vectors $\vec{a}(1,2,3)$ i $\vec{b}(2,-2,1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{(1,2,3)\cdot(2,-2,1)}{|(1,2,3)|\,|(2,-2,1)|} =$$

$$= \frac{2-4+3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}\,\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{280}}.$$

219. Calculeu m perquè el vector $\vec{a}=(1,3,m)$ sigui ortogonal al vector $\vec{b}=(1,-2,3)$.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff 1\cdot1+3\cdot(-2)+3m=0$$

$$\iff 1-6+3m=0 \iff -5+3m=0 \iff m=\frac{5}{3}.$$

220. Calculeu l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors $\vec{a}(1,-3,2)$ i $\vec{b}=(2,0,1)$.

Per la propietat g del producte vectorial (P71), tenim que

$|\vec{a}\wedge\vec{b}|$ = àrea paral·lelogram que formen $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} =$$

$$= -3\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}-\vec{j}$$

$$= -3\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$$

$$= (-3,3,6)$$

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}| = |(-3,3,6)| = \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54}.$$

221. Trobeu un vector perpendicular a $\vec{u}(2,3,1)$ i a $\vec{v}(-1,3,0)$ i que sigui unitari.

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ és ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$

Després l'haurem de dividir pel seu mòdul

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 6\vec{k} - \vec{j} - 3\vec{i} + 3\vec{k}$$

$$= -3\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k}$$

$$= (-3, -1, 9).$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 1 + 81} = \sqrt{91}.$$

Sigui $\vec{w_0} = \frac{1}{\sqrt{91}} \cdot \vec{w} = \left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, -\frac{1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}} \right)$

Aquest és el vector que volem.

222. Trobeu un vector ortogonal a $\vec{u}(1,-1,0)$ i $\vec{v}(2,0,1)$ i el mòdul del qual sigui $\sqrt{24}$.

Sigui $\vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

$$= -\vec{i} + 2\vec{k} - \vec{j} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$= (-1, -1, 2).$$

$\vec{w}$ és ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Un vector paral·lel a $\vec{w}$ també serà ortogonal a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$.

Sigui $\vec{x} = (-m, -m, 2m)$ $\vec{x}$ és paral·lel a $\vec{w}$.

Volem que $|\vec{x}| = \sqrt{24}$.

$$|\vec{x}| = \sqrt{(-m)^2 + (-m)^2 + (2m)^2} = \sqrt{m^2 + m^2 + 4m^2}$$

$$= \sqrt{6m^2}$$

$$\sqrt{6m^2} = \sqrt{24} \iff 6m^2 = 24 \iff m^2 = \frac{24}{6} = 4$$

$$\iff m = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Per tant, podem prendre

$$(-2, -2, 4) \quad \text{o} \quad (2, 2, -4)$$

com als vectors que ens demanen.

223. Calculeu $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ on $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ i $\vec{w} = (2, 0, -2)$.

Producte mixt:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 - 4 = -6$$

224. Calculeu el volum del paral·lelepíped determinat pels vectors $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(2, 0, 1)$ i $\vec{w}(2, 0, -2)$.

Per la propietat 180 (P72), tenim que

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= |-2 - 4| = |-6| = 6.$$

225. Calculeu el valor de m per a que $\vec{u}(2,-3,1)$, $\vec{v}(1,m,3)$ i $\vec{w}(-4,5,-1)$ siguin coplanaris.

$\vec{w} \not\parallel \vec{u}$, ja que $\frac{-4}{2} \neq \frac{5}{-3} \neq \frac{-1}{1}$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{w}$ determinen un pla π que els té com a vectors directors i passa per $(0,0,0)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & -4 \\ y & -3 & 5 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 3x + 10z - 4y - 12z + 2y - 5x = 0$$

$$\equiv -2x - 2y - 2z = 0$$

$\Rightarrow (-2,-2,-2)$ és ortogonal a $(1,m,3)$

$$\rightarrow -2 - 2m - 6 = 0$$

$$-2m - 8 = 0$$

$$m = \frac{+8}{-2} = -4$$

Ho podríem fer d'una altra manera:

$\vec{v}$ ha de ser combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2m + 36 + 5 + 4m - 3 - 30 = 0$$

$$2m + 8 = 0$$

$$m = -\frac{8}{2} = -4$$

226. Donat el vector $\vec{v}(-2,2,-4)$, trobeu les coordenades dels vectors següents.

a) unitaris i de la mateixa direcció que $\vec{v}$

b) paral·lels a $\vec{v}$ i de mòdul 6.

a) $\vec{w} = (-2a, 2a, -4a)$ és de la mateixa direcció de $\vec{v}$. Ha de ser unitari $\Rightarrow |\vec{w}| = 1 \Rightarrow$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-2a)^2+(2a)^2+(-4a)^2} = \sqrt{4a^2+4a^2+16a^2}$$

$$= \sqrt{24a^2} = \sqrt{24}\,a$$

$$|\vec{w}| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{24}\,a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

$\Rightarrow \left(\frac{-2}{\sqrt{24}}, \frac{2}{\sqrt{24}}, \frac{-4}{\sqrt{24}}\right)$ és el vector que busquem

b) $\vec{w} = (-2a, 2a, -4a)$ és paral·lel a $\vec{v}$

$$|\vec{w}| = \sqrt{24}\,a$$

Si $|\vec{w}| = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{24}}$

$\Rightarrow \left(\frac{-12}{\sqrt{24}}, \frac{12}{\sqrt{24}}, \frac{-24}{\sqrt{24}}\right)$.

227. Troba un vector ortogonal a $\vec{u}(2,3,-1)$ i a $\vec{v}(1,4,2)$ la tercera component del qual sigui 1.

Es pot fer calculant $\vec{u} \wedge \vec{v}$ i multiplicant convenientment

$\vec{u} \nparallel \vec{v} \Rightarrow$ formen un pla

Sigui $\Pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 4 & 3 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ aquest pla

$$\Pi \equiv -4x + 3z + 4y - 8z + y - 6x = 0$$

$$\Pi \equiv -10x + 5y - 5z = 0.$$

El vector normal $\vec{n}(-10, 5, -5)$ de Π és ortogonal a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$. I també ho és

Un vector paral·lel a $\vec{u}$

Sigui $\vec{w} = (-10a, 5a, -5a)$ $\quad \vec{w} \parallel \vec{u}$

Imposem que tingui la tercera component igual a 1.

$\Rightarrow \quad -5a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad (2, -1, 1)$ és el vector cercat.

Tant es pot fer prenent $\vec{w} = (a, b, 1)$ i imposant que $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ i $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

228. Calcula les coordenades d'un vector $\vec{u}$ que sigui ortogonal a $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,-1,1)$ i tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

es podia fer fent $\alpha \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ amb α convenientment triat

$\vec{u} = (u_0, u_1, u_2)$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow (u_0, u_1, u_2) \cdot (1, 2, 3) = 0$

$\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow (u_0, u_1, u_2) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_0 + 2u_1 + 3u_2 = 0 \\ u_0 - u_1 + u_2 = 0. \end{cases}$$

Sigui $u_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_0 + 2u_1 = -3\lambda \\ u_0 - u_1 = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 + 2u_1 = -3\lambda \\ -u_0 + u_1 = \lambda \end{cases}$$

$$3u_1 = -2\lambda$$

$$u_1 = \frac{-2\lambda}{3}$$

$$\Rightarrow u_0 = -\lambda + u_1 = -\lambda - \frac{2\lambda}{3} = \frac{-3\lambda - 2\lambda}{3} = \frac{-5\lambda}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \left(-\frac{5\lambda}{3}, -\frac{2\lambda}{3}, \lambda\right).$$

Ara tenim que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{5\lambda}{3} & -\frac{2\lambda}{3} & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 5\lambda & -2\lambda & -3\lambda \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 19$$

$$10\lambda - \cancel{6\lambda} + 3\lambda + \cancel{6\lambda} + 2\lambda + 15\lambda = -57$$

$$30\lambda = -57$$

$$\lambda = \frac{-57}{30}$$

$\longrightarrow$ El vector que cercam és $\left(\dfrac{+5 \cdot \frac{57}{30}}{3}, \dfrac{+2 \cdot \frac{57}{30}}{3}, \dfrac{-57}{30} \right)$

$$= \left(\frac{285}{90}, \frac{114}{90}, -\frac{57}{30} \right) = \left(\frac{95}{30}, \frac{57}{45}, \frac{-57}{30} \right)$$

229. Comprova si els punts $A(1,-2,1)$, $B(2,3,0)$ i $C(-1,0,-4)$ estan alineats o no.

A, B, C estan alineats $\Longleftarrow$ els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ tenen la mateixa direcció

Per tant $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, -5)$ $\qquad \frac{-2}{1} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{-5}{-1}$

$\Rightarrow$ No estan alineats

230. Trobeu el punt simètric del punt $A(-2,3,0)$ respecte del punt $M(1,-1,2)$

Això vol dir que $M = \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{3+y}{2}, \frac{0+z}{2}\right)$

on $A' = (x, y, z)$ és el punt simètric de A.

Però $M = (1, -1, 2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-2+x}{2} = 1 \Rightarrow x = 4 \\ \frac{3+y}{2} = -1 \rightarrow y = -5 \\ \frac{z}{2} = 2 \Rightarrow z = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow A' = (4, -5, 4)$.

231. Calculeu a i b per a què els punts $A(1,2,-1)$, $B(3,0,-2)$ i $C(4,a,b)$, estiguin alineats.

A, B, C estan alineats $\Longleftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC}$

$\Rightarrow (2,-2,-1) \parallel (3, a-2, b+1)$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6 = 2a - 4 \Rightarrow -2 = 2a \Rightarrow a = -1 \\ -a + 2 = -2b - 2 \Rightarrow 1 + 2 = -2b - 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 5 = -2b$

$\Rightarrow b = -\frac{5}{2}$

232. Associeu els conceptes de punt, recta i pla a l'espai amb qualsevol o qualques de les expressions següents.

a) $\vec{A}(2,-3,1)$ vector ⇒ recta a l'espai

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ punt. És una intersecció de dues rectes al pla
recta a l'espai (intersecció de dos plans a l'espai)

c) $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{cases}$ recta en forma paramètrica a l'espai

d) $A(2,-3,1)$ punt a l'espai

e) $x+y=2$ recta al pla
pla a l'espai

f) $\begin{cases} x=-2\lambda+\mu \\ y=2+\lambda \\ z=3 \end{cases}$ Pla a l'espai en forma paramètrica

g) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ Punt al pla

h) $\frac{x-1}{0}=y+3=\frac{z}{-6}$ recta a l'espai en forma contínua.

233 Escriu les equacions de la recta que passa pels punts $A(-3,2,1)$ i $B(-\frac{5}{2},\frac{3}{2},0)$

El seu vector director és $\vec{v}=\vec{AB}$ o bé $\vec{v}=\vec{AB}$ on

$B' = (-5, 3, 0)$

Com que $B' = 2B \Rightarrow$ estan a la mateixa recta (les seves coordenades són proporcionals).

$\vec{v} = \overrightarrow{AB'} = (-5+3, 3-2, 0-1) = (-2, 1, -1)$

Per tant, $r \equiv A + \lambda(-2,1,-1) = (-3,2,1) + \lambda(-2,1,-1)$

FORMA VECTORIAL: $r \equiv (-3,2,1) + \lambda(-2,1,-1)$

FORMA PARAMÈTRICA $r \equiv \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

FORMA CONTINUA $r \equiv \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$

$x + 3 = -2(y-2) \Rightarrow x + 3 = -2y + 4 \Rightarrow x + 2y - 1 = 0$

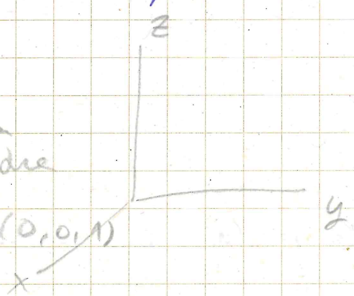
$-y + 2 = z - 1 \Rightarrow -y - z + 3 = 0$

FORMA IMPLÍCITA $r \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -y - z + 3 = 0 \end{cases}$

234) Trobeu les equacions de la recta r que passa pel punt $A(-4,2,5)$ i és paral·lela a l'eix OZ.

L'eix OZ té com a eq paramètrica

$(0,0,0) + \lambda(0,0,1)$



Per tant, si $r \parallel OZ$ $\Rightarrow$ té el mateix vector director.

$\Rightarrow r \equiv (-4,2,5) + \lambda(0,0,1)$

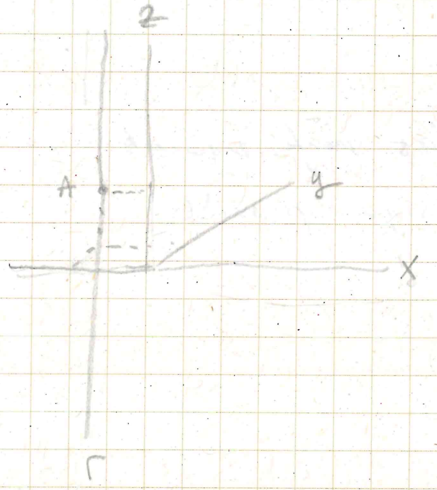
EQ VECTORIAL.

EQ. PARAMÈTRICA $r = \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

EQ. CONTÍNUA $r \equiv \frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$

EQ. IMPLÍCITA $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$?

Una recta ve de ser intersecció de dos plans !!



Passa per $(-4, 2, \lambda)$

$r \equiv \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x + 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$

$(y-2) \cdot 1 = 0 (z-5)$

$(x+4) \cdot 1 = 0 (z-5)$

235. Comprova si els punts $A(1,-2,1)$, $B(2,3,0)$, $C=(-1,0,-4)$ i $D=(4,0,-5)$ es troben en un mateix pla o no

Sigui Π el pla determinat per A, B i C.
Existeix perquè A, B i C no estan alineats:

$\overrightarrow{AB} = (1, 5, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2, -5)$

$$\Pi = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y+2 & 5 & 2 \\ z-1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$-25(x-1) + 2(z-1) + 2(y+2)$

$+ 10(z-1) + 5(y+2) + 2(x-1) = 0$

$-25x + 25 + 2z - \cancel{2} + 2y + \cancel{4} + 10z - \cancel{10} + 5y$

$+ \cancel{10} + 2x - \cancel{2} = 0 \Longrightarrow -23x + 7y + 12z + 25 = 0$

Basta veure si $D \in \pi$ o no.

$\pi \equiv -23x + 7y + 12z + 25 = 0$

$D = (4, 0, -5)$

$-23 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 12 \cdot (-5) + 25 = 0$?

$-92 - 60 + 25 = 0$?

$-152 + 25 = 0$?

No $\Rightarrow$ $D \notin \pi$

$\Rightarrow$ A, B, C, D no estan al mateix pla

236. Estudieu la posició relativa de les rectes següents i trobeu el seu punt de tall quan sigui possible.

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$

$s \equiv \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

$v_r = (3, 2, 4)$

$v_s = (-1, 2, 3)$

$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{-1} = -3 \\ \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{4}{3} \end{array}\right\}$ difereixen $\Rightarrow v_r \nparallel v_s$

$\Rightarrow$ no tenen la mateixa direcció $\Rightarrow$ No són paral·leles ni coincidents

$\Rightarrow$ O són secants o bé s'encreuen.

r passa per $A = (1, -2, 1)$

s passa per $B = (-2, 3, 2)$

r i s són secants quan $rg\begin{pmatrix} v_d \\ v_s \\ \overline{AB} \end{pmatrix} = 2$

(tot està al mateix pla)

r i s són rectes que s'encreuen quan $rg\begin{pmatrix} v_d \\ v_s \\ \overline{AB} \end{pmatrix} = 3$.

$rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 18 + 20 - 24 - 2 + 30 = 68 - 32 \neq 0$

$\Rightarrow$ rg és 3 $\Rightarrow$ s'encreuen.

b) $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$

$s \equiv \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

$\left.\begin{array}{l} v_r = (-1, 2, 1) \\ v_s = (4, 1, 2) \end{array}\right\}$ No són proporcionals $\Rightarrow$ r i s no són paral·lels ni coincidents

$\left.\begin{array}{l} A_r = (1, 3, 2) \\ A_s = (4, 4, 5) \end{array}\right\}$ $\vec{AB} = (3, 1, 3)$

$rg \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 12 + 4 - 3 - 24 + 2$

$= 18 - 30 \neq 0$

$\Rightarrow$ r i s s'encreuen

c) $r \equiv \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$, $s \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

$v_r = (2, 1, 3)$

$v_s = (1, -2, 0) \wedge (0, 3, -1)$

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 3\vec{k} + 2\vec{i} + \vec{j}$

$= (2, 1, 3)$

$v_r = v_s \Rightarrow$ o són coincidents o paral·lels

Prenem $Q \in s$: $y = 0 \Rightarrow x = 1,\ z = -1$

$\Rightarrow (1, 0, -1) \in s.$

$Q \in r$?

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 3 + 6 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ s'encreuen.

d) $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} v_r = (2,3,4) \\ v_s = (4,6,8) \end{array}\right\}$ Són proporcionals $\Rightarrow$ o bé són coincidents o bé són paral·leles.

$(1,0,0) \in s$? $\Longrightarrow$ $1 = 3 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{4} = -1/2$

$(3,3,4) \in r$? $\qquad 0 = 3 + 6\lambda \Rightarrow \lambda = -3/6 = -1/2$

$\qquad 0 = 4 + 8\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{8} = -1/2$

$\Downarrow$ $\qquad \Rightarrow$ sí. $(1,0,0) \in s$.

$\frac{3-1}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$?

sí $\Rightarrow (3,3,4) \in r$

$\Rightarrow$ Coincidents. Tots els seus punts són els punts de tall.

237. Calcula el valor de a per a què les rectes r i s es tallin i troba-ne el punt de tall.

$r \equiv x = y = z - a$

$s \equiv \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$

$\left.\begin{array}{l} v_r = (1,1,1) \\ v_s = (3,-2,0) \end{array}\right\}$ No són proporcionals $\Rightarrow$ no són coincidents ni paral·leles.

Per a què es tallin, $rg\begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_d \\ \vec{AB} \end{pmatrix} = 2$

$\vec{AB} = (1,-3,2) - (0,0,a) = (1,-3,2-a)$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2-a \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2-a \end{vmatrix} = -2(2-a) - 9 + 2 - 3(2-a)$

$= -4 + 2a - 9 + 2 - 6 + 3a$

$= 5a - 17 = 0 \Longrightarrow a = \frac{17}{5}$

Per tant si $a = \frac{17}{5} \rightarrow rg \neq 3$

Però $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0 \Big\rangle \Rightarrow rg = 2$

$\Rightarrow$ es tallen.

~~1188~~

23 8. Calculeu els valors de m i n per a què les rectes r i s siguin paral·leles:

$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$

Per a ser paral·lele, els seus vectors directors han de ser proporcionals i $rg\begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_d \\ \vec{AB} \end{pmatrix} = 2$

$\circ$ Si $rg\begin{pmatrix} \vec{v}_r \\ \vec{v}_d \end{pmatrix} = 1$ $\qquad$ Sigui $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ m & 3 & n \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_r = (4,1,-1)$

$\vec{v}_s = (m,3,n)$

$\vec{AB} = (0,1,-3) - (5,3,0) = (-5,-2,-3)$

Volem que rg $A = 2 \Rightarrow |A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ m & 3 & n \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -36 - 5n + 2m - 15 + 3m + 8n$$

$$= \boxed{3n + 5m - 51 = 0}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ m & 3 & n \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & n \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ m & n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12 - m = 0 & \Rightarrow m = 12 \\ n + 3 = 0 & \Rightarrow n = -3 \\ 4n + m = 0 & \Rightarrow 4 \cdot (-3) + 12 = 0 \text{ ok} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 12 - 51 = 0$$

$$-9 + 60 - 51 = 0 \text{ ok}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 12 \wedge n = -3}$$

23 a) Calculeu les equacions dels plans següents:

a) Passa pel punt $P(2, -3, 1)$ i el vector normal del qual és $\vec{n} = (5, -3, 4)$.

$$\pi \equiv 5x - 3y + 4z + n = 0$$

$P \in \pi$: $5 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + n = 0$

$$10 + 9 + 4 + n = 0$$

$$23 + n = 0 \Rightarrow n = -23$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 5x - 3y + 4z - 23 = 0$$

b) Perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ i que passa pel punt $(1,0,1)$.

Si és perpendicular a aquesta recta ⇒ π té com a vector normal el vector director de la recta

$v_r = (2,-1,3) \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + 3z + u = 0$

Passa per $(1,0,1) \Rightarrow (1,0,-1) \in \pi \Rightarrow$

$2 \cdot 1 - 0 + 3(-1) + u = 0$

$2 - 3 + u = 0$

$-1 + u = 0$

$u = 1$

$\Rightarrow \pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$

240 Calculeu m i n per a què els plans

$\alpha \equiv mx + y - 3z - 1 = 0$

$\beta \equiv 2x + ny - z - 3 = 0$

siguin paral·lels. Poden ser coincidents?

$n_\alpha = (m,1,-3)$

$n_\beta = (2,n,-1)$

Per a ser paral·lels (o coincidents) $\rightarrow rg\begin{pmatrix} n_\alpha \\ n_\beta \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & n \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} m & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ n & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow m \cdot n - 2 = 0 \qquad -m + 6 = 0 \qquad -1 + 3n = 0$

$m \cdot n = 2 \qquad m = 6 \qquad n = \frac{1}{3}$

$6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ ok.

Per tant $\alpha \equiv 6x + y - 3z - 1 = 0$

$\beta \equiv 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 = 0$

$\equiv 6x + y - 3z - 9 = 0$

$\Rightarrow$ no són coincidents ($n = -1 \wedge n = -9$)

(també podríem haver vist que $rg(M^a) \neq 1$)

241) Determineu l'equació del pla que conté el punt $P(2,1,2)$ i la recta $x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$

Sigui π aquest pla.

$P \in \pi$

π té dos vectors directors. Com que $r \in \pi \Rightarrow$

Un d'ells és el vector director de r, $v_r =$
$= (1, -1, -3)$

L'altre pot ser qualsevol vector format per P i un punt de r que no sigui proporcional a v_r.

Sigui el punt $Q = (2, 3, 4) \in r$

(en podríem haver pres infinits $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$ amb qualsevol valor de λ)

(hem pres $\lambda = 0$)

$\overrightarrow{PQ} = (0, 2, 2)$. $\overrightarrow{PQ} \nparallel v_r$

Prenem $(0, 1, 1)$ que té la mateixa direcció que $\overrightarrow{PQ}$

Aleshores π té com a vectors directors $(1, -1, -3)$ i $(0, 1, 1)$

i passa per $(2, 1, 2)$.

$$\Rightarrow \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -(x-2)+(z-2)-(y-1)$$
$$+3(x-2)$$
$$= -x+2 + z-2 - y + 1$$
$$+3x-6 = 0$$

$$\pi \equiv 2x - y + z - 5 = 0$$

242. Comprova que les rectes $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z-2$ i
$$s \equiv \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

Són paral·leles i dedueix-ne l'equació del pla que les conté.

$v_r = (2, 1, 1)$

$$v_s : (1, 0, -2) \wedge (1, -2, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{k} - 2\vec{j} - 4\vec{i} = (-4, -2, -2)$$

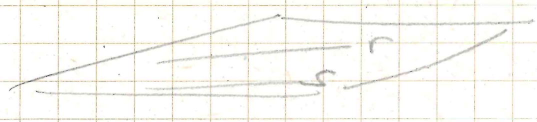
$r \parallel s \iff v_r$ i v_s són proporcionals
i tenen un punt que no és comú

- $\frac{-4}{2} = \frac{-2}{1} = \frac{-2}{1}$ ok 1a condició

- $(1, 0, 2) \in r$ però $(1, 0, 2) \notin s$:

$$1 - 2 \cdot 2 \neq 5$$
$$1 - 2 \cdot 0 \neq 11$$

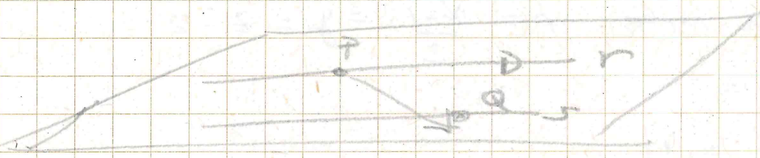
Sigui π el pl que ls conté $\Rightarrow$ π conté v_r, v_s



Però $r \parallel s \longrightarrow v_r \parallel v_s$

Un altre vector director serà el format entre dos punts

un de r i un de s. A més $\overrightarrow{PQ} \nparallel v_r$ i $\overrightarrow{PQ} \nparallel v_s$



Sigui $P = (1,0,2) \in r$

Sigui Q: $x = 0$ $\qquad (0, -\frac{11}{2}, -\frac{5}{2}) \in s$

$$y = \frac{11-0}{-2} = -\frac{11}{2}$$

$$z = \frac{5-0}{-2} = -\frac{5}{2}$$

Sigui $\overrightarrow{PQ} = (-1, -\frac{11}{2}, -\frac{9}{2})$.

Prenem un múltiple: $\vec{v} = (+2, +11, +9)$

$\Rightarrow$ π està determinat per $\vec{v}, \vec{v_r}$ i $(1,0,2)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 11 & 1 \\ z-2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 11(x-1) + 2(z-2) + 18y - 22(z-2) - 2y - 9(x-1) = 0$$

$$\equiv 11x - 11 + 2z - 4 + 18y - 22z + 44 - 2y - 9x + 9 = 0$$

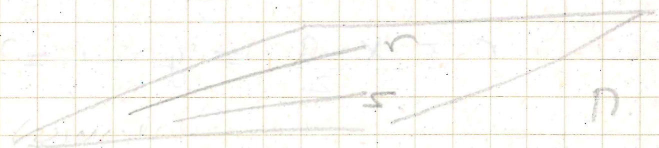
$$\equiv 2x + 16y - 20z + 38 = 0$$

2~~4~~3. Determina el valor de a per a què les rectes r i s siguin coplanàries:

$$r \equiv x = y - a = \frac{z}{0}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$$

Troba l'equació del pla que els conté.



$v_r = (1,1,0)$

$v_s = (1,-1,1)$

r i s coplanàries $\Rightarrow$ no es creuen.

$$\Rightarrow rg\begin{pmatrix} v_r \\ v_s \\ \vec{AB} \end{pmatrix} \neq 3$$

$P = (0,a,0) \in r$

$Q = (1,1,-1) \in s$ $\Big\}$ $\vec{PQ} = (1,1-a,-1)$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-a & -1 \end{pmatrix} \neq 3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1+1+1-(1-a) = 0$$

$$3 - 1 + a = 0$$

$$\boxed{a = -2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 \neq 0$$

$\Rightarrow v_r \nparallel v_s \Rightarrow \pi$ està determinat per v_r, v_s i P

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+2 & 1 & -1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv x - z - z - (y+2) = 0$$

$$\pi \equiv x - 2z - y - 2 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv x - y - 2z - 2 = 0}$$

244. Estudieu la posició relativa de la recta

$r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y+1 = \dfrac{z}{-1}$ i el pla $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$.

Passem r a forma implícita

$$\begin{cases} x-3 = 2(y+1) \\ -y-1 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ -y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Siguin $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

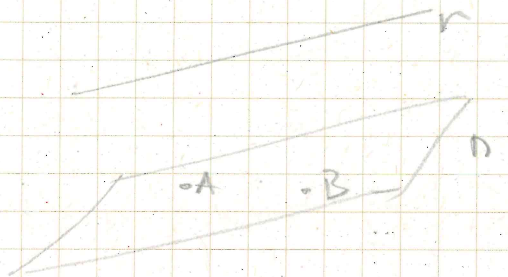
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow rg\, M \neq 3$$

$\Rightarrow$ r paral·lela a π o bé r continguda a π

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 5 - 1 = 3 - 8 = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, M^* = 3 \Rightarrow$ r paral·lela a $\underline{\pi}$

245. Trobeu l'equació del pla que passa pels punts $A(1,3,2)$, $B(-2,5,0)$ i és paral·lel a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -2-3\lambda \end{cases}$.



$v_r = (-1,1,-3)$

$\overrightarrow{AB} = (-3,2,-2) = v$

$\frac{-3}{-1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow v_r$ i v

no són proporcionals.

$\Rightarrow \pi$ està determinat per v_r, v i B.

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & -1 & -3 \\ y-5 & 1 & 2 \\ z & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv -2(x+2) - 2z + 9(y-5)$$
$$+ 3z - 2(y-5) + 6(x+2) = 0$$

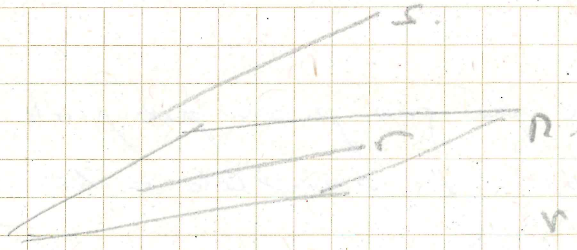
$$\equiv 4(x+2) + 7(y-5) + z = 0$$

$$\equiv 4x + 8 + 7y - 35 + z = 0$$

$$\equiv \boxed{4x + 7y + z - 27 = 0}$$

246. Trobeu l'equació del pla que conté la recta

$r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ i és paral·lel a $s \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$



$v_r = (3, -1, 1)$

$A = (2, -1, 0) \in r \in \pi$

$v_s = (5, 2, -3)$

$\Rightarrow \pi$ està determinat per A, v_r, v_s

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 3 & 5 \\ y+1 & -1 & 2 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 3(x-2) + 6z + 5(y+1)$$
$$+ 5z + 9(y+1) - 2(x-2) = 0$$

$$\equiv x - 2 + 11z + 14(y+1) = 0$$

$$\equiv x - 2 + 11z + 14y + 14 = 0$$

$$\equiv \boxed{x + 14y + 11z + 12 = 0}$$

247 Calcular el valor de m per a què els punts $A=(m,0,1)$, $B=(0,1,2)$, $C=(1,2,3)$, $D=(7,2,1)$ estiguin en el mateix pla. Trobeu la seva equació.

$A, B, C, D \in \pi \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ estan a π.

$$\Rightarrow rg\begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \\ \vec{AD} \end{pmatrix} \neq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 2 \\ 7-m & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \cancel{2(7-m)} + 2(1-m) \cancel{-2(7-m)} + 4m = 0$

$2 - 2m + 4m = 0$

$2m + 2 = 0$

$\Rightarrow m = -1$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ no són paral·lels

$\Rightarrow \pi$ ve determinat per $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ i A

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 8 \\ y & 2 & 2 \\ z-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 2\cdot 2 \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\equiv z-1 + 4y - 4(z-1) - (x+1) = 0$

$\equiv -3(z-1) + 4y - (x+1) = 0$

$\equiv -x + 4y - 3z + 2 = 0$

248. Donat el pla $\pi \equiv 2x - 3y + z = 0$ i la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$, doneu l'equació del pla que conté la recta r i és perpendicular al pla π.

Sigui π_0 aquest pla

Com que $\pi_0 \perp \pi \Rightarrow \vec{n_\pi} \in \pi_0$.

$\Rightarrow (2,-3,1)$ genera π_0

Com que π_0 conté $r \Rightarrow \vec{v_r}$ genera també π_0

$\Rightarrow \vec{v_r} = (1,-1,2)$ genera π_0

$\Rightarrow \pi$ està determinat per $A = (1, 2, -1)$, $\vec{v_r}$ i $\vec{n_\pi}$

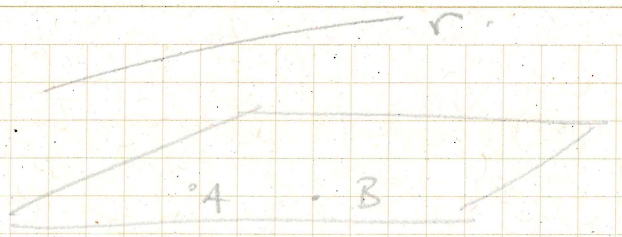
$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-2 & -3 & -1 \\ z+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv -6(x-1) - 2(z+1) + 1(y-2) + 3(z+1) - 4(y-2) + (x-1) = 0$$

$$\equiv -5(x-1) - 3(y-2) + z + 1 = 0$$

$$\equiv \boxed{-5x - 3y + z + 12 = 0}$$

249) Escriu l'equació del pla que passa pels punts $A(1,-3,2)$, $B(0,1,1)$ i és paral·lel a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$



π està determinat per $\vec{AB}$, $\vec{v_r}$ i A (o B)

$\vec{AB} = (-1, 4, -1)$

$v_r = (3,-2,0) \wedge (0,2,3) =$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 6\vec{k} - 6\vec{i} - 9\vec{j}$$

$$= (-6, -9, 6)$$

$$\frac{-6}{-1} \neq \frac{-9}{4} \neq \frac{6}{-1} \Rightarrow \vec{v_r} \not\parallel \vec{AB}$$

π està determinat per $-\vec{AB}$, $\frac{-1}{3}\vec{v_r}$, B

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-1 & 3 & 4 \\ z-1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv 3x + 8(z-1) - 2(y-1)$$
$$- 3(z-1) - 2(y-1) + 8x = 0$$

$$\equiv \boxed{11x - 4y + 5z - 1 = 0}$$

250. Estudieu la posició relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$ i el pla $z = 1$.

Hem d'estudiar el rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

clarament $rg\ M = 3 \Rightarrow rg\ M^* = 3 \Rightarrow$ Secants

251. Estudieu les posicions relatives del pla $\pi \equiv x + ay - z = 1$ i la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ segons els valors de a.

Hem d'estudiar el rang de les matrius

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-a \\ 1 & a & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-2 + 1 + a^2 + a - 1 - 2a \right)$$

$$= -a^2 + a + 2$$

$$= 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

- Si $a \neq -1$ o $a \neq 2 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rg\ M = 3$
  $\Rightarrow rg\ M^* = 3 \Rightarrow$ Secants

- Si $a = -1 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow rg\ M \neq 3$
  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 \neq 0 \Rightarrow rg\ M = 2$

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2+2+2-2+1+4 \neq 0$$

$\Rightarrow \text{rg } M^* = 3 \Rightarrow$ paral·lels

· Si $a = 2 \Rightarrow \text{rg } M \neq 3$ i pl. [illegible] $\text{rg } M = 2$

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r \in \pi$$

252. Estudieu la posició relativa de les rectes

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

i doneu l'angle que formen entre si.

$$v_r = (1,-1,0) \wedge (0,1,1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k} + \vec{i} - \vec{j} = (1,-1,1)$$

$v_s = (3,2,5)$

$v_r \nparallel v_s \Rightarrow$ es tallen o s'encreuen

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 29 \end{vmatrix} = 58 - 15 - 3 - 6 + 87 + 5$$
$$= 126 \neq 0$$

$P = (3, 0, 17) \in r \quad (y = 0)$

$Q = (0, 1, -14) \in s$

$\Rightarrow \overrightarrow{QP} = (3, -1, 29)$

$\Longleftrightarrow$ S'encreuen.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_s}|} \right)$$

$$= \arccos\Bigg(\Bigg.$$

$v_r = (1, -1, 1) \Rightarrow |v_r| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

$v_s = (3, 2, 5)$

$\Rightarrow |v_s| = \sqrt{9 + 4 + 25} = 6$

$v_r \cdot v_s = 3 - 2 + 5 = 6$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{6}{6\sqrt{3}} \right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \simeq 54'74^{\circ}$$

2.53. Troba, en cada cas, l'angle que fan la recta i el pla.

a) $r \equiv \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$

$\pi \equiv x - 2y - z + 1 = 0$

Trobem el vector director de la recta i el vector normal del pla.

$\vec{v_d} = (-2, 4, 2)$ $\qquad \vec{v_d} \cdot \vec{n} = -2 - 8 + 2 = -8.$

$\vec{n} = (1, -2, +1)$

Sabem que $\alpha = \arcsin \dfrac{|\vec{v_d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v_d}| \cdot |\vec{n}|}$

$\Rightarrow \alpha = \arcsin \dfrac{|-8|}{\sqrt{24}\sqrt{6}} = \arcsin \dfrac{8}{\sqrt{144}} = \arcsin \dfrac{8}{12} =$

$|\vec{v_d}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$

$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

$= \arcsin \dfrac{2}{3} = 41'81.^\circ$

b) $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 \end{cases}$ $\qquad \pi \equiv 2x - y + z = 0.$

$\vec{v} = (1, 2, 0)$ $\qquad \vec{n} = (2, -1, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow$ $\vec{n}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars $\Rightarrow r \in \pi.$

$\Rightarrow \alpha = 0.$

c) $r \equiv \frac{x-1}{2} = y-3 = z \Rightarrow \vec{v_r} = (2,1,1)$

$\pi \equiv x+z=17 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,1)$

$$\beta = \arccos \frac{|\vec{v_r}\ \vec{n}|}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{n}|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{12}} =$$

$\vec{v_r}\cdot\vec{n} = 2+0+1 = 3$

$|\vec{v_r}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$|\vec{n}| = \sqrt{2}$

$$= \arccos \frac{3}{2\sqrt{3}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

$\Rightarrow \alpha = 60^\circ.$

254. Calcula l'angle que formen els plans

$\alpha \equiv z=3 \Rightarrow \vec{n_\alpha} = (0,0,1)$

$\beta \equiv x-y+2z+4=0 \Rightarrow \vec{n_\beta} = (1,-1,2)$

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}|\cdot|\vec{n_\beta}|} = \arccos \frac{2}{1\cdot\sqrt{6}} = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}} = \underline{35'26^\circ}$$

$\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta} = 2$

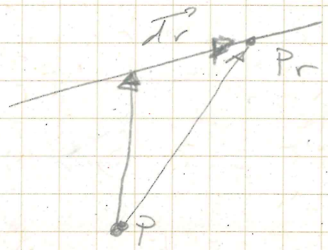
$|\vec{n_\alpha}| = \sqrt{1} = 1$

$|\vec{n_\beta}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

255. Calcula la distància del punt donat a la recta en cadascun dels casos següents:

a) $P=(0,7,0)$,

$$r \equiv \begin{cases} x=-5+4\lambda \\ y=5+\lambda \\ z=-10+3\lambda \end{cases}$$



Tenim que

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|}$$

on P_r és qualsevol punt de la recta r i $\vec{d_r}$ és el vector director de r.

$\vec{P_r}=(-5,5,-10)$. $\quad \vec{d_r}=(4,1,3)$

$\overrightarrow{P_rP}=(+5,2,10)$

$$\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{d_r}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$=5\vec{k}+6\vec{i}+40\vec{j}$$
$$-10\vec{i}-8\vec{k}-15\vec{j}$$
$$=-4\vec{i}+25\vec{j}-3\vec{k}=(-4,25,-3)$$

$|\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{d_r}|=\sqrt{16+625+9}=\sqrt{650}$

$|\vec{d_r}|=\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$.

$$\Rightarrow d(P,r)=\frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\frac{650}{26}}=\sqrt{\frac{325}{13}}=\sqrt{25}=\boxed{5}$$

b) $P(1,0,0)$, $r \equiv x-1 = \frac{y+1}{2} = z$.

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|}$$

P_r : $2(x-1) = y+1$

$2z = y+1$

Prenem $y=1 \Rightarrow x = 2$, $z = 1$ $\Rightarrow P_r = (2,1,1)$

$\overrightarrow{P_rP} = (-1,-1,-1)$

$|\vec{v_r}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$\vec{w} = \overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{v_r}$, Sigui

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= -2\vec{k} - \vec{i} - \cancel{\vec{j}} + 2\vec{i} + \vec{k} + \cancel{\vec{j}}$$

$$= \vec{i} - \vec{k} = (1,0,-1)$$

$\Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow d(P,r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $P(1,2,3)$, $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$ $\rightarrow$ El vector director de r és igual a

$(1,0,0) \wedge (0,1,0)$
$= (0,0,1)$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$P_r = (0,0,2) \quad \vec{v_r} = (0,0,1)$

$$\Rightarrow d(P,r) = \frac{|\vec{P_rP} \wedge \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|} = \frac{|(1,2,1) \wedge (0,0,1)|}{|(0,0,1)|}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 0 + 2\vec{i} + 0 - 0 - 0 - \vec{j}$$
$$= 2\vec{i} - \vec{j} = (2,-1,0)$$

$$\Rightarrow |(1,2,1) \wedge (0,0,1)| = |(2,-1,0)| =$$
$$\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

256. Calculeu la mínima distància entre les rectes següents:

a) $r \equiv \begin{cases} x = -4 - 2\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 5 - 3\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = 5 - 5\mu. \end{cases}$

Tenim que $d(r,s) = \dfrac{|[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{P_rP_s}]|}{|\vec{v_r} \wedge \vec{v_s}|}$

$\vec{v_r} = (-2,2,-3) \qquad \vec{v_r} \wedge \vec{v_s} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -5 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

$\vec{v_s} = (-3,-1,-5)$

$$= 2\vec{k} - 10\vec{i} + 9\vec{j}$$
$$-3\vec{i} + 6\vec{k} - 10\vec{j} = -13\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k} = (-13,-1,8)$$

$$[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}] = \vec{v_r} \cdot (\vec{v_s} \wedge \overrightarrow{P_rP_s})$$

$$\left.\begin{array}{l} P_r = (-4,-5,-1) \\ P_s = (5,4,5) \end{array}\right\} \overrightarrow{P_rP_s} = (9,9,6)$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot (\overrightarrow{(-3,-1,-5)} \wedge \overrightarrow{(9,9,6)})$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 9 & 9 & 6 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot [-27\vec{k} - 6\vec{i} - 45\vec{j} + 45\vec{i} + 9\vec{k} + 18\vec{j}]$$

$$= \overrightarrow{(-2,2,-3)} \cdot \overrightarrow{(39,-27,-18)} = -78 - 54 + 54 = -78.$$

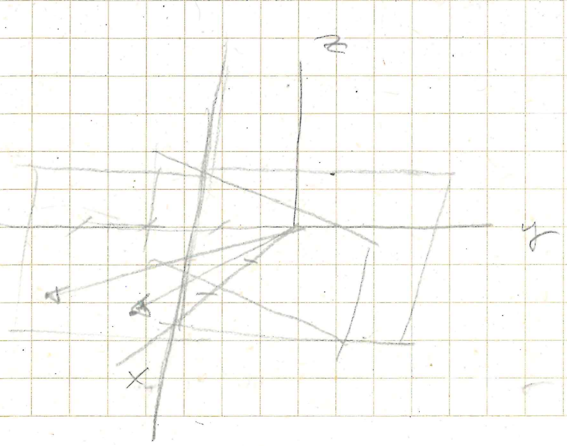
$$\Rightarrow d(r,s) = \frac{78}{\sqrt{(-13)^2 + 1 + 64}} = \boxed{\frac{78}{\sqrt{234}}}$$

b) $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 5-7\lambda \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0. \end{cases}$

Sigui

$P_r = (1,1,5)$

$V_r = (1,-2,-7)$



$x = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3y + 2 = 0 \\ -y + 1 = 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow y = 1$

$y = \frac{2}{3}$!

s és intersecció de dos plans paral·lels? No

$\vec{n} = (2,-3,0)$

$\vec{n'} = (3,-1,0)$

$P_s \in s$:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 9y = -6 \\ -6x + 2y = +2 \end{cases}$$

$$-7y = -4$$

$$x = \frac{-1 + \frac{4}{7}}{3} \Leftarrow y = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

$$= \frac{\frac{-3}{7}}{3} = \frac{-3}{21} = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow r = \begin{cases} x = -1/7 \\ y = 4/7 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{pu } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $z = 0 \Rightarrow (-1/7, \frac{4}{7}, 0) = P_s$.

$\exists \; v_s = (0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_r P_s} = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}, -5\right)$$

$$\vec{v_r} \wedge \vec{v_s} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j}$$

$$= (-2, 0, -1)$$

$$\vec{v_s} \wedge \overrightarrow{P_r P_s} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -\frac{8}{7} & -\frac{3}{7} & -5 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = -\frac{3}{7}\vec{k} + 10\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$-3\vec{i} - 8\vec{k} + 5\vec{j}$$

$$= 7\vec{i} + 13\vec{j} - \frac{59}{7}\vec{k}$$

$$= \left(7, 13, -\frac{59}{7}\right)$$

$$\vec{v_r} \cdot (\vec{v_s} \wedge \overrightarrow{P_r P_s}) = (1, -2, -7) \cdot \left(7, 13, -\frac{59}{7}\right)$$

$$= 7 - 26 + 59 = 40.$$

$$\Rightarrow d(r,s) = \frac{40}{|(-2,0,-1)|} = \frac{40}{\sqrt{5}}$$

257) Troben el joc geomètric dels punts de l'espai que equidisten dels següents plans:

a) $\pi_1 \equiv x + y + z - 2 = 0$

$\pi_2 \equiv x - y + z - 2 = 0$

Sigui L aquest conjunt, i.e,

$$L = \{ P = (x,y,z) \mid d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \}$$

$$d(A,\pi_1) = \frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}}$$

$$d(A,\pi_2) = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow |x + y + z - 2| = |x - y + z - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \\ \text{o bé} \\ x + y + z - 2 = -x + y - z + 2 \\ \text{o bé} \\ -x - y - z + 2 = -x + y - z + 2 \\ \text{o bé} \\ -x - y - z + 2 = x - y + z - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2y = 0 \quad \text{o bé} \quad 2x + 2z = 4 \quad \text{o bé} \quad 2y = 0 \quad \text{o bé} \quad -2x - 2z = -4$$

$$\Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{o bé} \quad x + z = 2 \Rightarrow x = 2 - z$$

$$\Rightarrow (\lambda, 0, \mu) \text{ on } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$\text{o } (2-\mu, \lambda, \mu) \text{ on } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow L = \{ (\lambda, 0, \mu), (2-\mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

b) $\pi_1 \equiv x - 3y + 2z - 8 = 0$
$\pi_2 \equiv x - 3y + 2z = 0$

Sigui L aquest lloc geomètric:

$$L = \{ P = (x, y, z) \mid d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \}$$

$$d(A, \pi_1) = \frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{14}}$$

$$d(A, \pi_2) = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow |x - 3y + 2z - 8| = |x - 3y + 2z|$$

$$\Rightarrow x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \Rightarrow \text{impossible}$$
o
$$x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \Rightarrow 2x - 6y + 4z = 8$$
o
$$-x + 3y - 2z + 8 = x - 3y + 2z \Rightarrow 2x - 6y + 4z = 8$$
o
$$-x + 3y - 2z + 8 = -x + 3y - 2z \Rightarrow \text{impossible}$$

$\Rightarrow (x, y, z) \in L \Longleftrightarrow 2x - 6y + 4z = 8.$

$$x - 3y + 2z = 4$$

$$\Rightarrow \quad L \equiv x - 3y + 2z - 4 = 0$$

L és el pla paral·lel a Π_1 i Π_2 (Π_1, Π_2 són paral·lels) que es troba equidistant de Π_1 i Π_2

SOLUCIONS DE LA
FULLA DE JAVIER
SÁNCHEZ

32)

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \underset{F_4-F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \underset{F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\underset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \\ C_4-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$$

b) 0

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

33)

a) $$\begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 5 & -\sqrt{3} \cdot 5 \end{vmatrix} \underset{C_1 \cdot \sqrt{3} - C_2}{=} \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \cdot (-2) + F_1 \\ F_2 \cdot 3 + F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\cdot(-5)+F_1 \\ F_2\cdot(-3)+F_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -8 & -16 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} yz & \frac{1}{x} & x \\ zx & 1/y & y \\ xy & 1/z & z \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{multiplic} \\ \text{i dividix per} \\ x}}{=} \frac{1}{x} \begin{vmatrix} yz & 1 & x \\ zx & \frac{x}{y} & y \\ xy & \frac{x}{z} & z \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{z} \begin{vmatrix} yz & yz & x \\ zx & xz & y \\ xy & xy & z \end{vmatrix} = 0$

34) a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \underset{C_3+C_2\to C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} -2a+b+c & 3a & 1 \\ a-2b+c & 3b & 1 \\ a+b-2c & 3c & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2+C_1\to C_1}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & 3a & 1 \\ a+b+c & 3b & 1 \\ a+b+c & 3c & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 3a & 1 \\ 1 & 3b & 1 \\ 1 & 3c & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) ?

d) $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & m & n \\ -a & -b & c & p \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1+F_2 \\ F_1+F_3 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & m+c & n+d \\ 0 & 0 & 2c & p+d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Triangular}}{=} 4abcd$$

e) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & ca-bc & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(b-c)$$

g) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1+F_2 \\ F_1+F_3 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)^4$$

h) $$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \underset{C_2+C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c) \cdot x^2$$

i) $$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{dezvoltare} \\ \text{pe } F_1}}{=} a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} -$$

$$- b \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 + b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= a^4 - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a^4 - b^4$$

P3.

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ \vdots}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot a \cdot b \cdot c$$

f) 527

PROBLEMES RESOLTS.

Problemes de Matemàtiques Especials

P2. Trobar l'equació implícita dels plans següents:

a) Pla que passa pels punts $P_1=(1,0,-1)$, $P_2=(1,3,0)$ i $P_3=(2,-1,3)$.

b) Pla que passa pel punt $Q=(3,0,1)$ i és paral·lel al pla $3x-2y+5z+1=0$.

b) Sigui π aquest pla. Si π ha de ser paral·lel a $3x-2y+5z+1=0$, aleshores han de tenir el mateix vector normal.

$\Downarrow$

$(3,-2,5)$ ha de ser vector normal de π

$\Rightarrow \pi \equiv 3x-2y+5z+k=0$.

Com que sabem que passa per Q, aleshores

$$3\cdot 3-2\cdot 0+5\cdot 1+k=0$$

$$9-0+5+k=0$$

$$14+k=0 \Rightarrow k=-14.$$

$\Rightarrow \pi \equiv 3x-2y+5z\cancel{+}-14=0.$

a) Si passa pels punts P_1, P_2 i P_3 $\Rightarrow$ està generat pels vectors $v_1=\overrightarrow{P_1P_2}$, $v_2=\overrightarrow{P_1P_3}$ i passa per P_1.

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-0 & 3 & -1 \\ z+1 & 1 & +4 \end{vmatrix}=0$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(1-1,3-0,0+1)=(0,3,1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3}=(2-1,-1-0,\cancel{-1-3}_{3+1})=(1,-1,\cancel{-4}_{4})$$

$\Rightarrow \pi \equiv$ ~~$+12(x-1)+y-3(z+1)+x-1=0$~~

$\pi \equiv (-12x+12+y-3z-3+x-1=0$

$\pi \equiv -11x$

$$\pi \equiv 12(x-1) + y - 3(z+1) + (x-1) = 0.$$

$$\pi \equiv 12x - 12 + y - 3z - 3 + x - 1 = 0$$

$$\pi \equiv 13x + y - 3z - 16 = 0.$$

Per tant, $\pi \equiv 13x - y - 3z - 16 = 0.$

P3. Estudieu si els parells de plans següents són paral·lels o es tallen:

a) $\cancel{x=0}$ $\pi \equiv x = 0$

$\pi' \equiv y + z = 0$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} x = s + t \\ y = 1 + s + t \\ z = t \end{cases}$$

$\pi' \equiv x - y = 0.$